

**ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь**

«ЗАТВЕРДЖУЮ»
Декан факультету математики та
цифрових технологій
_____ /Микола МАЛЯР/
« _____ » _____ 2022 р.

РОБОЧА ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА

Рівень вищої освіти	Бакалавр
Галузь знань	(01) Освіта, (11) Математика та статистика
Спеціальність	(014) Середня освіта, (111) Математика
Спеціалізація	(014.04) Математика
Освітня програма	Математика. Інформатика, Математика, Комп'ютерна та бізнес-математика
Статус дисципліни	Обов'язкова
Мова навчання	Українська

Ужгород 2022

Робоча програма навчальної дисципліни «Лінійна алгебра» для здобувачів вищої освіти галузей знань **(01) Освіта, (11) Математика та статистика** спеціальностей **(014) Середня освіта спеціалізації (014.04) Математика та (111) Математика** відповідно освітніх програм «Математика. Інформатика», «Математика», «Комп'ютерна та бізнес-математика».

Розробник: Шапочка І. В., доцент, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри алгебри та диференціальних рівнянь.

Робочу програму розглянуто та затверджено на засіданні кафедри алгебри та диференціальних рівнянь протокол №10 від липня 2022 р.

Завідувач кафедри _____ (Олександр РЕЙТІЙ)

Схвалено науково-методичною комісією факультету математики та цифрових технологій протокол №11 від 1 липня 2022 р.

Голова науково-методичною комісії _____ (Наталія ЮРЧЕНКО)

1. ОПИС НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Найменування показників	Розподіл годин за навчальним планом	
	Денна форма навчання	Заочна форма навчання
Кількість кредитів – 6	Рік підготовки:	
	1-й	2-й
Кількість модулів – 2	Семестр:	Заїзд:
	2-й	1-й, 2-й
Тижневих годин: для денної форми навчання: аудиторних – 5 самостійної роботи студента – 5	Лекції:	
	46 год	14 год
	Практичні:	
	44 год	12 год
Вид підсумкового контролю: екзамен	Індивідуальна робота:	
	36 год	36 год
Форма контролю: усне опитування	Самостійна робота:	
	54 год	118 год

2. МЕТА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Метою вивчення навчальної дисципліни «Лінійна алгебра» є ознайомлення студентів з основами алгебраїчної науки, вивчення основних алгебраїчних систем, виховання алгебраїчної культури, необхідної для глибокого розуміння цілей і задач як основного шкільного курсу математики, так і інших математичних дисциплін, що вивчаються у вузі.

Відповідно до освітньої програми «Математика. Інформатика» вивчення дисципліни сприяє формуванню у здобувачів вищої освіти спеціальності (014) Середня освіта спеціалізації (014.04) Математика таких компетентностей: ЗК–1, ЗК–2, ЗК–4, ЗК–6, ЗК–7, ЗК–8, ЗК–9, ЗК–10, ЗК–11, ЗК–12, ЗК–14, СК–1, СК–2, ФК–1, ФК–7, ФК–8, ФК–11, ФК–16.

Відповідно до освітніх програм «Математика» та «Комп'ютерна та бізнес-математика» вивчення дисципліни сприяє формуванню у здобувачів вищої освіти спеціальності (111) Математика таких компетентностей: ЗК–1, ЗК–2, ЗК–3, ЗК–4, ЗК–6, ЗК–7, ЗК–8, ЗК–12, ЗК–13, СК–1, СК–2, СК–3, СК–4, СК–10.

3. ПЕРЕДУМОВИ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

Передумовами вивчення навчальної дисципліни «Лінійна алгебра» є опанування таких навчальних дисциплін (НД) освітньої програми (ОП):

ОК 07 Алгебра

4. ОЧІКУВАНІ РЕЗУЛЬТАТИ НАВЧАННЯ

Відповідно до освітньої програми «Математика. Інформатика» вивчення навчальної дисципліни повинно забезпечити досягнення здобувачами вищої освіти спеціальності (014) Середня освіта спеціалізації (014.04) Математика таких програмних результатів навчання (ПРН):

Програмні результати навчання	Шифр ПРН
Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці	ПРН–1
Здатність розуміти основні поняття, принципи, теорії та результати математики; володіння спеціальною математичною термінологією та вміння її передавати з використанням математичних позначень.	ПРН–2
Знання основних понять та теоретичних положень математичного аналізу, алгебри і теорії чисел, аналітичної геометрії, лінійної алгебри, теорії диференціальних рівнянь, функцій комплексної змінної, теорії міри, теорії ймовірностей та математичної статистики, дискретної математики та елементарної математики.	ПРН–3
Уміння формулювати означення, аксіоми і теореми з математики, обґрунтовувати та доводити основні теореми та вміти застосовувати їх при розв'язуванні конкретних математичних та прикладних задач.	ПРН–8
Уміння встановлювати міжпредметні та внутрішньо предметні зв'язки під час вивчення конкретних тем, вищої математики, шкільного курсу математики.	ПРН–23

Відповідно до освітніх програм «Математика» та «Комп'ютерна та бізнес-математика» вивчення навчальної дисципліни повинно забезпечити досягнення здобувачами вищої освіти спеціальності (111) Математика таких програмних результатів навчання (ПРН):

Програмні результати навчання	Шифр ПРН
Знати основні етапи історичного розвитку математичних знань і парадигм, розуміти сучасні тенденції в математиці	ПРН-1
Знати принципи <i>modus ponens</i> (правило виведення логічних висловлювань) та <i>modus tollens</i> (доведення від супротивного) і використовувати умови, формулювання, висновки, доведення та наслідки математичних тверджень	ПРН-3
Розуміти фундаментальну математику на рівні, необхідному для досягнення інших вимог освітньої програми	ПРН-4
Пояснювати математичні концепції мовою, зрозумілою для нефахівців у галузі математики	ПРН-7
Розв'язувати задачі придатними математичними методами, перевіряти умови виконання математичних тверджень, коректно переносити умови та твердження на нові класи об'єктів, знаходити й аналізувати відповідності між поставленою задачею й відомими моделями	ПРН-10
Розв'язувати конкретні математичні задачі, які сформульовано у формалізованому вигляді; здійснювати базові перетворення математичних моделей	ПРН-11
Знати теоретичні основи і застосовувати алгебраїчні методи для вивчення математичних структур	ПРН-15

Очікувані результати навчання, які повинні бути досягнуті здобувачами освіти після опанування навчальної дисципліни «Лінійна алгебра»:

Очікувані результати навчання з дисципліни	Шифр ОРНД
Знання поняття лінійного простору	ОРНД-08.1
Знання поняття лінійно залежної системи векторів	ОРНД-08.2
Знання поняття базису лінійного простору	ОРНД-08.3
Знання поняття координат вектора	ОРНД-08.4
Знання поняття ізоморфізму лінійних просторів	ОРНД-08.5
Знання поняття підпростору лінійного простору	ОРНД-08.6
Знання поняття фактор-простору	ОРНД-08.7
Знання поняття прямої сума підпросторів	ОРНД-08.8
Знання поняття лінійного відображення лінійних просторів	ОРНД-08.9
Знання поняття лінійного оператора	ОРНД-08.10
Знання поняття власного значення та власного вектора лінійного оператора	ОРНД-08.11
Знання поняття нормальної форми Жордана	ОРНД-08.12
Знання поняття евклідового простору	ОРНД-08.13
Знання поняття ортонормованого базису	ОРНД-08.14
Знання поняття ортогонального оператора	ОРНД-08.15
Знання поняття симетричного оператора	ОРНД-08.16
Знання поняття квадратичної форми	ОРНД-08.17
Знання поняття канонічного вигляду квадратичної форми	ОРНД-08.18
Знання поняття додатно визначеної дійсної квадратичної форми	ОРНД-08.19
Вміння знаходити координати вектора у заданому базисі	ОРНД-08.20
Вміння обчислювати матрицю переходу від одного базису до іншого	ОРНД-08.21
Вміння знаходити базиси суми та перетину підпросторів скінченновимірного лінійного простору	ОРНД-08.22

Вміння знаходити матрицю лінійного оператора скінченновимірному лінійного простору	ОРНД–08.23
навички знаходження ядра та образу лінійного оператора	ОРНД–08.24
Вміння знаходити власні значення та власні вектори лінійного оператора	ОРНД–08.25
Вміння знаходити нормальну форму Жордана матриці	ОРНД–08.26
Вміння ортогоналізувати лінійно незалежну систему векторів	ОРНД–08.27
Вміння знаходити ортонормований базис у якому матриця ортогонального оператора має спеціальний вигляд	ОРНД–08.28
Вміння знаходити ортонормований базис, у якому матриця симетричного оператора є діагональною	ОРНД–08.29
Вміння знаходити канонічний вигляд квадратичної форми	ОРНД–08.30
Навички визначення чи є додатно визначеною дійсна квадратична форма	ОРНД–08.31

5. ЗАСОБИ ДІАГНОСТИКИ ТА КРИТЕРІЇ ОЦІНЮВАННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ НАВЧАННЯ

Засоби оцінювання та методи демонстрування результатів навчання

Засобами оцінювання та методами демонстрування результатів навчання з навчальної дисципліни є:

- розв’язування задач під час практичних занять;
- 18 розрахункових індивідуальних робіт;
- 2 модульні контрольних оцінювання;
- підсумковий семестровий екзамен.

Форми контролю та критерії оцінювання результатів навчання

Форми поточного контролю: усне опитування при розв’язуванні задач під час практичних занять; фронтальна перевірка виконання завдань для самостійної роботи; оцінка активності студента у процесі занять, внесених пропозицій, оригінальних рішень, уточнень і визначень, доповнень попередніх відповідей і т. ін.; письмова індивідуальна робота, здана на сайті електронного навчання ДВНЗ «Ужгородський національний університет» в курсі «Лінійна алгебра».

Форма модульного контролю: письмове контрольне оцінювання, кожне з яких складається з 10-ти типових завдань.

Форма підсумкового семестрового контролю: усне опитування студента за випадково вибраним екзаменаційним білетом, який складається з двох теоретичних питань і одного практичного завдання.

Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 1)

Поточне оцінювання та самостійна робота			Модульна контрольна робота	Сума
T1	T2	T3		
20	20	20	40	100

T1, T2, T3 – теми

Розподіл балів, які отримують здобувачі вищої освіти (модуль 2)

Поточне оцінювання та самостійна робота			Модульна контрольна робота	Сума
T1	T2	T3		
20	20	20	40	100

Оцінювання окремих видів навчальної роботи з дисципліни

Вид діяльності здобувача вищої освіти	Модуль 1		Модуль 2	
	Кількість	Максимальна кількість балів (сумарна)	Кількість	Максимальна кількість балів (сумарна)
Практичні заняття	11	24	11	24
Письмова індивідуальна робота при тематичному оцінюванні	9	36	9	36
Модульна контрольна робота	1	40	1	40
Разом		100		100

Критерії оцінювання модульної контрольної роботи

Протягом семестру проводяться дві підсумкові модульні контрольні роботи, зміст яких відповідає змістовним модулям. Максимальна кількість балів при оцінюванні кожної модульної контрольної роботи становить 40 балів. Модульна контрольна робота складається з десяти типових тематичних завдань. Максимальна оцінка за правильне розв'язання кожного завдання складає 4 бали (0, 1, 2, 3, 4 бали) і виставляється згідно критеріїв викладених у таблиці 1.

Таблиця 1

Зміст завдання	Бали
Отримано правильну відповідь. Обґрунтовано всі ключові моменти розв'язування	4
Наведено логічно правильну послідовність розв'язування. Деякі з ключових моментів розв'язування обґрунтовано недостатньо / Можливі 1–2 негрубі помилки або описки в обчисленнях, перетвореннях, що не впливають на правильність подальшого розв'язування / Отримана відповідь може бути неправильною	3
Наведено логічно правильну послідовність розв'язування. Деякі з ключових моментів обґрунтовано недостатньо або не обґрунтовано. Можливі 1–2 помилки в обчисленнях або перетвореннях, що впливають на правильність подальшого розв'язування. Отримана відповідь може бути неправильною або неповною (розв'язано правильно лише частину завдання)	2
У правильній послідовності розв'язування пропущено деякі його етапи. Ключові моменти розв'язування не обґрунтовано. Отримана відповідь неправильна або завдання розв'язано не повністю	1
Учасник не приступив до розв'язування завдання, або його записи не відповідають зазначеним вище критеріям	0

Критерії оцінювання індивідуальної роботи

Контроль виконання 18-ти індивідуальних робіт здійснюється за допомогою сайту електронного навчання ДВНЗ «УжНУ» (курс «Лінійна алгебра»). Максимальна оцінка за правильне розв'язання кожної індивідуальної роботи складає 4 бали (0, 1, 2, 3, 4 бали) і виставляється згідно критеріїв викладених у таблиці 1.

Критерії оцінювання підсумкового семестрового контролю

Підсумковий екзамен представляє собою усне опитування студента за випадково вибраним екзаменаційним білетом. Кожен екзаменаційний білет складається з двох теоретичних питань і одного стандартизованого (типового) практичного завдання. Орієнтований перелік питань до екзамену:

1. Лінійний простір над довільним полем. Наслідки з аксіом лінійного простору. Приклади лінійних просторів.
2. Лінійна залежність системи векторів. Ознака лінійної залежності системи векторів.
3. Дві теореми про систему і підсистему.
4. Теорема про лінійні комбінації векторів.
5. Скінченновимірний лінійний простір. Розмірність скінченновимірного лінійного простору. Базис лінійного простору. Теорема про базис і розмірність скінченновимірного лінійного простору.
6. Теорема про доповнення лінійно незалежної системи векторів до базису скінченновимірного лінійного простору.
7. Координати вектора в заданому базисі. Теорема про однозначність розкладу вектора по базису. Теорема про дії над векторами у координатній формі.
8. Зв'язок між координатами вектора в різних базисах. Матриця переходу. Формула перетворення координат вектора.
9. Теорема про оборотність матриці переходу від одного базису скінченновимірного лінійного простору до іншого.
10. Ізоморфізм лінійних просторів. Властивості ізоморфізму лінійних просторів. Класифікація скінченновимірних лінійних просторів над даним полем.
11. Підпростори лінійного простору. Ознаки підпростору. Приклади підпросторів.
12. Дії над підпросторами. Теореми про перетин та суму підпросторів. Теорема про розмірність суми і перетину підпросторів.
13. Прямі суми підпросторів. Ознаки прямої суми.
14. Суміжні класи лінійного простору за підпростором. Властивості суміжних класів. Фактор простір.
15. Теорема про розмірність трьох просторів.
16. Лінійне відображення лінійних просторів. Ознака лінійного відображення. Найпростіші властивості лінійного відображення. Ознака лінійного відображення.
17. Ядро та образ лінійного відображення. Основна теорема про гомоморфізми для лінійних відображень.
18. Теорема про існування і єдиність лінійного відображення.
19. Матриця лінійного відображення. Формула для координат образу вектора при лінійному відображенні.
20. Зв'язок матриць лінійного відображення при заміні базисів лінійних просторів.
21. Дії над лінійними відображеннями. Теорема про простір лінійних відображень.
22. Теорема про добуток лінійних відображень. Теорема про матрицю добутку лінійних відображень.
23. Лінійний оператор лінійного простору. Матриця лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору. Зв'язок матриць лінійного оператора при заміні базису лінійного простору.
24. Ядро та образ лінійного оператора. Теорема про розмірності ядра та образу лінійного оператора.
25. Ознаки оборотності лінійного оператора.
26. Характеристичний многочлен матриці і лінійного оператора.
27. Власні вектори і власні значення лінійного оператора. Теорема про підпростір власних векторів, що належать одному власному значенню.
28. Теорема про лінійну незалежність системи власних векторів, що належать попарно різним власним значенням лінійного оператора.
29. Ознака власного значення лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору.
30. Спектр лінійного оператора. Ознака діагоналізованості матриці лінійного оператора.
31. Інваріантний підпростір. Циклічний підпростір. Теорема про будову циклічного простору.
32. Мінімальний анулятор лінійного оператора. Теорема про мінімальний анулятор лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору.

33. Теорема Гамільтона-Келі.
34. Будова лінійного простору з оператором. Основна теорема про лінійні простори з оператором.
35. λ -матриці. Еквівалентність λ -матриць. Теорема про канонічний вигляд λ -матриці.
36. Унімодулярна λ -матриця. Ознаки унімодулярної λ -матриці.
37. Ознака еквівалентності λ -матриць.
38. Подібність матриць. Критерії подібності матриць над полем.
39. Нормальна форма Жордана. Знаходження нормальної форми Жордана матриці.
40. Евклідов простір. Приклади евклідових просторів.
41. Скалярний добуток векторів у координатній формі. Матриця Грама.
42. Ортогональні системи векторів. Теорема про ортогональну систему векторів.
43. Ортонормовані базиси. Формула для скалярного добутку векторів у ортонормованих координатах.
44. Процес ортогоналізації Грама-Шмідта. Теорема про існування ортонормованих базисів.
45. Ортогональне доповнення. Теорема про ортогональний розклад.
46. Норма вектора. Властивості норми.
47. Ізометрія евклідових просторів. Класифікація скінченновимірних евклідових просторів.
48. Унітарний простір. Приклади унітарних просторів.
49. Ортогональні оператори евклідового простору. Ознака ортогональності лінійного оператора евклідового простору. Теорема про образ ортонормованого базису ортогонального оператора.
50. Ортогональні матриці. Критерії ортогональності матриці. Властивості ортогональних матриць.
51. Теорема про зв'язок ортогонального оператора з ортогональними матрицями.
52. Симетричні оператори евклідового простору. Теорема про матрицю симетричного оператора.
53. Основна теорема про симетричні оператори.
54. Унітарні оператори унітарного простору. Основна теорема про унітарні оператори.
55. Самоспряжені оператори унітарного простору. Основна теорема про самоспряжені оператори.
56. Квадратичні форми. Матричний запис квадратичної форми. Матриця квадратичної форми. Лінійне перетворення невідомих квадратичної форми. Закон зміни квадратичної форми.
57. Еквівалентність квадратичних форм.
58. Ранг квадратичної форми. Теорема про інваріантність рангу квадратичної форми.
59. Канонічний вигляд квадратичної форми. Основна теорема про квадратичні форми.
60. Нормальний вигляд комплексної квадратичної форми. Класифікація комплексних квадратичних форм.
61. Нормальний вигляд дійсної квадратичної форми. Сигнатура дійсної квадратичної форми. Класифікація дійсних квадратичних форм.
62. Закон інерції для дійсних квадратичних форм.
63. Критерій Сільвестра додатної визначеності квадратичної форми.
64. Зведення квадратичної форми до головних осей.

Шкала оцінювання: національна та ECTS

Оцінка в балах	Оцінка ECTS	Екзаменаційна оцінка за національною шкалою
90–100	A	<i>Відмінно</i>
82–89	B	<i>Добре</i>
74–81	C	
64–73	D	<i>Задовільно</i>
60–63	E	
35–59	FX	<i>Незадовільно з можливістю повторного складання</i>
0–34	F	<i>Незадовільно з обов'язковим повторним вивченням дисципліни</i>

— **«A»** (90 та вище балів) заслуговує студент, який виявив всебічне і глибоке знання програмового матеріалу, вміння вільно виконувати завдання, передбачені програмою, засвоїв основну і ознайомився з додатковою літературою, розуміє взаємозв'язок головних понять дисципліни та їх значення для майбутньої професії;

— **«B»** (82–89 балів) заслуговує студент, який виявив повне знання програмного матеріалу, успішно виконує передбачені програмою завдання, засвоїв основну літературу рекомендовану програмою, виявив систематичний характер знань з дисциплін і здатний до самостійного доповнення, але під час відповіді допустив деякі неточності;

— **«C»** (74–81 балів) заслуговує студент, що виявив не цілком повне знання програмного матеріалу, не завжди успішно виконує передбачені програмою завдання, частково засвоїв основну літературу, рекомендовану програмою, виявив не систематичний характер знань з дисциплін і не завжди здатний до їх самостійного доповнення і під час відповіді допускає деякі неточності;

— **«D»** (64–73 балів) заслуговує студент, що виявив знання основного програмного матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка “D” виставляється студентам, що допустили помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача;

— **«E»** (60–63 балів) заслуговує студент, що виявив часткове знання основного програмового матеріалу в обсязі, необхідному для подальшого навчання та майбутньої роботи за професією, не завжди вміє виконувати завдання, передбачені програмою, знайомий лише частково з основною рекомендованою літературою. Як правило, оцінка “E” виставляється студентам, що допустили грубі помилки у відповіді на екзамені та при виконанні екзаменаційних завдань, але які частково володіють необхідними знаннями для їх усунення за допомогою викладача.

— **«FX»** (35–59 балів) виставляється студенту, який виявив суттєві прогалини в знаннях основного програмового матеріалу, допустив принципові помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

— **«F»** (0–34 балів) виставляється студенту коли протягом семестру він допустив грубі помилки у виконанні передбачених програмою завдань.

6. ПРОГРАМА НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ

6.1. Зміст навчальної дисципліни

Модуль 1

Тема 1. Лінійні простори.

Лінійний простір над полем. Приклади лінійних просторів. n -вимірний векторний простір над довільним полем. Лінійна залежність системи векторів. Ознака лінійної залежності системи векторів. Теореми про системи й підсистеми. Теорема про лінійні комбінації. Скінченновимірний лінійний простір. Розмірність лінійного простору. Базис лінійного простору. Координати вектора в заданому базисі. Дії над векторами в координатній формі. Заміна базису лінійного простору. Матриця переходу. Формули перетворення координат. Ізоморфізм лінійних просторів.

Тема 2. Підпростори лінійного простору.

Підпростори лінійного простору. Розмірність та базис підпростору. Дії над підпросторами. Теорема про розмірність суми підпросторів. Пряма сума підпросторів. Ознаки прямої суми підпросторів. Суміжні класи лінійного простору за підпростором. Фактор-простір.

Тема 3. Лінійні відображення лінійних просторів.

Лінійні відображення лінійних просторів. Ядро і образ лінійного відображення. Матриця лінійного відображення. Лінійний оператор. Матриця лінійного оператора. Формули для координат образу вектора. Зв'язок між матрицями одного і того ж оператора в різних базисах. Дії над лінійними відображеннями та операторами. Зв'язок дій над лінійними операторами з діями над їх матрицями. Власні значення і власні вектори лінійного оператора, зв'язок з характеристичними коренями. Лінійна незалежність власних векторів, що належать різним власним значенням. Умова діагоналізованості матриці лінійного оператора. Спектр лінійного оператора.

Модуль 2

Тема 1. Будова лінійного простору з оператором. Нормальна форма Жордана. λ -матриці.

Будова лінійного простору з оператором. Циклічний підпростір. Основна теорема про лінійні простори з оператором. Подібні матриці. Нормальна форма Фробеніуса. λ -матриці. Еквівалентність λ -матриць. Канонічний вигляд λ -матриці. Унімодулярні λ -матриці. Критерій подібності матриць над полем. Жорданова нормальна форма матриць.

Тема 2. Евклідові та унітарні простори та оператори на них.

Евклідів простір. Скалярний добуток. Ізометрія евклідових просторів. Ортогональні вектори. Процес ортогоналізації Грама-Шмідта. Існування ортонормованих базисів. Ортогональне доповнення. Унітарний простір. Ортогональні матриці. Ортогональні оператори евклідового простору. Унітарні оператори унітарного простору. Симетричні оператори евклідового простору. Дійсність характеристичних коренів симетричного оператора. Існування ортогональної матриці, що зводить дану симетричну матрицю до діагонального вигляду. Самоспряжені оператори унітарного простору.

Тема 3. Білінійні та квадратичні форми.

Білінійна форма. Квадратична форма, її матриця, ранг. Канонічний вигляд квадратичної форми. Зведення квадратичної форми до канонічного виглядів. Нормальні вигляди квадратичної форми над полями комплексних та дійсних чисел. Еквівалентність квадратичних форм над полем комплексних чисел та над полем дійсних чисел. Закон інерції дійсної квадратичної форми. Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра додатної визначеності квадратичної форми. Зведення квадратичної форми до головних осей. Застосування квадратичних форм до зведення рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду.

6.2. Структура навчальної дисципліни

Назви змістових модулів і тем	Кількість годин					
	Денна форма					
	Усього	у тому числі				
		лекції	практичні	лабораторні	індивідуальна робота	самостійна робота
2-й семестр						
Модуль 1						
Тема 1. Лінійні простори	28	6	8		6	8
Тема 2. Підпростори лінійного простору.	16	6	2		2	6
Тема 3. Лінійні відображення лінійних просторів	42	8	12		10	12
Модульна контрольна робота						2
Разом за модуль	88	20	22		18	28
Модуль 2						
Тема 1. Будова лінійного простору з оператором. Нормальна форма Жордана. λ -матриці.	28	10	6		4	8
Тема 2. Евклідові і унітарні простори та оператори на них	34	8	10		8	8
Тема 3. Білінійні та квадратичні форми.	28	8	6		6	8
Модульна контрольна робота						2
Разом за модуль	92	26	22		18	26
Разом за семестр	180	46	44		36	54

6.3. Теми практичних занять

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	
		денна	заочна
1.	Лінійний простір над полем. Завдання: [4, 1.1.1–1.1.18], [5, 1821–1823].	2	0,5
2.	Лінійна залежність системи векторів. Завдання: [4, 1.2.1–1.2.28], [5, 1824–1831].	2	0,5
3.	Скінченновимірний лінійний простір. Розмірність лінійного простору. Базис лінійного простору. Координати вектора в заданому базисі. Дії над векторами в координатній формі. Завдання: [4, 1.4.1–1.4.16], [5, 1277–1284].	2	0,5
4.	Скінченновимірний лінійний простір. Розмірність лінійного простору. Базис лінійного простору. Координати вектора в заданому базисі. Дії над векторами в координатній формі. Завдання: [4, 1.4.17–1.4.28], [5, 1277–1284].	2	0,5
5.	Підпростори лінійного простору. Дії над підпросторами. Пряма сума підпросторів. Фактор-простір. Завдання: [4, 1.4.29–1.4.43, 1.5.1–1.5.25], [5, 1285–1350].	2	0,5
6.	Лінійні відображення лінійних просторів. Ядро і образ лінійного відображення. Завдання: [4, 5.1.1–5.1.77], [5, 1434–1455].	2	0,5
7.	Матриця лінійного відображення. Лінійний оператор. Завдання: [4, 5.6.1–5.6.44], [5, 1434–1455].	2	0,5
8.	Дії над лінійними відображеннями та операторами. Завдання: [4, 5.2.1–5.2.28], [5, 1456–1462].	2	0,5
9.	Зв'язок дій над лінійними операторами з діями над їх матрицями. Завдання: [4, 5.3.1–5.3.54], [5, 1456–1462].	2	0,5
10.	Власні значення і власні вектори лінійного оператора. Спектр лінійного оператора. Завдання: [4, 6.1.1–6.1.43], [5, 1463–1484].	2	1
11.	Характеристичний многочлен лінійного оператора. Завдання: [4, 6.2.1–6.2.64], [5, 1463–1484].	2	0,5
12.	Будова лінійного простору з оператором. Циклічний підпростір. Основна теорема про лінійні простори з оператором. Подібні матриці. Нормальна форма Фробеніуса. Завдання: [4, 6.3.1–6.3.51], [5, 1485–1525].	2	0,5
13.	λ -матриці. Еквівалентність λ -матриць. Канонічний вигляд λ -матриці. Завдання: [4, 6.4.1–6.4.101], [5, 1527–1536].	2	0,5
14.	Унімодулярні λ -матриці. Критерій подібності матриць над полем. Жорданова нормальна форма матриць. Завдання: [4, 6.4.1–6.4.101], [5, 1527–1536].	2	0,5
15.	Евклідові та унітарні простори. Скалярний добуток. Завдання: [4, 2.1.1–2.1.19, 2.5.1–2.5.19], [5, 1351–1433].	2	0,5

16.	Ортогональні вектори. Процес ортогоналізації Грама-Шмідта. Ортонормований базис. Завдання: [4, 2.3.1–2.3.27, 2.5.1–2.5.19], [5, 1351–1433].	2	0,5
17.	Ортогональне доповнення. Завдання: [4, 2.3.1–2.3.27], [5, 1351–1433].	2	0,5
18.	Ортогональні матриці. Ортогональні оператори евклідового простору. Унітарні оператори унітарного простору. Завдання: [4 7.3.1–7.3.55], [5, 1540–1578].	2	0,5
19.	Симетричні оператори евклідового простору. Самоспряжені оператори унітарного простору. Завдання: [4 7.2.1–7.2.50], [5, 1579–1633].	2	0,5
20.	Квадратична форма, її матриця, ранг. Канонічний вигляд квадратичної форми. Зведення квадратичної форми до канонічного та нормального виглядів. Нормальні вигляди квадратичної форми над полями комплексних та дійсних чисел. Завдання: [5, 1175–1203].	2	1
21.	Закон інерції дійсної квадратичної форми. Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра додатної визначеності квадратичної форми. Завдання: [5, 1204–1218].	2	0,5
22.	Зведення квадратичної форми до головних осей. Застосування квадратичних форм до зведення рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду. Завдання: [5, 1243–1276].	2	0,5
Разом		44	12

6.4. Самостійна робота

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	
		денна	заочна
1.	Лінійний простір над полем. Приклади лінійних просторів. n -вимірний векторний простір над довільним полем. Лінійна залежність системи векторів. Теореми про системи й підсистеми. Теорема про лінійні комбінації. Література: [1, розд. IX, §1], [2, §29], [3, гл. XII, §1].	3	6
2.	Скінченновимірний лінійний простір. Розмірність лінійного простору. Базис лінійного простору. Координати вектора в заданому базисі. Дії над векторами в координатній формі. Заміна базису лінійного простору. Матриця переходу. Формули перетворення координат. Література: [1, розд. IX, §2–3], [2, §30], [3, гл. XII, §1].	3	6
3.	Ізоморфізм лінійних просторів. Класифікація скінченновимірних лінійних просторів. Література: [1, розд. IX, §3], [2, §29].	3	6
4.	Підпростори лінійного простору. Дії над підпросторами. Теорема про розмірність суми підпросторів. Пряма сума підпросторів. Ознаки прямої суми підпросторів. Література: [1, розд. IX, §4], [2, §32], [3, гл. XII, §2].	3	6
5.	Суміжні класи лінійного простору за підпростором. Фактор-простір. Література: [1, розд. XII, §2], [3, гл. XII, §2].	3	6
6.	Лінійні відображення лінійних просторів. Ядро і образ лінійного відображення. Основна теорема про гомоморфізми. Література: [1, розд. XII, §1,3], [2, §§31–32], [3, гл. XII, §4,5].	3	6
7.	Лінійні відображення скінченновимірних лінійних просторів. Матриця лінійного відображення. Лінійний оператор. Матриця лінійного оператора. Формули для координат образу вектора. Зв'язок між матрицями одного і того ж оператора в різних базисах. Література: [1, розд. XII, §1,3], [2, §§31–32], [3, гл. XII, §4,5].	3	6
8.	Дії над лінійними відображеннями та операторами. Зв'язок дій над лінійними операторами з діями над їх матрицями. Література: [1, розд. XII, §2], [2, §31].	3	6
9.	Власні значення і власні вектори лінійного оператора, зв'язок з характеристичними коренями матриці лінійного оператора. Спектр лінійного оператора. Умова діагоналізованості матриці лінійного оператора. Література: [1, розд. XII, §4], [2, §33], [3, гл. XII, §6].	3	6
10.	Будова лінійного простору з оператором. Циклічний підпростір. Література: [1, розд. XII, §5], [3, гл. XII, §5], [7, розд. XIII, §4].	2	6
11.	Основна теорема про лінійні простори з оператором. Подібні матриці. Нормальна форма Фробеніуса. Література: [1, розд. XII, §5], [3, гл. XII, §5], [7, розд. XIII, §4].	2	5
12.	λ -матриці. Еквівалентність λ -матриць. Канонічний вигляд λ -матриці. Література: [2, §59].	2	5

13.	Унімодулярні λ -матриці. Критерій подібності матриць над полем. Література: [2, §60].	2	5
14.	Жорданова нормальна форма матриць. Література: [2, §61].	3	5
15.	Евклідові та унітарні простори. Ортонормований базис евклідового та унітарного просторів. Ортогональні вектори. Процес ортогоналізації Грама-Шмідта. Література: [1, розд. XI, §§1–2], [2, §34], [3, гл. XIII, §1].	2	5
16.	Ізометрія евклідових та унітарних просторів. Ортогональне доповнення. Література: [1, розд. XI, §§3,4], [2, §34], [3, гл. XIII, §2].	2	5
17.	Ортогональні та унітарні матриці. Ортогональні оператори евклідового простору. Унітарні оператори унітарного простору. Література: [1, розд. XIII, §3], [2, §35], [3, гл. XIII, §4,5].	2	5
18.	Симетричні оператори евклідового простору. Самоспряжені оператори унітарного простору. Література: [1, розд. XIII, §1,2], [2, §36], [3, гл. XIII, §4,5].	2	5
19.	Квадратична форма, її матриця, ранг. Канонічний вигляд квадратичної форми. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Література: [1, розд. X, §§2–3], [2, §§26], [3, гл. V, §1].	2	5
20.	Нормальні вигляди квадратичної форми над полями комплексних та дійсних чисел. Закон інерції дійсної квадратичної форми. Література: [1, розд. X, §§4], [2, §§27], [3, гл. V, §1].	2	5
21.	Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра додатної визначеності квадратичної форми. Література: [1, розд. X, §4], [2, §§28], [3, гл. V, §2].	2	5
22.	Зведення квадратичної форми до головних осей. Застосування квадратичних форм до зведення рівняння лінії другого порядку до канонічного вигляду. Література: [1, розд. XII, §4], [2, §37], [3, гл. V, §3].	2	5
Разом		54	120

6.5. Індивідуальні завдання

№ з/п	Назва теми	Кількість годин	
		денна	заочна
1.	Лінійний простір. Лінійна залежність системи векторів. Література: [7, 1.1].	2	2
2.	Скінченновимірний лінійний простір. Базис лінійного простору. Література: [7, 1.2].	2	2
3.	Ізоморфізм лінійних просторів. Література: [7, 1.3].	2	2
4.	Підпростори лінійного простору. Дії над підпросторами. Література: [7, 1.4].	2	2
5.	Лінійний оператор. Матриця лінійного оператора. Література: [7, 1.5].	2	2
6.	Ядро і образ лінійного оператора. Література: [7, 1.6].	2	2
7.	Дії над лінійними операторами. Зв'язок дій над лінійними операторами з діями над їх матрицями. Література: [7, 1.7].	2	2
8.	Власні значення і власні вектори лінійного оператора. Характеристичний многочлен лінійного оператора: [7, 1.8].	2	2
9.	Спектр лінійного оператора. Будова лінійного простору з оператором. Література: [7, 1.9].	2	2
10.	Основна теорема про лінійні простори з оператором. Жордановий базис. Література: [7, 1.10].	2	2
11.	λ -матриці. Еквівалентність λ -матриць. Канонічний вигляд λ -матриці. Унімодулярні λ -матриці. Література: [7, 1.11].	2	2
12.	Евклідові простори. Ортонормований базис евклідового простору. Процес ортогоналізації Грама-Шмідта. Література: [7, 1.12].	2	2
13.	Ортогональне доповнення. Література: [7, 1.13].	2	2
14.	Ортогональні матриці. Ортогональні оператори евклідового простору. Література: [7, 1.14].	2	2
15.	Симетричні оператори евклідового простору. Література: [7, 1.15].	2	2
16.	Квадратичні форми. Еквівалентність квадратичних форм. Канонічний вигляд квадратичної форми. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Література: [7, 1.16].	2	2
17.	Додатно визначені квадратичні форми. Критерій Сильвестра додатної визначеності квадратичної форми. Література: [7, 1.17].	2	2
18.	Зведення квадратичної форми до головних осей. Література: [7, 1.18].	2	2
Разом		36	36

7. ІНСТРУМЕНТИ, ОБЛАДНАННЯ ТА ПРОГРАМНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ, ВИКОРИСТАННЯ ЯКИХ ПЕРЕДБАЧАЄ НАВЧАЛЬНА ДИСЦИПЛІНА

Технічні засоби: комп'ютер та проектор для демонстрації презентацій лекцій.
Програмне забезпечення Acrobat Reader, Geogebra

8. РЕКОМЕНДОВАНІ ДЖЕРЕЛА ІНФОРМАЦІЇ

Основна література

1. Завало С. Т. Курс алгебри. Київ: Вища школа, 1985. 503 с.
2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры: Учебник. Москва: Наука, 1971. 432 с.
3. Фаддеев Д. К. Лекции по алгебре: Учебное пособие для вузов. Москва: Наука, 1984. 416 с.
4. Икрамов Х. Д. Задачник по линейной алгебре / Под редакцией Воеводина В.В. Москва: Наука, 1975. 320 с.
5. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. 9-е издание. Москва: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2005. 383 с.
6. Лінійна алгебра / Баранник В. Ф., Дроботенко Е. С., Рудько В. П., Шапочка І. В.: Навчальний посібник. Ужгород: Ужгород. держ. ун-т, 1999. 92 с.
7. Шапочка І. В. Лінійна алгебра. Навчальний посібник для індивідуальних робіт. Ужгород: Видавництво УжНУ «Говерла», 2020. 95 с.

Допоміжна література

1. Безущак О. О., Ганюшкін О. Г. Завдання для практичних занять з лінійної алгебри (векторні простори): для студентів університетів. Київ: Видавничо-поліграфічний центр «Київський ун-т», 2010. 257 с.
2. Калужнін Л. А., Вишенський В. А., Шуб І. О. Лінійні простори. Київ: Вища школа, 1971. 344 с.
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. Москва: Физматлит, 2000. 368 с.
4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. Москва: Наука, 1970. 402 с.
5. Романів О. М. Лінійна алгебра. Частина 2: підручник Львів: Видавець І. Е. Чижииков, 2014.04. 279 с.
6. Сборник задач по высшей алгебре / Под ред. А. И. Кострикина : Учебник для вузов. Изд. 3-е, испр. и доп. Москва: Физматлит, 2001. 464 с.
7. Фаддеев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей алгебре: Учебное пособие. Москва: Наука, 1972. 304 с.

Інформаційні ресурси в мережі Інтернет

1. <http://e-learn.uzhnu.edu.ua> — сайт електронного навчання ДВНЗ «Ужгородський національний університет».
2. <http://www.nbu.gov.ua> — Національна бібліотека України імені В. І. Вернадського.
3. <http://mechmat.univ.kiev.ua/ua/study/library.php> — електронна бібліотека механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка.
4. <http://www.twirpx.com/files/mathematics/algebra/linear> — підрозділ сервісу, який за допомогою веб-інтерфейсу, розміщеного за адресою <http://www.twirpx.com>, забезпечує зберігання, накопичення та обміну матеріалів, представлених користувачами у електронному вигляді.
5. <https://www.geogebra.org> — сайт вільно поширюваного середовища динамічної математики, яке дає можливість створювати «живі креслення» для використання в геометрії, алгебрі.