МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”
КАФЕДРА ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Т.В. Боярищева, М.С. Герич, О.О.Погоріляк,
О.О. Синявська

ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ
ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ТИПОВИХ ІНДИВІДУАЛЬНИХ
ЗАВДАНЬ **З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ**
ДЛЯ СТУДЕНТІВ ФАКУЛЬТЕТУ МАТЕМАТИКИ
ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Ужгород – 2023

Інтегральне числення функції однієї змінної: методичні вказівки до виконання типових індивідуальних завдань з математичного аналізу для студентів факультету математики та цифрових технологій/ Уклад. Т.В. Боярищева, М.С. Герич, О.О. Погоріляк, О.О. Синявська. Ужгород: ДВНЗ "УжНУ", 2023. 86 с.

Рецензенти: докт. техн. наук, проф. Гече Ф.Е.,

канд. фіз-мат. наук., доц. Млавець Ю.Ю.

Рекомендовано до друку кафедрою математичного аналізу та теорії ймовірностей ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 16 червня 2023 року, протокол № 11.

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету математики та цифрових технологій ДВНЗ «Ужгородський національний університет» від 20 червня 2023 року, протокол № 10.

ЗМІСТ

КОРОТКІ ТЕОРЕТИЧНІ ВІДОМОСТІ

1. Невизначений інтеграл	
Первісна. Функцію $F(x)$ називають первісною функції $f(x)$ на інтервалі (a, b), якщо вона диференційовна для будь-якого $x \in (a, b)$ і $F'(x) = f(x)$.	
Достатня умова існування первісної. Будь-яка неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ має на цьому відрізку первісну $F(x)$.	
Невизначений інтеграл. Сукупність $F(x) + C$ всіх первісних функції $f(x)$ в інтервалі (a, b) називають *невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ і позначають $$\int f(x)dx = F(x) + C.$$	
Властивості невизначеного інтеграла	
1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$	2. $d(\int f(x)dx) = f(x)dx$
3. $\int dF(x) = F(x) + C$	4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx\,, k \neq 0$
5. $\int (f(x) \pm g(x))dx =$ $\int f(x)dx \pm \int g(x)dx$	6. *Інваріантність формул інтегрування* $$\int f(u)dx = F(u) + C, u = \varphi(x).$$
Основні формули інтегрування	
1. $\int 0du = \mathrm{C}$	2.$\int du = u + C$
3. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$	4.$\int u^n\, du = \frac{u^{n+1}}{\alpha+1} + C\ , n \neq -1$
5.$\int e^u du = e^u + C$	6.$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$
7.$\int \sin u\, du = -\cos u + C$	8.$\int \cos u\, du = \sin u + C$
9.$\int \frac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + C$	10.$\int \frac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + C$
11.$\int \operatorname{sh} u\, du = ch\, u + C$	12.$\int \operatorname{ch} u\, du = \operatorname{sh} u + C$
13.$\int \frac{du}{\operatorname{ch}^2 u} = \operatorname{th} u + C$	14.$\int \frac{du}{sh^2\, u} = -\operatorname{cth} u + C$
15.$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} =$ $= \ln\left\lvert u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right\rvert + C, a \neq 0$	16.$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \arcsin\frac{u}{a} + C\ ,\ a \neq 0$
17.$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a} + C, a \neq 0$	19. $\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{u-a}{u+a}\right\rvert + C\ , a \neq 0$

<table>
<tr><td colspan="2">Перетворення диференціалів деяких функцій</td></tr>
<tr><td>1. $dx = \frac{1}{k} d(kx + b), k, b = const;$</td><td>2. $x^{\alpha-1}dx = \frac{1}{\alpha} d(x^{\alpha}), \alpha \neq 0$</td></tr>
<tr><td>3. $\frac{dx}{x} = d(\ln x)$</td><td>4. $a^x dx = \frac{1}{\ln a} d(a^x)$</td></tr>
<tr><td>5. $\cos x dx = d(\sin x)$,
$\sin x dx = -d(\cos x)$</td><td>6. $\frac{dx}{cos^2 x} = d(\operatorname{tg} x)$, $\frac{dx}{sin^2 x} = -d(\operatorname{ctg} x)$</td></tr>
<tr><td>7. $\frac{dx}{x^2+a^2} = d(\operatorname{arctg} x)$</td><td>8. $\frac{dx}{\sqrt{1^2-x^2}} = d(\arcsin x)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Метод заміни змінної (підстановки)
$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x = \varphi(u) \\ dx = \varphi'(u)du \end{vmatrix} = \int f(\varphi(u))\varphi'(u)du;$$
$$\int f(x)dx = \int g(h(x))h'(x)dx = \begin{vmatrix} h'(x)dx = \\ dh(x) = dt \end{vmatrix} = \int g(h(x))dh(x) = \int g(t)dt.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Інтегрування частинами
$$\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$
або $\int v\, du = uv - \int u\, dv$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Типи інтегралів, до яких застосовують інтегрування частинами
($P_n(x)$ − многочлен степення n)</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x) \begin{Bmatrix} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \\ e^{\alpha x} \end{Bmatrix} dx$</td><td>$u$=$P_n(x)$, dv – вираз, що залишився</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x) \ln x\, dx$</td><td>$u = \ln x$, $dv = P_n(x)$dx</td></tr>
<tr><td>$\int P_n(x) \operatorname{arcf} x\, dx$</td><td>$u = \operatorname{arcf} x$, $dv = P_n(x)$dx</td></tr>
<tr><td>$\int e^{\alpha x} \begin{Bmatrix} \sin bx \\ \cos bx \end{Bmatrix} dx$,
$\int \begin{Bmatrix} \sin (\ln x) \\ \cos (\ln x) \end{Bmatrix} dx$</td><td>Після двократного інтегрування частинами, розв’язується рівняння щодо шуканого інтеграла .</td></tr>
<tr><td>$\int \sqrt{a^2 \pm x^2}\, dx$, $\int \sqrt{x^2 - a^2} dx$</td><td>Після інтегрування частинами, розв’язується рівняння щодо шуканого інтеграла.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Інтегрування дробово-раціональних виразів</td></tr>
<tr><td>Типи елементарних дробів</td><td>Інтегрування елементарних дробів</td></tr>
<tr><td>Дріб I типу $\frac{A}{x-a}$</td><td>$\int \frac{Adx}{x-a} = A\ \ln|x-a| + C$</td></tr>
</table>

Дріб II типу $\frac{A}{(x-a)^k}$, $k \geq 2$	$\int \frac{Adx}{(x-a)^k} = \frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C$
Дріб III типу $\frac{Mx+N}{x^2+px+q}$, $D = p^2 - 4q \leq 0$	
1) $\int \frac{dx}{x^2+px+q}$	Виділяють повний квадрат у знаменнику
2) $\int \frac{Mx+N}{x^2+px+q}\,dx$	Виділяють у чисельнику похідну від знаменника : $d(x^2+px+q) = (2x+p)dx$ $Mx + N \equiv \frac{M}{2}(2x+p) + \left(N - \frac{Mp}{2}\right)$
Дріб IV типу $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$, $D = p^2 - 4q \leq 0,\ k \geq 2$ $\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}\,dx = \begin{vmatrix} x+\frac{p}{2}=t \\ dx = dt \end{vmatrix} = \int \frac{M\left(t-\frac{p}{2}\right)+N}{(t^2+a^2)^k}\,dt = M\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} +$ $+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{M}{2}\frac{(t^2+a^2)^{-k+1}}{-k+1} + \left(N - \frac{Mp}{2}\right) I_k,$ де $a = q - \frac{p^2}{4} > 0, I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}$ і при	
1) $k = 1$	$\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a}\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{t}}{a} + \mathrm{C};$
1) $k \geq 2$	$I_k = \frac{1}{2a^2(k-1)}\frac{t}{(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{a^2}\frac{2k-3}{2k-2}I_{k-1}, k > 1.$
Схема розкладання правильного дробу на суму елементарних. *1.* Розклад знаменнику дробу на множники. 2. Запис розкладу на прості (елементарні) дроби із невизначеними коефіцієнтами. 3. Визначення коефіцієнтів методом невизначених коефіцієнтів або частинних значень.	*Схема інтегрування дробово-раціонального виразу.* 1. Виділення цілої частини дробу при наявності неправильного дробу. 2. Розклад правильного дріб розкладають на суму простих дробів. 3. Інтегрування суми цілої частини і елементарних дробів.
Інтегрування ірраціональних функцій	
$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$	Виносять старший коефіцієнт і виділяють повний квадрат під коренем.

$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$	Виділяють у чисельнику похідну від підкореневого виразу: $$d(ax^2+bx+c) = (2ax+b)dx;$$ $$Ax+B = \frac{A}{2a}(2ax+b) + \left(B - \frac{Ab}{2a}\right).$$
$\int \frac{dx}{(x-m)\sqrt{ax^2+bx+c}}$	*Заміна:* $t = \frac{1}{x-m}$
$\int R(x, X^{r_1/s_1}, \dots, X^{r_n/s_n})dx$, де $X = \frac{ax+b}{cx+d}$.	*Заміна:* $\frac{ax+b}{cx+d} = t^m$, де $m = \text{НСК}(s_1, \dots., s_2)$
Підстановки Ейлера	
Інтеграл вигляду $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ виражається через раціональні функції за допомогою таких підстановок (*підстановки Ейлера*):	
Властивість коефіцієнтів тричлена ax^2+bx+c	*Заміна*
1) $a > 0$	1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t \pm x\sqrt{a}$
2) $c > 0$	*2)* $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt \pm \sqrt{c}$
3) $D = b^2 - 4ac > 0$ *і* x_1, x_2 –корені квадратного тричлена	*3)* $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)} = $ $= t(x-x_1)$
Тригонометричні підстановки	
$\int R(x, \sqrt{a^2+x^2})dx$	$x = a \operatorname{tg} t$ *або* $x = a \operatorname{ctg} t$ *або* $x = a \operatorname{sh} t$
$\int R(x, \sqrt{x^2-a^2})dx$	$x = \frac{a}{\cos t}$ *або* $x = \frac{a}{\sin t}$ *або* $x = a \operatorname{ch} t$
$\int R(x, \sqrt{a^2-x^2})dx$	$x = a \sin t$ *або* $x = a \cos t$ *або* $x = a \operatorname{tg} t$
Інтегрування диференціального бінома $\int x^m(a+bx^n)^p dx, m, n, p \in \mathbb{Q}$ *(підстановки Чебишова)*	
Вираз вигляду $x^m(a+bx^n)^p$, де m, n, p – раціональні сталі, *a і b* – довільні сталі, називають *диференціальним біномом.* Інтеграл від такого виразу, виражається через інтеграл від раціональної функції лише у таких трьох випадках.	

(1)	(2)	(3)	(4)
$p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $x = t^k$, k – *найменший спільний знаменник дробів* m і n	$\dfrac{m+1}{n} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow a + bx^n = t^s$, s – *знаменник дробу* p	$\dfrac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $\Rightarrow ax^{-n} + b = t^s$, s – *знаменник дробу* p	*У решті випадків інтеграл не виражається в елементарних функціях.*

Інтегрування тригонометричних виразів	
Основні способи знаходження $\int \mathrm{R}(\sin \mathrm{x},\ \cos \mathrm{x})\mathrm{dx}$	
Загальний випадок – *універсальна тригонометрична підстановка*	$t = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$ $\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$
Властивість підінтегральної функції $R(sin\ x, cos\ x)$	*Підстановка*
Непарна відносно $\sin x$: $R(-\sin x, \cos x) = -R\ (\sin x, \cos x)$	$\cos x\ =\ t \Rightarrow \int \bar{R}(\cos x) d(\cos x)$
Непарна відносно $\cos x$: $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$	$\sin x\ =\ t \Rightarrow \int \bar{R}(\sin x) d(\sin x)$
Парна відносно $\cos x$ і $\sin x$ одночасно: $R(-\sin x, \cos x) = R(\sin x\,, \cos x)$	$\mathrm{tg}\, x\ =\ t \Rightarrow \int \bar{R}(\mathrm{tg}\, x) d(\mathrm{tg}\, x)$ або $\mathrm{ctg}\, x\ =\ t \Rightarrow \int \bar{R}(\mathrm{ctg}\, x) d(\mathrm{ctg}\, x)$
Знаходження $\int R(\sin^n x, \cos^m x) dx$	
n – ціле додатне непарне число	$\cos x\ =\ t$
m – ціле додатне непарне число	$\sin x\ =\ t$
m, n – цілі додатні парні числа	$\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}, \cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$
m, n – цілі додатні парні числа, але хоча б одне з них від’ємне; m, n – цілі непарні від’ємні числа	$\mathrm{tg}\, x\ =\ t$

$$\int \cos kx \cos lx \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos(k-l)x + \cos(k+l)x) \, dx;$$

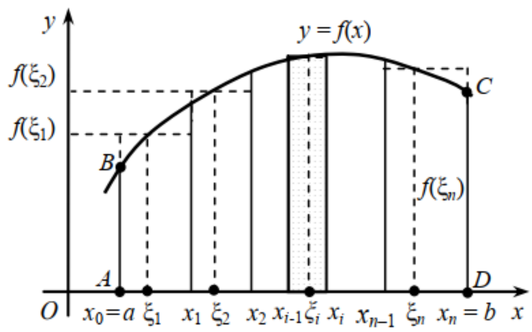
$$\int \sin kx \cos lx \, dx = \frac{1}{2} \int (\sin(k-l)x + \cos(k+l)x) \, dx;$$

$$\int \sin kx \sin lx \, dx = \frac{1}{2} \int (\cos(k-l)x - \cos(k+l)x) \, dx.$$

Знаходження $\int \mathrm{tg}^n\, x \, dx$, $\int \mathrm{ctg}^n\, x \, dx$, n – ціле додатне число

Використання формул	*Застосування підстановок*
$\mathrm{tg}^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, $\mathrm{ctg}^2\, x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$	$\mathrm{tg}\, x = t$ *або* $\mathrm{ctg}\, x = t$

2. Визначений інтеграл (інтеграл Рімана)



Означення визначеного інтеграла. Нехай функцію $y = f(x)$ задано на відрізку $[a, b], a < b$. Розіб'ємо відрізок на n довільних частин точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$, після цього на кожному частинному відрізку $[x_{i-1}, \; x_i]$, $i = \overline{1, n}$, візьмемо довільну точку ξ_i і побудуємо суму $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$, де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Цю суму називають *інтегральною сумою* для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$. Позначимо через $\lambda = \max\limits_{i} \Delta x_i$ довжину найбільшого частинного відрізка Δx_i і назвемо його *діаметром* розбиття. Якщо існує границя інтегральної суми при $\lambda \to 0$, яка не залежить від способу розбиття відрізку $[a, b]$ та вибору точок ξ_i, то її називають *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначають $\int_a^b f(x)dx = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, \Delta x_i$. Числа a і b називають *межами інтегрування*: a – нижня межа, b – верхня межа, $f(x)$ – *підінтегральна функція*, $f(x)dx$ – *підінтегральний вираз*, $[a, b]$ – *проміжок інтегрування*.

Функцію $f(x)$ називають *інтегровною* на відрізку $[a, b]$, якщо для неї існує визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Геометричний зміст визначеного інтеграла.	*Фізичний зміст визначеного інтеграла.*
Визначений інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x) \geq 0$ – неперервна функція, чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої прямими	Шлях s, пройдений точкою за проміжок часу від $t = a$ до $t = b$, дорівнює визначеному інтегралу від швидкості $v(t)$: $s = \int_a^b v(t)dt.$

$x = a$ і $x = b$ ($a < b$), віссю Ox і графіком функції $y = f(x)$.	
Необхідна умова інтегровності. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$ то вона обмежена на цьому відрізку.	***Достатня умова інтегровності.*** Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ то вона інтегровна на цьому відрізку.
Класи інтегровних функцій. Якщо функція $f(x)$ обмежена і монотонна на відрізку $[a, b]$, то вона інтегровна на цьому відрізку.	***Класи інтегровних функцій.*** Якщо функція $f(x)$ обмежена на відрізку $[a, b]$ і неперервна на ньому скрізь, крім скінченної кількості точок розриву, то вона інтегровна на цьому відрізку.
Основні властивості визначеного інтеграла	
1) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt$ (незалежність від змінної інтегрування)	
2) $\int_a^a f(x)dx = 0$	3) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
4) $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$ (лінійність)	
5) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, $a < c < b$ (адитивність)	
6) Якщо $f(x) \geq 0, x \in [a, b], a < b,$ то $\int_a^b f(x)dx \geq 0.$	
7) Якщо $f(x) \leq g(x), x \in [a, b], a < b,$ то $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$	
8) Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a, b](a < b),$ то $$\left\|\int_a^b f(x)dx\right\| \leq \int_a^b \|f(x)\|dx.$$	
9) Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a, b](a < b)$ і $m \leq f(x) \leq M,$ то $$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$	
10) **Теорема про середнє значення функції.** Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то існує така точка $c \in (a, b)$, що $$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$	

<table>
<tr><td colspan="2">Обчислення визначеного інтеграла</td></tr>
<tr><td colspan="2">Формула Ньютона-Лейбніца. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і функція $F(x)$ є первісною для функції $f(x)$ на $[a,b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a).$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо функції $u(x)$ та $v(x)$ неперервно диференційовні на відрізку $[a,b]$, то справедлива формула інтегрування частинами у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$ і $x = \varphi(t)$ – неперервно диференційовна функція на $[\alpha,\beta]$, де $a = \varphi(\alpha), b = \varphi(\beta)$, причому $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на $[\alpha,\beta]$, то справедлива формула заміни змінної у визначеному інтегралі: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.</td></tr>
<tr><td>Якщо парна функція $f(x)$ інтегровна на $[-a,a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx.$$</td><td>Якщо непарна функція $f(x)$ інтегровна на $[-a,a]$, то

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0.$$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Інтеграл від T-періодичної функції: $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx, \forall a \in R$.</td></tr>
<tr><td colspan="2">3. Невласні інтеграли</td></tr>
<tr><td>Невласний інтеграл 1-го роду (з нескінченною межею інтегрування)</td><td>Невласний інтеграл 2-го роду
(інтеграл від необмеженої функції)</td></tr>
<tr><td>Нехай функція $y = f(x)$ задана на $[a,+\infty)$ та інтегровна на $[a;\ A], a < A < +\infty$. Якщо існує скінченна границя визначеного інтеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)dx,$$

то її називають невласним інтегралом першого роду.</td><td>Нехай функція $y = f(x)$ визначена на $[a,b), x = b$ – точка неск.розриву (особлива точка $\lim_{x\to b} f(x) = \infty$). Якщо існує скінченна границя визначеного інтеграла

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to b-0}\int_a^\varepsilon f(x)dx$$

$$\left(\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx\right),$$</td></tr>
</table>

	то її називають *невласним інтегралом другого роду*.
Аналогічно, $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{A\to-\infty} \int_{A}^{b} f(x)dx.$	Аналогічно, $\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to a+0} \int_{\varepsilon}^{b} f(x)dx$ $\left(\int_{a}^{b} f(x)dx = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right),$ $x = a$ – точка неск.розриву (*особлива точка* $\lim\limits_{x\to b} f(x) = \infty$).
За означенням: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$ $= \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{a}^{c} f(x)dx$	За означенням: $\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx,$ $c \in (a,b), \lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty.$
Якщо існує скінчена границя , то інтеграл *збігається*, якщо ж ні, то – інтеграл *розбігається*.	
$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{\alpha}}dx - \begin{cases} \text{збігається}, \alpha > 1, \\ \text{розбігається}, \alpha \le 1. \end{cases}$	$\int_{a}^{b} \frac{1}{(x-a)^{\alpha}}dx - \begin{cases} \text{збігається}, \alpha < 1, \\ \text{розбігається}, \alpha \ge 1. \end{cases}$
Перша ознака порівняння. Якщо на проміжку $[\,a;\,\infty)$ функції $f\,(x)$ та $g(x)$ неперервні і $0 \le f(x) \le g(x)$, то зі збіжності $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ випливає збіжність $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$, а з розбіжності $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$.	***Перша ознака порівняння***. Якщо на $(a;b]$ функції $f\,(x)$ та $g(x)$ неперервні, мають нескінченний розрив у точці $x = a$ і $0 \le f(x) \le g(x)$, то зі збіжності $\int_{a}^{b} g(x)dx$ випливає збіжність $\int_{a}^{b} f(x)dx$, а з розбіжності $\int_{a}^{b} f(x)dx$ випливає розбіжність $\int_{a}^{b} g(x)dx$.
***Друга ознака порівняння* (гранична).** Якщо на проміжку $[\,a;\,\infty)$ функції $f\,(x)$ та $g(x)$ додатні і неперервні, існує скінченна $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, то обидва інтеграли $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ і $\int_{a}^{\infty} g(x)dx$ збіжні або розбіжні одночасно.	***Друга ознака порівняння* (гранична).** Якщо на проміжку $(a;b]$ функції $f\,(x)$ та $g(x)$ додатні і неперервні, $x = a$ – точка розриву та існує скінченна $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A > 0$, то обидва інтеграли $\int_{a}^{b} f(x)dx$ і $\int_{a}^{b} g(x)dx$ збіжні або розбіжні одночасно.

Наслідок. Якщо на $[a; \infty)$ функції $f(x) > 0$ та $g(x) > 0$ неперервні, а для деякого числа $c > 0$: $f(x) \sim c \cdot g(x), x \to \infty$, то обидва інтеграли $\int_a^\infty f(x)dx$ і $\int_a^\infty g(x)dx$ збіжні або розбіжні одночасно.	***Наслідок.*** Якщо на $(a; b]$ функції $f(x) > 0$ та $g(x) > 0$ неперервні, $x = a$ – точка розриву, а для деякого числа $c > 0$: $f(x) \sim c \cdot g(x), x \to a$, то обидва інтеграли $\int_a^\infty f(x)dx$ і $\int_a^\infty g(x)dx$ збіжні або розбіжні одночасно.
Невласні інтеграли від знакозмінних функцій. Абсолютна збіжність	
Невласний інтеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ називається *абсолютно збіжним*, якщо збігається інтеграл $\int_a^\infty \lvert f(x)\rvert dx$. Абсолютно збіжний інтеграл збігається. Збіжний невласний інтеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ називається *умовно збіжним*, якщо розбігається інтеграл $\int_a^\infty \lvert f(x)\rvert dx$.	
Для невласних інтегралів від необмежених функцій так само можна ввести поняття абсолютної збіжності. Для інтегралів від знакозмінних необмежених функцій справедливі відповідні властивості і ознаки збіжності.	
4. Застосування визначеного інтеграла	
Геометричні застосування визначеного інтеграла	
1) *Декартова система координат.* ***Площу фігури***, обмеженої кривою $y = f(x) \geq 0$, прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, $y = 0$ – віссю *Ox*, знаходять за формулою:	$$S = \int_a^b f(x)dx.$$
Якщо фігура обмежена кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ $(f_2(x) \geq f_1(x))$, прямими $x = a$ і $x = b$, то формула обчислення площі має вигляд:	$$S = \int_a^b \big(f_2(x) - f_1(x)\big)dx.$$
2) *Полярна система координат.* ***Площу криволінійного сектора***, обмеженого кривою, заданою у полярних координатах рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$ і двома променями $\varphi = \alpha, \varphi = \beta$ $(\alpha < \beta)$, обчислюється за формулою:	$$S = \frac{1}{2}\int_a^b \rho^2(\varphi)d\varphi.$$
3) Якщо крива $y = y(x), x \in [a, b]$ задана *параметричними рівняннями* $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta$, причому $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$, то ***площа криволінійної трапеції***, обмеженої цією	$$S = \int_\alpha^\beta y(t)x'(t)dt,$$ де α і β визначаються з рівнянь $x(\alpha) = a, x(\beta) = b$ $(y(t) \geq 0$ при $\alpha \leq t \leq \beta)$.

кривою, прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, віссю *Ox*, знаходять за формулою:	
1) Якщо криву задано *у прямокутних координатах* рівнянням $y = f(x),\ a \le x \le b$, то ***довжину дуги*** цієї кривої обчислюють за формулою:	$$l = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$
2) Якщо криву задано *у полярних координатах* рівнянням $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta,$ то ***довжину дуги*** цієї кривої обчислюють за формулою:	$$l = \int\limits_\beta^\alpha \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}d\varphi.$$
3) Якщо криву задано *у параметричній формі* рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta,$ то ***довжину дуги*** цієї кривої обчислюють за формулою:	$$l = \int\limits_\beta^\alpha \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2}dt.$$
Об'єм тіла за відомими площами *перерізів* $S(x),\ x \in [a, b]$, перпендикулярних до осі *Ox*, обчислюють за формулою: $V = \int_a^b S(x)dx$.	
Об'єм тіла, утвореного *обертанням* криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, навколо осі *Ox*, обчислюють за формулою: $V_x = \pi \int_a^b y^2(x)dx$.	
Об'єм тіла, утвореного *обертанням* криволінійної трапеції, обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$ і $x = b$ $(a < b)$, навколо осі *Oy,* обчислюють за формулою: $V_y = 2\pi \int_a^b xy(x)dx$.	
Якщо фігура, обмежена кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ $(f_2(x) \ge f_1(x))$, прямими $x = a$ і $x = b$, обертається навколо осі *Ox*, то ***об'єм тіла обертання*** $$V_x = \pi \int\limits_a^b \left(f_2^2(x) - f_1^2(x)\right)dx.$$	
Площа поверхні обертання, утвореної обертанням кривої, заданої у *прямокутних координатах* неперервною функцією $y = f(x) \ge 0,\ a \le x \le b$, навколо осі *Ox*, обчислюють за формулою: $S_{\text{пов}} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$.	
Для кривої, *у полярних координатах* рівнянням $\rho = \rho(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta,$ ***площа поверхні обертання*** навколо полярної осі знаходиться за формулою:	

$$S_{\text{пов}} = 2\pi \int_a^b \rho \sin\varphi \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi.$$
Для кривої, заданої *параметрично* рівняннями $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta,$ ***площа поверхні обертання*** навколо осі *Ох* знаходиться за формулою: $$S_{\text{пов}} = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2} dt.$$
Деякі фізичні застосування визначеного інтеграла
Маса неоднорідного стержня, розташованого на $[a, b]$, якщо лінійна густина стержня дорівнює $\rho(x)$, обчислюється за формулою: $m = \int_a^b \rho(x) dx$.
Статичні моменти M_x, M_y та моменти інерції I_x, I_y однорідної ***плоскої кривої*** $y = f(x)$, обчислюється за формулою: 1) відносно осі *Ох:* $M_x = \int_a^b y\sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$; $I_x = \int_a^b y^2 \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$; 2) відносно осі *Оу:* $M_y = \int_a^b x\sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$; $I_y = \int_a^b x^2 \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$.
Статичні моменти та моменти інерції однорідної ***криволінійної трапеції***, обмеженої кривою $y = f(x)$, прямими $x = a$ і $x = b$, обчислюється за формулою: 1) відносно осі *Ох:* $M_x = \frac{1}{2} \int_a^b y^2 dx$; $I_x = \frac{1}{3} \int_a^b y^3 dx$; 2) відносно осі *Оу:* $M_y = \int_a^b xy dx$; $I_y = \int_a^b x^2 y dx$.
Координати центра ваги: *1*) плоскої кривої $y = f(x)$ $(a \le x \le b)$: $x_c = \frac{M_y}{l}, y_c = \frac{M_x}{l}$, де l – довжина кривої; *2*) криволінійної трапеції: $x_c = \frac{M_y}{S}, y_c = \frac{M_x}{S}$, де S – площа фігури.

Тема 1. ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ТАБЛИЦІ ОСНОВНИХ ІНТЕГРАЛІВ ТА ВЛАСТИВОСТЕЙ

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Первісна і невизначений інтеграл.
2. Властивості невизначеного інтеграла.
3. Табличні інтеграли.
4. Безпосереднє інтегрування. Метод внесення під знак диференціала.

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. Знайдіть інтеграли, використовуючи метод безпосереднього інтегрування:

1) $\int (x^2+1)^2\,dx$; 2) $\int \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{d}{x^3}\right)dx$;

3) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$.

Розв'язання. 1) $\int (x^2+1)^2dx = \int (x^4+2x^2+1)dx = \int x^4dx +$

$+2\int x^2dx + \int dx = \frac{x^5}{5} + 2\frac{x^3}{3} + x + C.$

2) $\int \left(\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{d}{x^3}\right)dx = a\int\frac{dx}{x} + b\int\frac{dx}{x^2} + d\int\frac{dx}{x^3} = a\ln|x| - \frac{b}{x} - \frac{d}{2x^2} + C.$

3) $\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx = \int x^{\frac{3}{4}}dx - \int \frac{x^{\frac{3}{4}}}{x^2}dx = \frac{4x^{\frac{7}{4}}}{7} + 4x^{-\frac{1}{4}} + C.$

4) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^4-1}}dx = \int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} - \int\frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| -$

$-\ln\left|x+\sqrt{x^2+1}\right| + \mathrm{C}$.

2. Знайдіть інтеграли внесенням під знак диференціала:

1) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$; 2) $\int \frac{dx}{5x+4}$;

3) $\int e^{x/7}\,dx$; 4) $\int \cos(2x+1)\,dx$;

5) $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx$; 6) $\int \mathrm{tg}\,x\,dx$.

Розв'язання. 1) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx = 2\int \frac{2^x dx}{(5\cdot 2)^x} - \frac{1}{5}\int \frac{5^x}{(5\cdot 2)^x}dx = 2\int \frac{dx}{5^x} - \frac{1}{5}\int \frac{dx}{2^x} =$

$= -2\int 5^{-x}d(-x) + \frac{1}{5}\int 2^{-x}d(-x) = -2\frac{5^{-x}}{\ln 5} + \frac{1}{5}\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C.$

2) $\int \frac{dx}{5x+4} = |d(5x+4) = 5dx| = \frac{1}{5}\int \frac{d(5x+4)}{5x+4} = \frac{1}{5}\ln|5x+4| + C.$

3) $\int e^{x/7}\,dx = 7\int e^{\frac{x}{7}}\,d\left(\frac{x}{7}\right) = 7e^{\frac{x}{7}} + C.$

4) $\int \cos(2x+1)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(2x+1)\,d(2x+1) = \frac{1}{2}\sin(2x+1) + C.$

5) $\int \sqrt[3]{1-3x}\,dx = \left|d(1-3x) = -\frac{1}{3}d(1-3x)\right| =$

$= -\frac{1}{3}\int (1-3x)^{\frac{1}{3}}\,d(1-3x) = -\frac{1}{3}\frac{(1-3x)^{\frac{4}{3}}\cdot 3}{4} + C = -\frac{1}{4}(1-3x)^{\frac{4}{3}} + C.$

6) $\int \mathrm{tg}\,x\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = |d\cos x = -\sin x\,dx| = -\int \frac{d\cos x}{\cos x} =$

$-\ln|\cos x| + C.$

3. Знайдіть інтеграли безпосереднім інтегруванням та внесенням під знак диференціала:

1) $\int \mathrm{ctg}^2\,x dx$; 2) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}}$;

5) $\int \frac{dx}{sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}$; 6) $\int \frac{dx}{\sin x}$;

7) $\int \frac{x^3 dx}{x^8-2}$; 8) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}}$;

9) $\int \sin^2 x\,dx$; 10) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx$;

11) $\int \mathrm{tg}^3 x dx$; 12) $\int \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,x\,dx$.

Розв'язання. 1) $\int \mathrm{ctg}^2 x\,dx = \int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx =$
$= -\mathrm{ctg}\,x - x + C.$

2) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(2x+1)^2+4} = \frac{1}{4} arctg \frac{2x+1}{2} + C.$

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-(3x-1)^2+9}} = \frac{1}{3}\int \frac{d\left(\frac{3x-1}{3}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{3x-1}{3}\right)^2}} = \frac{1}{3} arcsin\left(\frac{3x-1}{3}\right) + C.$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{2+(\sqrt{3}x)^2}} = \ln\left|\sqrt{3}x + \sqrt{2+3x^2}\right| + C.$

5) $\int \frac{dx}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = \frac{1}{2}\int \frac{d\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin^2\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)} = -\frac{1}{2}\mathrm{ctg}(2x+\frac{\pi}{4}) + C.$

6) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin^2\frac{x}{2}+cos^2\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}dx = \int \frac{\sin\frac{x}{2}}{2\cos\frac{x}{2}}dx + \int \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx = -\frac{2}{2}\int \frac{d\cos\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} - \frac{2}{2}\int \frac{d\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$
$= -\ln\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \ln\left|\sin\frac{x}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\right| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

7) $\int \frac{x^3dx}{x^8-2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx^4}{(x^4)^2-(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{4}\,\frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x^4-\sqrt{2}}{x^4+\sqrt{2}}\right| + C.$

8) $\int \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \int \frac{de^x}{e^{2x}+1} = \mathrm{arctg}\,e^x + C.$

9) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}x +$
$+\frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\cos 2x\,d(2x) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + C.$

10) $\int \frac{x^2-1}{x^4+1}dx = \int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}dx = \int \frac{d\left(x+\frac{1}{x}\right)}{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C.$

11) $\int \mathrm{tg}^3 x dx = \int \mathrm{tg}\,x\cdot\mathrm{tg}^2 x dx = \int \mathrm{tg}\,x\left(\frac{1}{cos^2 x} - 1\right)dx = \int \mathrm{tg}\,x\frac{1}{cos^2 x}dx -$
$-\int \mathrm{tg}\,x\,dx = \int \mathrm{tg}\,x\,d\,\mathrm{tg}\,x - \int \mathrm{tg}\,x\,dx = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} - \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \int \frac{d\ \cos x}{\cos x}$
$= \frac{\mathrm{tg}^2 x}{2} + \ln|\cos x| + C.$

12) $\int \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x\, dx = \int \operatorname{sh} 2x\, dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sh} 2x\, d(2x) = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 2x + C.$

Індивідуальне завдання №1. Знаходження невизначених інтегралів за допомогою таблиць інтегралів та властивостей

1.1. *Знайти невизначений інтеграл безпосереднім зведенням до табличного.*

1. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2 dx$;

2. $\int 2^x \cdot 5^{2x} dx$;

3. $\int 2(\sin x + 3)dx$;

4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$;

5. $\int (2^{x+1} - 5^{x-1})dx$;

6. $\int \frac{1-\sqrt{4+x^2}}{4+x^2} dx$;

7. $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}dx$;

8. $\int (3 - x^2)^3 d\,x$;

9. $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx$;

10. $\int \frac{dx}{2+3x^2}$;

11. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$;

12. $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

13. $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^2 dx$;

14. $\int e^x(3 - e^{-x})dx$;

15. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1} dx$;

16. $\int (3 \cdot 2^x + 2 \cdot 3^x)dx$;

17. $\int \frac{x^2-x+1}{\sqrt{x}} dx$;

18. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x + 5}$;

19. $\int \frac{32^x}{4^x} dx$;

20. $\int \frac{dx}{9-8x^2}$;

21. $\int \frac{(1-x)^3}{\sqrt[3]{x}} dx$;

22. $\int \frac{2-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

23. $\int \frac{x-9}{\sqrt{x}+3} dx$;

24. $\int 3^x \cdot e^{3x} dx$;

25. $\int \frac{\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3-x^2}}{\sqrt{9-x^4}}dx$;

26) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}dx$;

27. $\int e^{2x} \cdot 2^x dx$;

28. $\int \frac{8x^2-2}{2x-1}dx$;

29. $\int \frac{(1+x)^2}{\sqrt{x}}dx$;

30. $\int \frac{\sqrt{x}+x^2e^x+x}{x^2}dx$.

1.2. *Знайти невизначений інтеграл внесенням функції під знак диференціала.*

1. $\int e^{5x+1}dx$;

2. $\int e^{\sin x}\cos x dx$;

3. $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$;

4. $\int \frac{arctg^3 x}{1+x^2}dx$;

5. $\int \sin^4 x \cos x dx$;

6. $\int \sqrt[3]{(5x+2)^5}dx$;

7. $\int x^4\sqrt{3x^5+4}dx$;

8. $\int \frac{xdx}{4x^2-9}$;

9. $\int \sqrt{3-4x}dx$;

10. $\int \frac{3\cdot 2^x-2\cdot 3^x}{6^x}dx$;

11. $\int \frac{x^3}{x^4+2}dx$;

12. $\int \frac{dx}{x\ln^3 x}$;

13. $\int \frac{e^x}{e^x+1}dx$;

14. $\int \frac{dx}{x\ln(5x)}$;

15. $\int \sin(5x-2)dx$;

16. $\int \frac{dx}{2x+3}$;

17. $\int \frac{5x}{\sqrt{5x^2+1}}dx$;

18. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;

19. $\int x7^{x^2}dx$;

20. $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

21. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^6+4}}dx$;

22. $\int \frac{(tg\, x+1)^2}{\cos^2 x}dx$;

23. $\int \frac{x}{9x^2+4}dx$;

24. $\int \frac{3^x}{4+9^x}dx$;

25. $\int \frac{x^3}{\sqrt{4-x^8}} dx$;

26) $\int 7^{1/x} \frac{1}{x^2} dx$;

27. $\int e^x \cdot \sin e^x \, dx$;

28. $\int (4 + 3x^2)^{15} x dx$;

29. $\int \frac{\sqrt{ctg\, x}}{\sin^2 x} dx$;

30. $\int \frac{x^4}{x^{10}+4} dx$.

1.3. *За допомогою виділення повного квадрату знайти інтеграли.*

1. а) $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$;

2. а) $\int \frac{dx}{4x^2-6x+8}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

3. а) $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$;

4. а) $\int \frac{dx}{x^2-5x+5}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{6-6x-9x^2}}$;

5. а) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-x^2}}$;

6. а) $\int \frac{dx}{x^2-2x-3}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x+9x^2}}$;

7. а) $\int \frac{dx}{4x^2-4x+5}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{6-x-x^2}}$;

8. а) $\int \frac{dx}{1+4x^2-12x}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$;

9. а) $\int \frac{dx}{2x^2+2x+3}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$;

10. а) $\int \frac{dx}{5-12x-9x^2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$;

11. а) $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1+x)}}$;

12. а) $\int \frac{dx}{4x^2+4x+5}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$;

13. а) $\int \frac{dx}{x^2+4x+7}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+3x-x^2}}$;

14. а) $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}$;

15. а) $\int \frac{dx}{x^2-7x+12}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7x+10}}$;

16. а) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2+2x+3}}$;

17. а) $\int \frac{dx}{6-x-x^2}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x-3}}$;

18. а) $\int \frac{dx}{8+6x-x^2}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{1+4x^2-12x}}$;

19. а) $\int \frac{dx}{5-2x+x^2}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+5}}$;

20. а) $\int \frac{dx}{6-x-x^2}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x-10}}$;

21. а) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+7}}$;

22. а) $\int \frac{dx}{2x^2+x-1}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{-2+4x+4x^2}}$;

23. а) $\int \frac{dx}{x^2-5x-6}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{-9x^2+6x+2}}$;

24. а) $\int \frac{dx}{x^2+3x+4}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-4x+6}}$;

25. а) $\int \frac{4dx}{x^2+5x-6}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{15+8x+x^2}}$;

26. а) $\int \frac{3dx}{x^2+4x+8}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{6x-x^2-8}}$;

27. а) $\int \frac{dx}{x^2-2x+5}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+12x+10}}$;

28. а) $\int \frac{4dx}{x^2+x-2}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-4x-x^2}}$;

29. а) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$;   б) $\int \frac{2dx}{\sqrt{x^2+2x+10}}$;

30. а) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;   б) $\int \frac{dx}{\sqrt{8-4x-x^2}}$.

Тема 2. ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ДОПОМОГОЮ ПІДСТАНОВКИ. ІНТЕГРУВАННЯ ЧАСТИНАМИ.

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Заміна змінної у невизначеному інтегралі.
2. Інтегрування частинами у невизначеному інтегралі.

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. За допомогою відповідних підстановок знайдіть інтеграли:

1) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}dx$; 2) $\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 3) $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx$;

4) $\int \frac{\sin x\cos^3 x}{1+\cos^2 x}dx$; 5) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\frac{dx}{1+x}$.

Розв'язання. 1) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}dx = \begin{vmatrix} 1+2\cos x = t \\ -2\sin x dx = dt \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -\frac{1}{2}\,2\,t^{\frac{1}{2}} +$ $+C = C - \sqrt{t} = C - \sqrt{1+2\cos x}.$

2) $$\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{vmatrix} \sqrt{1-x^2} = t \\ 1-x^2 = t^2 \\ x = \sqrt{1-t^2} \\ dx = \frac{-2tdt}{2\sqrt{1-t^2}} \end{vmatrix} = -\int \frac{(1-t^2)^{\frac{5}{2}}\ 2tdt}{2t(1-t^2)^{\frac{1}{2}}} = -\int (1-t^2)^2\,dt =$$

$$= -\int (1-2t^2+t^4)dt = -t + 2\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \sqrt{1-x^2}\Big(-1 + \frac{2}{3}(1-x^2) -$$

$$-\frac{1}{5}(1-x^2)^2\Big) + C.$$

3) $$\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}\,dx = \begin{vmatrix} \sin x = t \\ \cos x\,dx = dt \end{vmatrix} = \int (1-t^2)^2 t^{\frac{1}{2}}dt = \int (1-2t^2 +$$

$$+t^4)t^{\frac{1}{2}}dt = \int \left(t^{\frac{1}{2}} + t^{\frac{9}{2}} - 2t^{\frac{5}{2}}\right)dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}} + \frac{2}{11}t^{\frac{11}{2}} + C = \frac{2}{3}\sin^{\frac{3}{2}} x -$$

$$-\frac{2}{7}\sin^{\frac{7}{2}} x + \frac{2}{11}\sin^{\frac{11}{2}} x + C.$$

4) $\int \frac{\sin x \cos^3 x}{1+\cos^2 x} dx = \left| \begin{matrix} 1+\cos^2 x = t \\ 2\cos x \sin x \, dx = -dt \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}\int \frac{t-1}{t} dt = \frac{1}{2}\int \frac{1-t}{t} dt =$

$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} - \frac{1}{2}\int dt = \frac{1}{2} ln|t| - \frac{1}{2} t + C = \frac{1}{2}\ln(1+\cos^2 x) - \frac{1}{2}\cos^2 x + C.$

5) $\int \frac{\mathrm{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \frac{dx}{1+x} = \left| \begin{matrix} \sqrt{x} = t \\ x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{\mathrm{arctg}\, t}{t} \frac{2tdt}{1+t^2} = \left| \frac{dt}{1+t^2} = d(\mathrm{arctg}\, t) \right| =$

$= 2\int \mathrm{arctg}\, t \, d(\mathrm{arctg}\, t) = \mathrm{arctg}^2 t + C = (\mathrm{arctg}\sqrt{x})^2 + C.$

2. За допомогою тригонометричних або гіперболічних підстановок знайдіть інтеграли :

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$; 2) $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$;

3) $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx$; 4) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}$.

Розв'язання. 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t dt \\ t = \arcsin x \end{matrix} \right| = \int \frac{\cos t dt}{\sqrt{(1-\sin^2 t)^3}} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} =$

$= \int \frac{dt}{\cos^2 t} = \mathrm{tg}\, t + C = \mathrm{tg}\, \arcsin x + C.$

2) $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left| \begin{matrix} x = a\sin t \\ dx = a\cos t dt \\ t = arc \sin \frac{x}{a} \end{matrix} \right| = \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin t}\, a \cos t dt =$

$= a^2 \int \sqrt{cos^2 t} \cos t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{a^2}{2}(t + \frac{1}{2}\sin 2t) + C.$

Оскільки $\sin t = \frac{x}{a}$, $\cos t = \sqrt{1 - sin^2 t} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}$, то

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C = \frac{a^2}{2} arc \sin \frac{x}{a} +$$

$$+ \frac{a^2}{2} \frac{x}{a} \sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}} + C = \frac{a^2}{2} arc \sin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

3) $\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \left| \begin{matrix} x = a\, \mathrm{sh} t \\ dx = a\, \mathrm{ch} t dt \end{matrix} \right| = \int \sqrt{a^2 + a^2 \mathrm{sh}^2 t}\, a\, \mathrm{ch} t\, dt =$

$$= \int a^2 \text{ch}^2 t dt = \frac{a^2}{2} \int (1 + \text{ch}2t) dt = \frac{a^2}{2} t + \frac{a^2}{4} \text{sh}2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} 2\text{sh}t\text{ch}t \right) + C.$$

Оскільки, $\text{ch}t = \sqrt{1 + \text{sh}^2 t} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{a^2+x^2}{a^2}}$,

$$e^t = \text{ch}t + \text{sh}t = \sqrt{\frac{a^2+x^2}{a^2}} + \frac{x}{a} \Longrightarrow t = \ln\left(\frac{x+\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right) \text{, то}$$

$$\int \sqrt{a^2 + x^2} dx = \frac{a^2}{2} \ln\left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right) + \frac{x}{a} \ln\left(\frac{x + \sqrt{a^2 + x^2}}{a}\right) + C.$$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}} = \begin{vmatrix} x = a\, tgt \\ dx = \frac{adt}{cos^2 t} \\ t = \text{arctg}\frac{x}{a} \end{vmatrix} = \int \frac{adt}{\sqrt{(a^2 tg^2 t + a^2)^3 cos^2 t}} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\left(\frac{1}{cos^2 t}\right)^{\frac{3}{2}} cos^2 t} =$

$= \frac{1}{a^2} \int \cos t dt = \frac{1}{a^2} \sin t + C = \frac{1}{a^2} \sin\left(\text{arctg}\frac{x}{a}\right) + C.$

3. За допомогою інтегрування частинами знайдіть інтеграли:

1) $\int x^3 \ln x\, dx$; 2) $\int e^{2x}(3x - 1)dx$; 3) $\int (x^2 - x + 1) \sin x\, dx$;

4) $\int \sqrt{x^2 + a^2} dx$; 5) $\int e^x \cos x\, dx$; 6) $\int \arcsin x\, dx$.

Розв'язання. 1) $\int x^3 \ln x\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & x^3 dx = dv \\ du = d\ln x = \frac{1}{x} dx & v = \int dv = \frac{x^4}{4} \end{vmatrix} =$

$$= uv - \int vdu = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \frac{x^4}{4} + C = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{x^4}{16} + C.$$

2) $\int e^{2x}(3x - 1)dx = \begin{vmatrix} u = 3x - 1 & e^{2x} dx = dv \\ du = 3dx & v = \frac{1}{2} e^{2x} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} e^{2x}(3x - 1) -$

$$-\frac{3}{2} \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}(3x - 1) - \frac{3}{4} e^{2x} + \text{C}.$$

3) $\int (x^2 - x + 1) \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x^2 - x + 1 & \sin x dx = dv \\ du = (2x - 1)dx & v = -\cos x \end{vmatrix} =$

$$= -(x^2 - x + 1)\cos x + \int (2x-1)\cos x dx = \begin{vmatrix} 2x - 1 = u & cosxdx = dv \\ du = 2dx & v = sinx \end{vmatrix} =$$

$$= (x - x^2 - 1)\cos x + (2x-1)\sin x - 2\int \sin x dx = (x - x^2 - 1)\cos x +$$

$$+(2x-1)\sin x + 2\cos x + C.$$

4) $I = \int \sqrt{x^2 + a^2}dx = \begin{vmatrix} u = \sqrt{x^2 + a^2} & dv = dx \\ du = \frac{2xdx}{2\sqrt{x^2+a^2}} & v = x \end{vmatrix} = x\sqrt{x^2 + a^2} -$

$$-\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \frac{x^2 + a^2 - a^2}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = x\sqrt{x^2 + a^2} - \int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$$

$$+a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = x\sqrt{x^2 + a^2} - I + a^2 \ln\left|\mathrm{x} + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C.$$

Запишемо отримане рівняння для знаходження інтеграла, позначеного I:

$$2I = x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C,$$

тоді

$$I = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + C).$$

5) $I = \int e^x \cos x\, dx = \begin{vmatrix} u = e^x & \cos x dx = dv \\ du = e^x dx & v = \sin x \end{vmatrix} = e^x \sin x -$

$$-\int \sin x\, e^x dx = \begin{vmatrix} u = e^x & \sin \mathrm{x}\, dx = dv \\ du = e^x dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = e^x \sin x + e^x \cos x -$$

$$-\int e^x \cos x dx.$$

Із отриманого рівняння, знайдемо тепер шуканий інтеграл I:

$$2I = e^x \sin x + e^x \cos x + C,$$

тоді $I = \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x + C_1)$.

6) $\int \arcsin x\, dx = \begin{vmatrix} u = \arcsin x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} & v = x \end{vmatrix} = x \cdot \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1 - x^2}}$

$$= |d(1 - x^2) = -2xdx| = x \cdot \arcsin x - \left(-\frac{1}{2}\right)\int \frac{d(1 - x^2)}{\sqrt{1 - x^2}} = x \cdot \arcsin x +$$

$$+\frac{1}{2}\int (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} d(1 - x^2) = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1 - x^2} + C.$$

Індивідуальне завдання №2. Інтегрування підстановкою та частинами

2.1. *Знайти інтеграл за допомогою заміни змінних (підстановки).*

1. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$;

2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$;

3. $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$;

4. $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$;

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$;

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}+3}$;

8. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

9. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$;

10. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

11. $\int \frac{dx}{x\sqrt{9+x^2}}$;

12. $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2-x}}$;

13. $\int \frac{x^2}{\sqrt{81-x^2}}\, dx$;

14. $\int \sqrt{e^x+1}dx$;

15. $\int \frac{dx}{(2+x)\sqrt{1+x}}$;

16. $\int \frac{\sqrt{4+x^2}}{x^4}dx$;

17. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$;

18. $\int \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}}$;

19. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9+x^2}}$;

20. $\int \sin\sqrt[3]{x}dx$;

21. $\int \sqrt{100-x^2}dx$;

22. $\int \frac{dx}{\sqrt{(100+x^2)^3}}$;

23. $\int \frac{x^2}{\sqrt{256-x^2}}dx$;

24. $\int \sqrt{e^{2x}-3}dx$;

25. $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}$;

26) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}$;

27. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$;

28. $\int \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2}\, dx$;

29. $\int \sqrt{e^{3x}+1}dx$;

30. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

2.2. *Знайти інтеграл за допомогою інтегрування частинами.*

1. $\int x^2 e^{-3x}\, dx$;

2. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\, dx$;

3. $\int \ln(x-5)\, dx$;

4. $\int x\cos 8x\, dx$;

5. $\int \operatorname{arctg} 2x\, dx$;

6. $\int e^{-x}\cos 2x dx$;

7. $\int (x+1)e^{-4x} dx$;

8. $\int x^2 4^{-5x} dx$;

9. $\int \operatorname{arctg} 3x\, dx$;

10. $\int e^{-x}\sin 4x dx$;

11. $\int \arcsin 5x\, dx$;

12. $\int x^2 \arccos x\;\, dx$;

13. $\int 2x\; arctg\; x\; dx$

14. $\int \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx$;

15. $\int x\cos(x+4)\, dx$;

16. $\int \ln(1+x^2)\, dx$;

17. $\int x\cos(x-2)\, dx$;

18. $\int e^x \cos^3 x dx$;

19. $\int x\; \cdot e^{x+2}\, dx$;

20. $\int \arcsin 2x\;\, dx$.

21. $\int x^5 e^{x^3}\, dx$;

22. $\int x\cdot\sin^2 x dx$;;

23. $\int x^5 \sin 5x\, dx$;

24. $\int x^2 e^{\sqrt{x}}\, dx$;;

25. $\int \sqrt{x}\ln x\, dx$;

26) $\int \ln^2 x\, dx$;

27. $\int x^3 \ln x\, dx$;

28. $\int e^{3x}\sin 2x\, dx$;

29. $\int arctg\; 3x dx$;

30. $\int x^2 e^{3x}\, dx$.

Тема 3. ІНТЕГРУВАННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Раціональні дроби, правильні раціональні дроби, прості (елементарні) дроби. Розклад правильного раціонального дробу на прості дроби.

2. Інтегрування простих раціональних дробів.

3. Інтегрування раціональних дробів.

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. Знайдіть інтеграли:

1) $\int \frac{2dx}{x-1}$; 2) $\int \frac{3dx}{(x-2)^3}$;

3) $\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx$; 4) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2}$.

Розв'язання. 1) $\int \frac{2dx}{x-1} = 2\ln|x-1| + C$.

2) $\int \frac{3dx}{(x-2)^3} = 3\int (x-2)^{-3}d(x-2) = -3\frac{1}{2(x-2)^2} + C$.

3) $\int \frac{x+5}{x^2+2x+5}dx = \left| \begin{array}{c} d(x^2+2x+5) = (2x+2)dx \\ x+5 = \frac{1}{2}(2x+2)+4 \end{array} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+2)+4}{x^2+2x+5}dx =$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+5)}{x^2+2x+5} + 4\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = |x^2+2x+5 = (x+1)^2+4| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+5| + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+4} = \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + 4\frac{1}{2}\text{arctg}\,\frac{x+1}{2} + C =$$

$= \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+5) + 2\text{arctg}\,\frac{x+1}{2} + C$.

4) $\int \frac{dx}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{9+x^2-x^2}{(x^2+9)^2}dx = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2+9} - \frac{1}{9}\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx = \frac{1}{9}\frac{1}{3}\text{arctg}\,\frac{x}{3} - \frac{1}{9}I$.

Знайдемо I:

$$I = \int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}dx = \left| \begin{array}{cc} u = x & dv = dx \\ dv = \frac{xdx}{(x^2+9)^2} & v = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+9)}{(x^2+9)^2} = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+9} \end{array} \right|$$

$$= -x\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+9} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+9} = -\frac{x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{2}\frac{1}{3}\text{arctg}\,\frac{x}{3} + C.$$

Після підстановки отримуємо:

$$\int \frac{dx}{(x^2+9)^2} = \frac{1}{27}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} - \frac{1}{9}\left(-\frac{x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x}{3}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{54}\operatorname{arctg}\frac{x}{3} + \frac{1}{18}\frac{x}{x^2+9} + C.$$

Означення 1. [4] Раціональним дробом $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається відношення двох многочленів $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ степенів n і m відповідно.

Означення 2. [4] Раціонайльний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ називається *правильним*, якщо степінь чисельника менша ніж степінь знаменника ($n < m$).

Теорема 1. [4] Будь-який правильний раціональний дріб $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ можна єдиним числом розкласти на суму дробів:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{P_n(x)}{(x-a_1)^{k_1} \dots \dots \dots (x-a_l)^{k_l}(x^2+p_1x+q_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (x^2+p_sx+q_s)^{r_s}} =$$

$$= \frac{A_1^{(1)}}{(x-a_1)} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_m^{(1)}}{(x-a)^{k_1}} + \dots + \frac{A_1^{(k)}}{(x-a_k)} + \frac{A_2^{(1)}}{(x-a_k)^2} + \dots +$$

$$+ \frac{B_1^{(1)}x + D_1^{(1)}}{x^2+p_1x+q_1} + \frac{B_2^{(1)}x + D_2^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^2} + \dots + \frac{B_{n_1}^{(1)}x + D_{n_1}^{(1)}}{(x^2+p_1x+q_1)^{n_1}} + \dots.$$

Раціональний дріб $\frac{P_n}{Q_m}$ *,* $n < m$ *єдиним чином можна розкласти в суму елементарних дробів (причому Q розкладається в добуток незвідних взаємно простих множників).*

Схема інтегрування раціональних дробів полягає в наступному:

1. Перевіряємо дріб на правильність чи неправильність (дріб, степінь чисельника якого є меньший за степінь знаменника). Якщо він неправильний, то розкладаємо дріб на суму многочлена і правильного дробу. Якщо дріб правильний переходимо до наступного пункту.

2. Розкладаємо знаменник правильного раціонального дробу на множники і розкладаємо його на суму простих (елементарних) дробів з невизначеними коефіцієнтами (кількість таких коефіцієнтів дорівнює степеню знаменника).

3. Знаходимо невизначені коефіцієнти за допомогою методу частинних значень (викреслювання) або методу невизначених коефіцієнтів.

4. Інтегруємо кожен із отриманих доданків.

2. Розкладіть правильні дроби на елементарні:

1) $\frac{P(x)}{(x^3+1)^2}$; 2) $\frac{P(x)}{x^2(x+1)^2(x^2+\pi x+e)^9}$.

Розв'язання. 1) $\frac{P(x)}{(x^3+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2-x+1} + \frac{Ex+F}{(x^2-x+1)^2}$, оскільки

$$x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1).$$

2) $\frac{P(x)}{x^2(x+1)^2(x^2+\pi x+e)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+\pi x+e} + \frac{Gx+H}{(x^2+\pi x+e)^2} +$ $\frac{Ix+J}{(x^2+\pi x+e)^3}$, оскільки $D = \pi^2 - 4e < 0$.

3. Знайдіть інтеграли:

1) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$; 2) $\int \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} dx$; 3) $\int \frac{x^5 dx}{x^3-1}$;

4) $\int \frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} dx$; 5) $\int \frac{x^4 dx}{x^4+5x^2+4}$.

Розв'язання. 1) Маємо підінтегральну функцію $\frac{P_1(x)}{Q_3(x)} = \frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$ – це правильний дріб (степінь чисельника $n = 1 < 3 = m$ степінь знаменника), тоді згідно з теоремою 1

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}.$$

Невизначені коефіцієнти A, B, C знаходимо методом частинних значень (викреслювання):

$$\mathrm{A} = \left.\frac{x}{\cancel{(x+1)}(x+2)(x+3)}\right|_{x=-1} = \frac{-1}{(-1+2)(-1+3)} = -\frac{1}{2};$$

$$B = \left.\frac{x}{(x+1)\cancel{(x+2)}(x+3)}\right|_{x=-2} = 2; \; C = \left.\frac{x}{(x+1)(x+2)\cancel{(x+3)}}\right|_{x=-3} = -\frac{3}{2}.$$

Отже,

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{-\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{2}{x+2} + \frac{-\frac{3}{2}}{x+3},$$

і отримаємо інтеграл

$$\int \frac{xdx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$-\tfrac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \tfrac{3}{2}\ln|x+3| + C.$$

2) Маємо підінтегральну функцію $\frac{P_1(x)}{Q_5(x)} = \frac{3x+1}{x(1+x^2)^2}$ – це правильний дріб ($n = 1 < 5 = m$), тоді згідно з теоремою 1

$$\frac{3x+1}{x(1+x^2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{1+x^2} + \frac{Dx+E}{(1+x^2)^2}.$$

Коефіцієнти над степенями лінійних многочленів знаходимо методом невизначених коефіцієнтів (метод прирівнювання). Для цього зведемо в правій частині дроби до спільного знаменника і прирівняємо тотожньо його чисельник з $Q_5(x)$:

$$3x+1 = A(1+x^2)^2 + (Bx+C)(1+x^2)x + (Dx+E)x,$$

$$3x+1 = A + 2Ax^2 + Ax^4 + Bx^2 + Bx^4 + Cx + Cx^3 + Dx^2 + Ex.$$

Розкривши дужки у правій частині і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо систему рівнянь

$$\begin{array}{c|l} x^4 & 0 = A + B; \\ x^3 & 0 = C; \\ x^2 & 0 = 2A + B + D; \\ x^1 & 3 = C + E; \\ x^0 & 1 = A. \end{array}$$

розв'язками якої є: $A = 1, B = 1, C = 0, E = 3, D = -1$. Таким чином,

$$\int \frac{(3x+1)dx}{x(1+x^2)^2} = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{-x}{1+x^2} + \frac{-x+3}{(1+x^2)^2}\right) dx = \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x\,dx}{1+x^2} +$$

$$+\int \frac{(3-x)dx}{(1+x^2)^2} = \ln|x| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + 3\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} - \int \frac{x\,dx}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+1)}{(1+x^2)^2} + 3\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} = \begin{vmatrix} x = \operatorname{tg} t \\ dx = \dfrac{dt}{\cos^2 t} \\ t = \operatorname{arctg} x \end{vmatrix} =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2} + 3\int \frac{1}{(1+\mathrm{tg}^2 t)^2}\frac{dt}{\cos^2 t} = \ln|x| -$$

$$-\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \frac{1}{(1+x^2)^2} + 3\int \frac{\cos^4 t\, dt}{\cos^2 t} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2}$$

$$+3\int \cos^2 t\, dt = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2} + 3\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt =$$

$$= \ln|x| - -\frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + \frac{1}{2}\frac{1}{(1+x^2)^2} + \frac{3}{2}\mathrm{arctg}\, x + \frac{3}{4}\sin(2\,\mathrm{arctg}\, x) + C.$$

3) Підінтегральна фінкція $\frac{x^5}{x^3-1}$ є неправильним дробом, оскільки степінь чисельника вищий за степінь знаменника. Тому спочатку виділимо цілу частину дробу: $\frac{x^5}{x^3-1} = x^2 + \frac{x^2}{x^3-1}$. Тоді

$$\int \frac{x^5}{x^3-1}dx = \int\left(x^2 + \frac{x^2}{x^3-1}\right)dx = \int x^2 dx + \int \frac{x^2 dx}{x^3-1} = \frac{x^3}{3} +$$

$$+\frac{1}{3}\int \frac{d(x^3-1)}{x^3-1} = \frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}\ln|x^3-1| + C\,.$$

4) Підінтегральна фінкція $\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1}$ є неправильним дробом, оскільки степінь чисельника вищий за степінь знаменника. Тому спочатку виділимо цілу частину дробу:

$$\frac{x^4+1}{x^3-x^2+x-1} = x + 1 + \frac{2}{x^3-x^2+x-1}.$$

Правильний дріб $\frac{2}{x^3-x^2+x-1}$ розкладаємо на суму елементарних дробів методом невизначених коефіцієнтів.

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x-1)(x^2+1);$$

$$\frac{2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)}.$$

Прирівнюючи чисельники та відповідні коефіцієнти при однакових степенях x, отримаємо

$$2 = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

та систему рівнянь

$$\begin{array}{c|l} x^2 & 0 = A + B; \\ x^1 & 0 = -B + C; \\ x^0 & 2 = A - C. \end{array}$$

Звідси $A = 1, B = -1, C = -1$. Тоді підінтегральна функція має вигляд:

$$\frac{x^4 + 1}{x^3 + x^2 + x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1} - \frac{x - 1}{x^2 + 1}.$$

Переходимо до інтегрування цілої частини і простих дробів:

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^3 + x^2 + x - 1} dx = \int \left((x + 1) + \frac{2}{x^3 + x^2 + x - 1} \right) dx =$$

$$= \int x\, dx + \int dx + \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{(-x + 1)dx}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x - 1| -$$

$$- \int \frac{x\, dx}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{x^2}{2} + x + \ln|x - 1| - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1) + arctg\, x + C.$$

5) Оскільки підітегральна функція є неправильним дробом, зробимо наступні перетворення у інтегралі:

$$\int \frac{x^4 dx}{x^4 + 5x^2 + 4} = \int \frac{(x^4 + 5x^2 + 4) - 5x^2 - 4}{x^4 + 5x^2 + 4} dx = \int dx -$$

$$- \int \frac{(5x^2 + 4)dx}{x^4 + 5x^2 + 4}.$$

Далі, за допомогою отриманого розкладу та заміни, розкладемо правильний дріб на суму елементарних дробів:

$$\frac{5x^2 + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = |x^2 = t| = \frac{5t + 4}{t^2 + 5t + 4} = \frac{5t + 4}{(t + 1)(t + 4)} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t + 4}.$$

Невизначені коефіцієнти A, B знаходимо методом частинних значень:

$$\mathrm{A} = \left. \frac{5t+4}{\cancel{(t+1)}(t+4)} \right|_{t=-1} = -\frac{1}{3}; B = \left. \frac{5t+4}{(t+1)\cancel{(t+4)}} \right|_{t=-4} = \frac{16}{3}.$$

Отже,

$$\frac{5x^2 + 4}{x^4 + 5x^2 + 4} = \frac{A}{t + 1} + \frac{B}{t + 4} = \frac{-\frac{1}{3}}{t + 1} + \frac{\frac{16}{3}}{t + 4} = \frac{-\frac{1}{3}}{x^2 + 1} + \frac{\frac{16}{3}}{x^2 + 4}.$$

Тому маємо

$$\int \frac{x^4dx}{x^4+5x^2+4} = \int dx - \int \left(\frac{-\frac{1}{3}}{x^2+1} + \frac{\frac{16}{3}}{x^2+4} \right) dx =$$

$$= x + \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{16}{3}\int \frac{dx}{x^2+4} = x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{16}{3}\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C =$$

$$= x + \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x - \frac{8}{3}\operatorname{arctg}\frac{x}{2} + C.$$

Індивідуальне завдання №3. Інтегрування раціональних виразів

3.1. *Знайти невизначені інтеграли, використовуючи виділення повного квадрата у знаменнику підінтегрального виразу або заміну.*

1. $\int \frac{x+2}{x^2+6x+10}\, dx;$
2. $\int \frac{3x-1}{x^2+2x+10}\, dx;$
3. $\int \frac{3x+4}{x^2+4x+20}\, dx;$
4. $\int \frac{3x+1}{x^2+7x+25}\, dx;$
5. $\int \frac{2x+1}{x^2+7x+50}\, dx;$
6. $\int \frac{4x+8}{x^2+6x+10}\, dx;$
7. $\int \frac{x}{x^2+2x-8}\, dx;$
8. $\int \frac{x-4}{x^2-2x-3}\, dx;$
9. $\int \frac{x-3}{x^2-5x+4}\, dx;$
10. $\int \frac{2x-1}{x^2-8x+7}\, dx;$
11. $\int \frac{5x-2}{2x^2-5x+2}\, dx;$
12. $\int \frac{5x+1}{x^2-4x+6}\, dx;$
13. $\int \frac{x-4}{3x^2+x}\, dx;$
14. $\int \frac{2x-1}{3x^2-6x+9}\, dx;$
15. $\int \frac{2-x}{x^2+4x-5}\, dx;$
16. $\int \frac{4x-1}{4x^2-4x+5}\, dx;$
17. $\int \frac{x+4}{2x^2-6x-8}\, dx;$
18. $\int \frac{x+5}{x^2+x-2}\, dx;$
19. $\int \frac{3x-2}{5x^2+3x-2}\, dx;$
20. $\int \frac{x}{x^2+2x+5}\, dx;$
21. $\int \frac{x+1}{x^2+4x+10}\, dx;$
22. $\int \frac{2x-1}{3x^2-2x-1}\, dx;$

23. $\int \frac{x+6}{3x^2+2x+1} dx$;

24. $\int \frac{x+1}{x^2+3x+4} dx$;

25. $\int \frac{2x-1}{3+x-2x^2} dx$

26) $\int \frac{x-3}{4x^2+4x+5} dx$;

27. $\int \frac{x-5}{2x^2+x-3} dx$;

28. $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+7} dx$;

29. $\int \frac{3x+1}{x^2-x-6} dx$;

30. $\int \frac{x-7}{4x^2+3x-1} dx$.

3.2. *Шляхом розкладу правильних дробів на елементарні знайти інтеграли.*

1. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2} \ dx$;

2. $\int \frac{x^3+1}{x^2-x} dx$;

3. $\int \frac{3x+13}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$;

4. $\int \frac{x^2-6x+8}{x^3+8} dx$;

5. $\int \frac{12-6x}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$;

6. $\int \frac{2x^2+2x+20}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$;

7. $\int \frac{x^2+3x-6}{(x+1)(x^2+6x+13)} dx$;

8. $\int \frac{x^2+3x+2}{x^3-1} dx$;

9. $\int \frac{36}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$;

10. $\int \frac{9x-9}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$;

11. $\int \frac{7x-10}{x^3+8} dx$;

12. $\int \frac{4x^2+3x+17}{(x-1)(x^2+2x+5)} dx$;

13. $\int \frac{4x+2}{x^4+4x^2} dx$;

14. $\int \frac{4x+2}{x^4+8x} dx$;

15. $\int \frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$;

16. $\int \frac{4x-x^2-12}{x^3+8} dx$;

17. $\int \frac{x^2-13x+40}{(x+1)(x^2-4x+13)} dx$;

18. $\int \frac{3-9x}{x^3-1} dx$;

19. $\int \frac{6-9x}{x^3+8} dx$;

20. $\int \frac{4x-10}{(x+2)(x^2-2x+10)} dx$;

21. $\int \frac{x^3-4x+5}{(x^2-1)(x-1)} dx$

22. $\int \frac{x-17}{(x^2+2x+17)(x+3)} dx$;

23. $\int \frac{2x^2-2x-1}{x^2-x^3}dx;$

24. $\int \frac{x^4-x^3+3x-2}{x^3-x^2-2x}dx;$

25. $\int \frac{x^4-x^3+2x+2}{x^3+x^2-2x}dx$

26) $\int \frac{6x^4-30x^2+30}{(x^2-1)(x+2)}dx;$

27. $\int \frac{2x+22}{(x^2-2x+5)(x-1)}dx;$

28. $\int \frac{1-x^2-x}{x^4-x^3}dx;$

29. $\int \frac{2x^2-5x+1}{x^4-2x^3+2x-1}dx;$

30. $\int \frac{x^3+x+2}{x^4+2x^3}dx.$

Тема 4. ІНТЕГРУВАННЯ ДЕЯКИХ ІРРАЦІОНАЛЬНОСТЕЙ. ПІДСТАНОВКИ ЧЕБИШЕВА ТА ЕЙЛЕРА

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Інтегрування деяких ірраціональностей.
2. Підстановки Чебишова.
3. Підстановки Ейлера.

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. Знайдіть інтеграли, за допомогою відповідної підстановки:

1) $\int \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+4x+19}}dx;$

2) $\int \frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}dx$;

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}};$

4) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}.$

Розв’язання. 1) Виділимо у чисельнику підінтегральної функції похідну від виразу, що міститься в знаменнику: $(4x^2+4x+19)'=8x+4$,

$$\int \frac{x-2}{\sqrt{4x^2+4x+19}}dx = \left| \begin{array}{c} x-2=\frac{1}{8}(8x+4-4-2)= \\ =\frac{1}{8}(8x+4)-\frac{5}{2} \end{array} \right| =$$

$$=\int\frac{\frac{1}{8}(8x+4)-\frac{5}{2}}{\sqrt{4x^2+4x+19}}dx=\frac{1}{8}\int\frac{(8x+4)dx}{\sqrt{4x^2+4x+19}}-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2+4x+19}}=$$

$$=\frac{1}{8}\int\frac{d(4x^2+4x+19)}{\sqrt{4x^2+4x+19}}-\frac{5}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{(2x+1)^2+18}}=$$

$$=\frac{1}{8}\frac{(4x^2+4x+19)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}-\frac{5}{4}\int\frac{d(2x+1)}{\sqrt{(2x+1)^2+18}}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{4x^2+4x+19}-\frac{5}{4}\ln\left|2x+1+\sqrt{4x^2+4x+19}\right|+C.$$

2) $\int\frac{\sqrt{x-2}-1}{\sqrt[3]{x-2}+1}dx=\begin{vmatrix}x-2=t^6\\ x=t^6+2\\ dx=6t^5dt\end{vmatrix}=6\int\frac{t^3-1}{t^2+1}t^5dt=6\int\frac{t^8-t^5}{t^2+1}dt=$

$$=6\int\left(t^6-t^4-t^3+t^2+t-1-\frac{t-1}{t^2+1}\right)dt=-6\frac{t^7}{7}-6\frac{t^5}{5}-6\frac{t^4}{4}+6\frac{t^3}{3}+$$

$$+6\frac{t^2}{2}-6t-6\int\frac{t-1}{t^2+1}dt=\frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5-\frac{3}{2}t^4+2t^3+3t^2-6t-6\int\frac{t-1}{t^2+1}dt$$

$$=\frac{6}{7}t^7-\frac{6}{5}t^5-\frac{3}{2}t^4+2t^3+3t^2-6t-\frac{6}{2}\int\frac{d(t^2+1)}{t^2+1}+6\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{6}{7}t^7-$$

$-\frac{6}{5}t^5-\frac{3}{2}t^4+2t^3+3t^2-6t-3\ln|t^2+1|+6\,arctgt+C$, де $t=\sqrt[6]{x-2}$.

3) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-1}}=\left|t=\frac{1}{x};x=\frac{1}{t};dx=-\frac{dt}{t^2}\right|=\int\frac{-\frac{1}{t^2}}{\frac{1}{t}\sqrt{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}-1}}dt=-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t-t^2}}=$

$$=-\int\frac{d\left(t+\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\frac{5}{4}-\left(t+\frac{1}{2}\right)^2}}=\left|\begin{matrix}1-t-t^2=-(t^2+t-1)=\\ =-\left(\left(t+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}\right)\end{matrix}\right|=-\arcsin\frac{t+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}+C=$$

$$=-\arcsin\frac{2t+1}{\sqrt{5}}+C=-\arcsin\frac{2+x}{\sqrt{5}x}+C.$$

4) $\int\frac{dx}{(1-x)\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{matrix}\frac{1-x}{1+x}=t^2, 1-x=t^2(1+x)=t^2+t^2x,\\ x=\frac{t^2-1}{-(1+t^2)}, dx=\frac{-2t(1+t^2)-(1-t^2)2t}{(1+t^2)^2}dt=\frac{-4t}{(1+t^2)^2}dt\\ 1-x=1-\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t^2}{1+t^2},\\ 1+x=1+\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2}{1+t^2}\end{matrix}\right|=$

$$= -\int \frac{(1+t^2)^2 4t dt}{2t^2\sqrt{4t^2}(1+t^2)^2} = -\int \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{t} + C = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + C.$$

2. Знайдіть інтеграли, використовуючи підстановки Чебишова:

1) $\int \sqrt{x^3}(1+4\sqrt[3]{x})^2 dx$; 2) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$; 3) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$.

Розв'язання. 1) Вираз, що міститься під інтегралом, є диференціальним біномом, оскільки $\sqrt{x^3}(1+4\sqrt[3]{x})^2 = x^{3/2}(1+4x^{\frac{1}{3}})^2$. Отже, відповідно до вигляду диференціального біному $x^m(a+bx^n)^p$ і $m = \frac{3}{2}$ $, n = \frac{1}{3}, p = 2$, із наведених 3-ох випадків застосування підстановок Чебишова, маємо: $p = -3 \in \mathbb{Z}$, тобто маємо випадок (1). Тоді використовуємо підстановку $x = t^s$, де s – спільний знаменник дробів $m = \frac{3}{2}$ і $n = \frac{1}{3}$, тобто $s = 6$. Звідси,

$$\int \sqrt{x^3}(1+4\sqrt[3]{x})^2 dx = \int x^{3/2}(1+4x^{\frac{1}{3}})^2 dx = \left| \begin{array}{c} m = \frac{3}{2}\ , n = \frac{1}{3}, p = 2 \\ p = 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = t^s, \\ s = 6 \ \Rightarrow \ \ x = t^6, \ \ dx = 6t^5 dt \end{array} \right|$$

$$= \int (t^6)^{3/2}(1+4(t^6)^{\frac{1}{3}})^2 6t^5 dt = \int t^9(1+4t^2)^2\, dt = 6\int t^{14}(1+4t^2)^2 dt =$$

$$= 6\int t^{14}(1+8t^2+16t^4)dt = 6\int (t^{14}+8t^{16}+16t^{18})dt =$$

$$= 6\frac{t^{15}}{15} + 48\frac{t^{17}}{17} + 96\frac{t^{19}}{19} + C, \text{де } t = \sqrt[6]{x}.$$

2) Запишемо інтеграл у вигляді $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx$. Тут, згідно з попередніх міркувань, $m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3}$. Оскільки $p = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}, \frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$, то маємо випадок (2) із підстановок Чебишова. Оскільки знаменник числа p дорівнює 3, то виконаємо заміну $1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3$. Тобто:

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}} dx =$$

$$=\left|\begin{array}{c} m=-\frac{1}{2}, n=\frac{1}{4}, p=\frac{1}{3}\notin \mathbb{Z} \\ \frac{m+1}{n}=2\in\mathbb{Z}\Rightarrow 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3 \\ t=(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}, \\ x=(t^3-1)^4, dx=12(t^3-1)^3t^2dt \end{array}\right|=$$

$=\int(t^3-1)^{-4/2}(t^3)^{\frac{1}{3}}\ \ 12(t^3-1)^3t^2dt=12\int t^3(t^3-1)\,dt=12\int(t^6-t^3)dt=$

$=12\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C=\frac{12}{7}t^7-3t^4+C,$ де $t=\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}}.$

3) Запишемо інтеграл у вигляді $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx.$ Звідси, із вигляду підінтегральної функції маємо $m=0, n=4,$ $p=-\frac{1}{4}.$ Оскільки, $p=-\frac{1}{4}\ \notin\mathbb{Z},$ $\frac{m+1}{n}=\frac{1}{4}\ \notin\mathbb{Z}, \frac{m+1}{n}+p=0\in\mathbb{Z},$ то маємо випадок (3) із підстановок Чебишова і потрібно виконати заміну: $x^{-4}\ +1=t^4$. Перед застосуванням такої заміни, виконаємо деякі перетворення

$$\int(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx=\int(x^{-4}+1)^{-\frac{1}{4}}x^{-1}dx.$$

Дістанемо:

$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}=\int(1+x^4)^{-\frac{1}{4}}dx=\left|\begin{array}{l} m=0, n=4, \qquad p=-\frac{1}{4}\ \notin\mathbb{Z} \\ \frac{m+1}{n}+p=0\Rightarrow x^{-4}\ +1=t^4 \\ x=\frac{1}{(t^4-1)^{\frac{1}{4}}},\ \ dx=\frac{-t^3dt}{(t^4-1)^{\frac{5}{4}}} \end{array}\right|=$$

$=\int(x^{-4}+1)^{-\frac{1}{4}}x^{-1}dx=-\int\frac{(t^4-1)^{\frac{1}{4}}}{t}\frac{t^3dt}{(t^4-1)^{\frac{5}{4}}}=-\int\frac{t^2dt}{t^4-1}=-\int\frac{t^2-1+1}{(t^2-1)(t^2+1)}dt=$

$-\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{t^2-1}-\frac{1}{t^2+1}\right)dt=-\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|-\frac{1}{2}arctgt+C,$ де $t=(x^{-4}+1)^{\frac{1}{4}}.$

3. Знайдіть інтеграли, використовуючи підстановки Ейлера:

1) $\int\frac{xdx}{(\sqrt{5x-6-x^2})^3};$ 2) $\int\frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}};$

Розв'язання. 1) Оскільки $a<0, c<0$ і $5x-6-x^2=-(x-3)(x-2)$, застосуємо третю підстановку Ейлера: $\sqrt{5x-6-x^2}=(x-2)t$, тоді

$$\int \frac{xdx}{(\sqrt{5x-6-x^2})^3}=$$

$$=\left|\begin{matrix} a<0, c<0 \Rightarrow \sqrt{5x-6-x^2}=\sqrt{-(x-3)(x-2)}= \\ =(x-2)t \Rightarrow \\ -(x-3)(x-2)=(x-2)^2t^2 \Rightarrow -(x-3)=(x-2)t^2 \\ \Rightarrow -x+3=t^2x-2t \Rightarrow x=\dfrac{3+2t}{1+t^2} \\ dx=\dfrac{-2tdt}{(1+t^2)^2}, \sqrt{5x-6+x^2}=\left(\dfrac{3+2t}{1+t^2}-2\right)t=\dfrac{t}{1+t^2} \end{matrix}\right|=$$

$$=-\int \frac{3+2t^2}{1+t^2}\frac{(1+t^2)^3}{t^3}\frac{2tdt}{(1+t^2)^2}=-2\int \frac{3+2t^2}{t^2}dt=$$

$$=-6\int \frac{dt}{t^2}-4\int dt=-\frac{6}{t}-4t+C, \text{ де } t=\frac{\sqrt{5x-6-x^2}}{x-2}.$$

2) Оскільки $a=1>0$, застосуємо першу підстановку Ейлера: $\sqrt{x^2+x+1}=t-x$, тоді дістанемо:

$$I=\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\left|\begin{matrix} a>0 \Rightarrow \sqrt{x^2+x+1}=t-x, \\ x^2+x-1=(t-x)^2 \Rightarrow x+2tx=t^2-1 \\ x=\dfrac{t^2-1}{2t+1}, dx=\dfrac{2t+2t^2+2}{(2t+1)^2}dt \end{matrix}\right|=$$

$$=\int \frac{2(t+t^2+1)}{t(1+2t)^2}dt.$$

Отримаємо розклад підінтегральної функції в суму елементарних дробів:

$$\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}=\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{C}{(1+2t)^2}.$$

Тотожньо зрівняємо чисельники: $t^2+t+1=A(1+2t)^2+Bt(1+2t)+Ct$, тоді $A=1, B=-\frac{3}{2}, C=-\frac{3}{2}$. Отже,

$$\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}=\frac{1}{t}+\frac{-\frac{3}{2}}{1+2t}+\frac{-\frac{3}{2}}{(1+2t)^2}$$

і

$$I = 2\int\left(\frac{1}{t} - \frac{3}{2}\ \frac{1}{1+2t} - \frac{3}{2}\ \frac{1}{(1+2t)^2}\right)dt = 2\ln|t| -$$

$$-\frac{3}{2}\ln|1+2t| - \frac{3}{2}\ \frac{1}{1+2t} + C,\ \text{де}\ t = \sqrt{x^2+x+1} - x.$$

Індивідуальне завдання №4. Інтегрування ірраціональних виразів

Знайти інтеграли від ірраціональних функцій, використовуючи відповідну заміну змінної та підстановки Чебишова.

1. а) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$;

2. а) $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}\ dx$;

3. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt{x}}dx$;

4. а) $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[6]{x})}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt{x}}dx$;

5. а) $\int \frac{(\sqrt{3x+1}-1)dx}{\sqrt[3]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}{x\sqrt[9]{x^4}}\ dx$;

6. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{x})^2}}{x\sqrt[6]{x^5}}dx$;

7. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{3x+\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x})^2}}{x\sqrt[9]{x^5}}dx$;

8. а) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(1+\sqrt[3]{x})}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x\sqrt[9]{x^8}}dx$;

9. а) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{1+\sqrt[3]{x+3}} dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[5]{x^4}\right)^2}}{x^2 \sqrt[3]{x}} dx$;

10. а) $\int \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt[3]{2x+1}}{\sqrt{2x+1}} dx$; б) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt[3]{x})^3}}{x \sqrt[12]{x^7}} dx$;

11. а) $\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[6]{x-1}} dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2} dx$;

12. а) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}} dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}} dx$;

13. а) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{\sqrt[4]{(1+\sqrt{x})^3}}{x \sqrt[8]{x^7}} dx$;

14. а) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[6]{x}}{x(1+\sqrt[3]{x})} dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[3]{x^2})^3}}{x^2 \sqrt[6]{x}} dx$;

15. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-4\sqrt[3]{x^2}} dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2 \sqrt[8]{x}} dx$;

16. а) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x^3}}}{x^2} dx$;

17. а) $\int \frac{x+2}{\sqrt{3x+1}} dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x^3})^2}}{x^2 \sqrt[4]{x}} dx$;

18. а) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx$; б) $\int \frac{\sqrt[5]{(1+\sqrt{x})^4}}{x \sqrt[10]{x^9}} dx$;

19. а) $\int \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}}{x \sqrt[9]{x^5}} dx$;

20. а) $\int \frac{dx}{(9+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{\sqrt{(1+\sqrt[3]{x^2})^4}}{x^2 \sqrt[5]{x}} dx$;

21. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x^2\sqrt{x}} dx$;

22. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1}-\sqrt[3]{2x-1}}$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{x^2}dx$;

23. а) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+2\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{x}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx$;

24. а) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2})}$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{1+x^2}}$;

25. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{x-\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx$;

26. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[4]{x}}dx$; б) $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^4 dx$;

27. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{4x-\sqrt[3]{x^2}}dx$; б) $\int x^5(1+x^3)^{2/3}\,dx$;

28. а) $\int \frac{1+\sqrt[3]{5x-1}}{\sqrt[6]{5x-1}+\sqrt{5x-1}}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx$;

29. а) $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$; б) $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x\sqrt[6]{x^5}}dx$;

30. а) $\int \frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt[3]{x+1}}dx$; б) $\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}$.

Тема 5. ІНТЕГРУВАННЯ ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Інтегрування тригонометричних функцій.
2. Тригонометричні підстановки. Універсальна підстановка.

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. Знайдіть інтеграли:

1) $\int \sin^3 x \cos^2 x\,dx$; 2) $\int \sin 5x \cos x dx$;

3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$; 4) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$;

5) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$; 6) $\int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x}$;

7) $\int \cos^4 3x\, dx$; 8) $\int \mathrm{th}^3 x dx$.

Розв'язання. 1) $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\, d(\cos x) =$

$$= -\int \cos^2 x\, d(\cos x) + \int \cos^4 x d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

2) $\int \sin 5x \cos x dx = \frac{1}{2}\int (\sin 6x + \sin 4x) dx = -\frac{1}{12}\cos 6x - \frac{1}{8}\cos 4x + C.$

3) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \left| \frac{(-\sin x)^3}{\cos^4 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \right| = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^4 x} dx =$

$$= |\sin x dx = -d(\cos x)| = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x) = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^4 x} d(\cos x) =$$

$$= \left| \begin{matrix} \cos x = t \\ d(\cos x) = dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{1-t^2}{t^4} dt = -\int \frac{dt}{t^4} + \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

4) $\int \frac{dx}{5+4\sin x} = \left| \begin{matrix} t = tg\frac{x}{2} \\ x = 2arctgt \\ dx = 2\frac{dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \end{matrix} \right| = 2\int \frac{dt}{\left(5+\frac{8t}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{2dt}{5+5t^2+8t} =$

$$= \left| 5\left(t^2 + \frac{8}{5}t + 1\right) = 5\left(\left(t+\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}\right) \right| = \frac{2}{5}\int \frac{d\left(t+\frac{4}{5}\right)}{\left(t+\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{9}{25}} =$$

$$= \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{3}\mathrm{arctg}\frac{5\left(t+\frac{4}{5}\right)}{3} + C = \frac{2}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{5}{3}\left(tg\frac{x}{2}\right) + \frac{4}{3}\right) + C.$$

$$5)\ \int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x} = \left| \begin{matrix} \mathrm{t}=\mathrm{tg}\frac{x}{2}, x=2\mathrm{arctg}\, t \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2}, \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{5-4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$= \int \frac{2dt}{5(1+t^2)-8t+3(1-t^2)} = \int \frac{dt}{t^2-4t+4} = \int \frac{dt}{(t-2)^2} = \int \frac{d(t-2)}{(t-2)^2} =$$

$= \frac{(t-2)^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{1}{t-2} + C,$ де $t=\mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

$$6)\ \int \frac{dx}{\sin^4 x+\cos^4 x} = \left| \begin{matrix} \frac{1}{(-\sin x)^4+(-\sin x)^4} = \frac{1}{\sin^4 x+\cos^4 x} \\ t=tgx;\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ x=arctgt;\quad \sin x=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dx=\frac{dt}{1+t^2} \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left(\frac{t^4}{(1+t^2)^2}+\frac{1}{(1+t^2)^2}\right)} =$$

$$= \int \frac{dt}{\frac{t^4}{1+t^2}+\frac{1}{1+t^2}} = \int \frac{(1+t^2)dt}{t^4+1} = \int \frac{t^2\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt}{t^2\left(1+\frac{1}{t^4}\right)} = \int \frac{\left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt}{t^2+\frac{1}{t^2}} =$$

$$= \left| \begin{matrix} t^2+\frac{1}{t^2} = t^2+\frac{1}{t^2}-2t\frac{1}{t}+2 = \\ \left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2, \left(1+\frac{1}{t^2}\right)dt = d\left(t-\frac{1}{t}\right) \end{matrix} \right| = \int \frac{d\left(t-\frac{1}{t}\right)}{\left(t-\frac{1}{t}\right)^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{t-\frac{1}{t}}{\sqrt{2}} + C, .$$

де $t=tgx$.

$$7)\ \int \cos^4 3x\,dx = \int \left(\frac{1+\cos 6x}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1+2\cos 6x+\cos^2 6x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \left(1+2\cos 6x+\frac{1+\cos 12x}{2}\right) dx = \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\sin 6x+\frac{1}{8}\left(x+\frac{1}{12}\sin 12x\right)$$

$$+C = \frac{3}{8}x+\frac{1}{12}\sin 6x+\frac{1}{96}\sin 12x+C.$$

$$8)\ \int \mathrm{th}^3 x\,dx = \left|1-\mathrm{th}^2 x = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right| = \int \mathrm{th}\,x\left(1-\frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right)dx = \int \mathrm{th}\,x\,dx -$$

$$-\int \frac{\mathrm{th}x}{\mathrm{ch}^2 x}dx = \int \frac{\mathrm{sh}\,x\,dx}{\mathrm{ch}\,x} - \int \mathrm{th}\,x\,d(\mathrm{th}\,x) = \int \frac{d\,(\mathrm{ch}\,x)}{\mathrm{ch}\,x} - \frac{\mathrm{th}^2 x}{2} =$$

$$= \ln \mathrm{ch} x - \frac{\mathrm{th}^2 x}{2} + C.$$

Індивідуальне завдання №5. Інтегрування тригонометричних виразів

5.1. *Знайти інтеграли від тригонометричних функцій.*

1. а) $\int \frac{dx}{5+2\sin x+3\cos x}$; б) $\int \sin^3 x \cos^{15} x\, dx$; в) $\int \cos 3x \cos x\ dx$;

2. а) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$; б) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^4 x} dx$; в) $\int \sin 5x \sin 7x\ dx$;

3. а) $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$; б) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^{10} x} dx$; в) $\int \sin x \cos 4x\ dx$;

4. а) $\int \frac{dx}{5+3\cos x-5\sin x}$; б) $\int \sin^3 x \cos^9 x dx$; в) $\int \sin 4x \cos 2x\ dx$;

5. а) $\int \frac{dx}{5\cos x+10\sin x}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos x}$; в) $\int \cos 7x \cos 5x\ dx$;

6. а) $\int \frac{dx}{3+2\cos x-\sin x}$; б) $\int \frac{dx}{\cos^3 x\ \sin x}$; в) $\int \sin x \cos 9x\ dx$;

7. а) $\int \frac{dx}{5-\cos x}$; б) $\int \sin^3 x \cos^{12} x\, dx$; в) $\int \sin 5x \cos 3x\ dx$;

8. а) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+7\cos x}$; б) $\int \frac{4-7\,\mathrm{tg}\, x}{2+3\,\mathrm{tg}\, x} dx$; в) $\int \sin 3x \cos 2x\ dx$;

9. а) $\int \frac{dx}{3+5\cos x}$; б) $\int \frac{3\mathrm{tg}^2\, x-1}{\mathrm{tg}^2\, x+5} dx$; в) $\int \sin 3x \sin 2x\ dx$;

10. а) $\int \frac{dx}{2\sin x+3\cos x+3}$; б) $\int \frac{11-3\mathrm{tg}\, x}{\mathrm{tg}\, x+3} dx$; в) $\int \cos 5x \cos x\ dx$;

11. а) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$; б) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\ dx$; в) $\int \sin 3x \cos x\ dx$;

12. а) $\int \frac{dx}{8+4\cos x}$; б) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x}\ dx$; в) $\int \cos 4x \cos 3x\, dx$;

13. а) $\int \frac{dx}{3\sin x-4\cos x}$; б) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^9 x} dx$; в) $\int \sin 9x \cos x\, dx$;

14. а) $\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$; б) $\int \sin^2 x \cos^4 x\, dx$; в) $\int \sin 6x \sin 5x\ dx$;

15. а) $\int \frac{dx}{2+4\sin x+3\cos x}$; б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^8 x}dx$; в) $\int \sin 3x \sin 8x \; dx$;

16. а) $\int \frac{dx}{3\sin x+4\cos x}$; б) $\int \sin^4 x \cos^2 x \, dx$; в) $\int \cos 2x \cos 3x \, dx$;

17. а) $\int \frac{2-\sin x+\cos x}{1+\cos x}dx$; б) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^{12} x}dx$; в) $\int \cos 3x \cos 7x \, dx$;

18. а) $\int \frac{dx}{5+\sin x+3\cos x}$; б) $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} \, dx$; в) $\int \cos 4x \cos 9x \; dx$;

19. а) $\int \frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}$; б) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^3 x} \, dx$; в) $\int \sin 7x \cos 2x \; dx$;

20. а) $\int \frac{7+6\sin x-5\cos x}{1+\cos x} \, dx$; б) $\int \frac{\cos^2 x}{\sin^8 x}dx$; в)$\int \sin 4x \sin 12x \, dx$;

21. а) $\int \frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$; б) $\int \cos^3 \frac{x}{2} \sin^5 \frac{x}{2} dx$; в) $\int \sin 8x \cos 2x \; dx$;

22. а) $\int \frac{dx}{3+5\sin x+3\cos x}$; б) $\int \operatorname{ctg}^4 x \, dx$; в) $\int \sin x \sin 11x \; dx$;

23. а) $\int \frac{dx}{\cos x-3\sin x}$; б) $\int \operatorname{tg}^7 x \, dx$; в)$\int \sin 12x \cos 6x \, dx$;

24. а) $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$; б) $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^6 x} \, dx$; в) $\int \cos 9x \cos 2x \; dx$;

25. а) $\int \frac{dx}{4\sin x-6\cos x}$; б) $\int \operatorname{ctg}^3 x \, dx$; в) $\int \sin 8x \sin 3x \; dx$;

26. а) $\int \frac{dx}{4-4\sin x+3\cos x}$; б) $\int \sin^4 8x \cos 8x \, dx$; в) $\int \cos 8x \cos 5x \; dx$;

27. а) $\int \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$; б) $\int \cos^3 6x dx$; в) $\int \sin 6x \cos 4x \; dx$;

28. а) $\int \frac{dx}{3\sin x-\cos x}$; б) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x+16\sin^2 x}$; в)$\int \cos 13x \cos 4x \, dx$;

29. а) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+2\cos x}$; б) $\int \frac{dx}{1+2\sin^2 x}$; в) $\int \sin 16x \sin 2x \, dx$;

30. а) $\int \frac{dx}{7\sin x-3\cos x}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x+3\cos^2 x}$; в) $\int \sin 13x \cos 3x \, dx$;

Тема 6. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ, МЕТОДИ ЙОГО ОБЧИСЛЕННЯ

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла. Визначений інтеграл. Критерій інтегровності. Класи інтегровних функцій.

2. Властивості визначеного інтеграла. Теореми про середнє значення визначеного інтеграла.

3. Формула НьютонаЛейбніца.

4. Заміна змінної у визначеному інтегралі. Формула інтегрування частинами.

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. Користуючись означенням визначеного інтеграла, як границі інтегральної суми (Рімана), обчислити інтеграл $I = \int_{-1}^{4}(1+2x)dx$, розбиваючи проміжок інтегрування на n рівних частин і вибираючи проміжкові точки в середині проміжків розбиття.

Розв'язання. Розділимо проміжок інтегрування $[-1; 4]$ на n рівних частин. Так як довжина його дорівнює 5, то довжина кожної частини буде $\Delta x_k = x_k - x_{k-1} = \frac{5}{n}$ і, очевидно, прямуватиме до нуля при $n \to \infty$. Тоді, враховуючи розбиття проміжку, маємо:

$$x_0 = -1, x_1 = -1 + \frac{5}{n}, x_2 = -1 + 2 \cdot \frac{5}{n}, \dots, x_k = -1 + k \cdot \frac{5}{n},$$

$$x_{k+1} = -1 + (k+1) \cdot \frac{5}{n}, \dots, x_n = -1 + n \cdot \frac{5}{n} = 4.$$

Оскільки проміжкові значення аргумента $\xi_k \ (k = 0,1, \dots, n-1)$, за умовою, перебувають у середині відрізків $[x_{k-1}; x_k]$, то на проміжках $[x_{k-1}; x_k] = \left[-1 + (k-1) \cdot \frac{5}{n}; -1 + k \cdot \frac{5}{n}\right]$ вибираємо середні проміжкові точки

$$\xi_k = \frac{x_k + x_{k-1}}{2} = \frac{-1 + k \cdot \frac{5}{n} + -1 + (k-1) \cdot \frac{5}{n}}{2} = \frac{-2 + 2k \cdot \frac{5}{n} - \frac{5}{n}}{2} =$$

$$= -1 + \frac{5k}{n} - \frac{5}{2n},$$

де $k = 0,1, \dots, n-1$.

Для побудови інтегральної суми $I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k$, знайдемо значення функції $f(x) = 1 + 2x$ в цих точках:

$$f(\xi_k) = 1 + 2\xi_k = 1 + 2 \cdot \left(-1 + \frac{5k}{n} - \frac{5}{2n}\right) =$$

$$= 1 - 2 + \frac{10k}{n} - \frac{5}{n} = -1 + \frac{10k}{n} - \frac{5}{n}.$$

Тепер обчислимо інтегральну суму

$$I_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(-1 + \frac{10k}{n} - \frac{5}{n}\right) \cdot \frac{5}{n} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (-1) \cdot \frac{5}{n} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{10k}{n} \cdot \frac{5}{n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{5}{n} \cdot \frac{5}{n} =$$

$$= \frac{5}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1) + \sum_{k=0}^{n-1}\frac{10k}{n} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{5}{n}\right) = \frac{5}{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1) + \frac{10}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k - \frac{5}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1\right) =$$

$$= \frac{5}{n}\left(-n + \frac{10}{n}\sum_{k=0}^{n-1} k - \frac{5}{n} \cdot n\right) = \frac{5}{n}\left(-n + \frac{10}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2} - \frac{5}{n} \cdot n\right) =$$

$$= -5 + \frac{25(n-1)n}{n^2} - \frac{25}{n} = -5 + 25 = 20.$$

Отже, за означенням $I = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$ шуканий визначений інтеграл I дорівнюватиме $I = \int_{-1}^{4}(1+2x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} I_n = \lim\limits_{n\to\infty} 20 = 20$.

2. Оцінити зверху і знизу інтеграл $\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}}$.

Розв'язання. Оскільки для функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^5}}$ похідно $f'^{(x)} = \frac{-5x^4}{2(1+x^5)^{\frac{3}{2}}} < 0$ для всіх x з області визначення $(-1, \infty)$, то функція є спадною на $[0, 3]$. Отже, найменше і найбільше її значення відповідно рівні:

$$m = f(3) = \frac{1}{\sqrt{1+3^5}} = \frac{1}{\sqrt{244}} \approx 0.064; M = f(0) = 1.$$

Тоді згідно властивості визначеного інтегралу для $a = 0, b = 3$ дістанемо

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \Rightarrow$$

$$0.064 \cdot 3 \le \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}} \le 1 \cdot 3 \Rightarrow 0.192 \le \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}} \le 3.$$

3. Знайти інтегральне середнє значення для функції $f(x) = 3 + 2e^{-2x+1}$ на $[0, 2]$.

Розв'язання. З теореми про середнє значення випливає рівність $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$, де $f(c)$ – середнє значення функції $f(x)$ на $[a, b], c \in [a, b]$.

У цьому випадку для функції $f(x) = 3 + 2e^{-2x+1}$ на $[0, 2]$ маємо

$$f(c) = \frac{1}{2}\int_0^2 (3 + 2e^{-2x+1})dx = \frac{1}{2}3\int_0^2 dx + \int_0^2 e^{-2x+1}dx =$$

$$= \frac{3}{2}x|_0^2 - \frac{1}{2}e^{-2x+1}|_0^2 = 3 - \frac{1}{2e^3} + \frac{e}{2}.$$

4. Обчислити визначені інтеграли, використовуючи безпосереднє інтегрування і властивості визначених нтегралів:

1) $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x}dx$; 2) $\int_0^2 |1-x|dx$; 3) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x}$;

4) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{\sin x}\, dx$; 5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\mathrm{tg}\, x|dx$; 6) $\int_0^{6\pi} \sin^5 x\, dx$.

Розв'язання. 1) $\int_0^1 \sqrt[3]{1-x}dx = -\int_0^1 (1-x)^{\frac{1}{3}}d(1-x) = -\frac{3}{4}(1-x)^{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 =$

$= -\frac{3}{4}(0-1) = \frac{3}{4}$;

2) $\int_0^2 |1-x|dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 -(1-x)dx = \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2$

$= 1 - \frac{1}{2} - \left(2 - \frac{4}{2} - 1 - \frac{1}{2}\right) = 1$, враховуючи, що $|1-x| = \begin{cases} 1-x, x \le 1, \\ -(1-x), x > 1 \end{cases}$;

3) $\int_e^{e^2} \frac{dx}{x\ln x} = \left|\frac{dx}{x} = d\ln x\right| = \int_e^{e^2} \frac{d\ln x}{\ln x} = \ln|\ln x||_e^{e^2} = \ln\ln e^2 -$ $\ln\ln e = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2;$

4) Оскільки $\sqrt[3]{\sin x}$ – непарна функція, то $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{\sin x}\, dx = 0$ (як визначений інтеграл у симетричних межах від непарної функції);

5) Оскільки $|\mathrm{tg}\, x|$ – парна функція, то за властивостями інтегралу в симетричних межах від парної функції

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\mathrm{tg}\, x| dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} |\mathrm{tg}\, x| dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{tg}\, x dx = -2\ln|\cos x||_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -2\ln\cos\frac{\pi}{4} + 2\ln\cos 0 = \ln 2;$$

6) Використовуючи властивість адитивності, розіб’ємо проміжок інтегрування на відрізки завдовжки 2π і застосуємо властивості визначених інгералів, зокрема від періодичної функції

$$\int_0^{6\pi} \sin^5 x\, dx = \int_0^{2\pi} \sin^5 x\, dx + \int_{2\pi}^{4\pi} \sin^5 x\, dx + \int_{4\pi}^{6\pi} \sin^5 x\, dx = 3\int_0^{2\pi} \sin^5 x\, dx =$$

$$= 3\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x\, dx = 3 \cdot 0 = 0,$$

оскільки $\sin^5 x$ – непарна функція.

4. Обчислити визначені інтеграли, використовуючи інтегрування частинами та заміну змінної:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$; 2) $\int_0^1 \mathrm{arctg}\, x\, dx$;

3) $\int_0^3 x^2\sqrt{9 - x^2} dx$; 4) $\int_{\sqrt{2}}^9 \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}}$.

Розв’язання. 1) Використавши двічі формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx = \left|\begin{matrix} u = x^2, dv = \sin x\, dx \\ du = 2xdx, v = -\cos x \end{matrix}\right| = -x^2\cos x|_0^{\frac{\pi}{2}} +$$

$$+2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx = \begin{vmatrix} u = x, dv = \cos x\,dx \\ du = dx, v = \sin x \end{vmatrix} =$$

$$= 2x\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx = \pi + 2\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2.$$

2) За допомогою інтегурвання частинами, дістанемо:

$$\int_0^1 \operatorname{arctg} x\,dx = \begin{vmatrix} u = \operatorname{arctg} x, dv = dx \\ du = \dfrac{1}{1+x^2}dx, v = x \end{vmatrix} = -x\cdot\operatorname{arctg} x\Big|_0^1 -$$

$$-\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln\sqrt{2}.$$

3) Для цього інтегралу зручно застосувати тригонометричну заміну змінної $x = 3\sin t$ (функція визначена і неперервна разом із своєю похідною). Нові межі інтегрування для змінної t отримаємо з рівнянь:

$$2\sin t = 0 \Rightarrow \sin t = 0 \Rightarrow\ t = 0;\ 3\sin t = 3 \Rightarrow \sin t = 1 \Rightarrow\ t = \tfrac{\pi}{2}.$$

Тоді

$$\int_0^3 x^2\sqrt{9-x^2}dx = \begin{vmatrix} x = 3\sin t\,, 0 \le x \le 2 \\ dx = 3\cos t\,dt, 0 \le t \le \dfrac{\pi}{2} \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\sin^2 t\sqrt{9-9\sin^2 t}\,3\cos t\,dt = 81\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cos^2 t\,dt = \frac{81}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt =$$

$$= \frac{81}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4t)dt = \frac{81}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{81\pi}{16}.$$

4) У цьому інтегралі використаємо заміну $x = \frac{1}{t}$ або $t = \frac{1}{x}$ і визначимо межі: при $x = \sqrt{2} \Rightarrow\ t = \frac{1}{\sqrt{2}}$; при $x = 9 \Rightarrow\ t = \frac{1}{9}$.

$$\int_{\sqrt{2}}^{9} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-1}} = \left| \begin{matrix} x = \frac{1}{t}, \sqrt{2} \le x \le 9 \\ dx = -\frac{1}{t^2}dt, \frac{1}{\sqrt{2}} \le t \le \frac{1}{9} \end{matrix} \right| = \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{9}} \frac{-\frac{1}{t^2}dt}{\frac{1}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} =$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{9}} \frac{tdt}{\sqrt{1-t^2}} = -\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{9}} \frac{d(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} = -\sqrt{1-t^2}\Big|_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{9}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{80}}{\sqrt{81}} = \frac{4\sqrt{5}}{9} - \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Індивідуальне завдання №6. Обчислення визначених інтегралів

6.1. *Обчислити визначені інтеграли.*

1. а) $\int_0^1 \frac{4arctg\,x - x}{x^2+1}dx$; б) $\int_{-1}^2 3x^2\ln(2+x)\,dx$; в) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

2. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2x\,dx$; б) $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos x\,dx$; в) $\int_3^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}dx$.

3. а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{ctg}^3\,x\,dx$; б) $\int_0^2 \mathrm{arctg}\frac{x}{2}dx$; в) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

4. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2x\,dx$; б) $\int_1^2 \ln(3x+2)\,dx$; в) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}dx$.

5. а) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{ctg}^3\,x\,dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} x^2\sin 4x\,dx$; в) $\int_0^3 \frac{15x}{\sqrt[4]{(5x+1)^3}+\sqrt[4]{5x+1}}dx$.

6. а) $\int_0^{\frac{\pi}{8}} \sin x\sin 3x\,dx$; б) $\int_{-1}^0 (x+1)e^{2x}dx$; в) $\int_{-1}^1 \frac{x}{\sqrt{5-4x}}dx$.

7. а) $\int_0^1 \frac{x}{1+x^4}dx$; б) $\int_0^1 x^2e^{3x}dx$; в) $\int_0^5 \frac{3x}{\sqrt[4]{3x+1}+\sqrt{3x+1}}dx$.

8. а) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2}dx$; б) $\int_1^2 (x-1)\ln x\,dx$; в) $\int_{\ln 3}^0 \frac{1-e^x}{1+e^x}dx$.

9. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,dx$; б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \arcsin 2x\,dx$; в) $\int_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$.

10. а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x+\mathrm{arctg}\,x}{1+x^2}dx$; б) $\int_1^{\pi} x\cos\frac{x}{2}dx$; в) $\int_1^{0.5\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x+e^{-x}}$

11. а) $\int_0^e \frac{x+\ln x}{x}dx$; б) $\int_0^3 \ln(x^2+9)\,dx$; в) $\int_0^1 \frac{27x}{\sqrt[3]{(9x-1)^2}+3\sqrt[3]{9x-1}}dx$.

12. а) $\int_{-1}^{\frac{\pi}{4}-1} \frac{\text{tg}\,(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$; б) $\int_1^{\frac{\pi}{2}} x\sin 2x\,dx$; в) $\int_1^4 \frac{3x-3}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}+\sqrt[3]{3x-4}}dx$.

13. а) $\int_{e+1}^{e^2+1} \frac{1+\ln(x-1)}{x-1}dx$; б) $\int_0^1 x^2\sin 3x\,dx$; в) $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt[3]{(7x+8)^2}+2\sqrt[3]{7x+8}}$.

14. а) $\int_0^1 \frac{x^3+x}{1+x^4}dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$; в) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$.

15. а) $\int_0^e \frac{x+\ln x}{x}dx$; б) $\int_0^{0.25} \text{arctg}\,4x\,dx$; в) $\int_1^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{4+\sqrt{\sin x}}$.

16. а) $\int_1^2 \frac{dx}{x(x+1)}dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos 3x\,dx$; в) $\int_0^3 \frac{25xdx}{\sqrt{5x+1}+\sqrt[4]{5x+1}}$.

17. а) $\int_1^2 \frac{dx}{x+x^3}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}(x-1)\cos 2x\,dx$; в) $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$.

18. а) $\int_{\frac{\pi}{4}-1}^{\frac{\pi}{3}-1} \frac{\text{ctg}\,(x+1)}{\sin^2(x+1)}dx$; б) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^2}dx$; в) $\int_{\ln 2}^{\ln 7} \frac{dx}{\sqrt{2+e^x}}$.

19. а) $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$; б) $\int_1^e (1-\ln x)^2 dx$; в) $\int_0^1 \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

20. а) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \text{tg}\,x\,dx$; б) $\int_0^1 xe^{-x}dx$; в) $\int_1^4 \frac{5dx}{\sqrt[3]{(3x-4)^2}+\sqrt[3]{3x-4}+1}$.

21. а) $\int_{-1}^1 \frac{xdx}{(1+x^2)^2}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{10}} e^{2x}\sin 5x\,dx$; в) $\int_{-1}^0 \frac{7dx}{\sqrt[3]{(7x+8)^2}+3\sqrt[3]{7x+8}}$.

22. а) $\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}dx$; б) $\int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2\ln x\,dx$ в) $\int_1^3 \frac{dx}{x\sqrt{x^2+5x+3}}$.

23. а) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{3\sin x+2}dx$; б) $\int_0^2 x\ \log_2 x\,dx$; в) $\int_0^{16} \sqrt{256-x^2}\,dx$.

24. а) $\int_{-1}^0 \frac{xdx}{1+x^4}$; б) $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}(2x+5)\sin 2x\,dx$; в) $\int_0^3 \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$.

25. а) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \text{ctg}\,3x\,dx$; б) $\int_0^1 x\,\text{arctg}\,xdx$; в) $\int_{\sqrt{2}}^2 \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$.

26. а) $\int_1^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$; б) $\int_0^{\frac{1}{3}} \arcsin 3x\,dx$ в) $\int_1^4 x^{-0.5}e^{\sqrt{x}}dx$.

27. а) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} \text{ctg}\,3x\,dx$; б) $\int_1^e \frac{\ln^2 x}{x^3}dx$; в) $\int_0^2 \frac{dx}{(4+x^2)\sqrt{4+x^2}}$.

28. а) $\int_{-2}^{-1} \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; б) $\int_1^e \ln^3 x\,dx$; в) $\int_0^5 \sqrt{25-x^2}\,dx$.

29. а) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\sin x\,dx$; в) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{2}2} \sqrt{x^2-2}\,dx$.

30. а) $\int_0^1 x(2-x^2)^2dx$; б) $\int_0^1 x\arcsin x\,dx$; в) $\int_0^{\sqrt{5}}\frac{dx}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}$.

Тема 7. НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Невласні інтеграли з нескінченими межами інтегрування (невласні інтеграли першого роду).
2. Невласні інтеграли від необмежених функцій (невласні інтеграли другого роду).
3. Ознаки збіжності невласних інтегралів.
4. Абсолютна збіжність невласних інтегралів.

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. Обчисліть невласні інтеграли 1-го роду або встановіть їх розбіжність:

1) $\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx$; 2) $\int_0^\infty xe^{-x^2}dx$;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9}$; 4) $\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx$.

Розв'язання. 1) За означенням невласного інтеграла 1-го роду маємо

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^3}dx = \lim_{A\to\infty}\int_1^A \frac{1}{x^3}dx = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{x^{-3+1}}{-3+1}\bigg|_1^A\right) = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\bigg|_1^A\right) =$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{A^2}+\frac{1}{2}\frac{1}{1^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Отже, оскільки границя скінченна, то інтеграл збігається і дорівнює $\frac{1}{2}$.

2) За означенням невласного інтеграла 1-го роду маємо

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}dx = \lim_{A\to\infty}\int_0^A xe^{-x^2}dx = \lim_{A\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\int_0^A e^{-x^2}d(-x^2)\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-x^2}\Big|_0^A\right) = -\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left(e^{-A^2}-1\right) = -\frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{e^{A^2}}-1\right) = \frac{1}{2}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\frac{1}{2}$.

3) <u>Спосіб 1.</u> Застосовуючи формулу Ньютона-Лейбніца, маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9} = \left|\begin{matrix}x^2+4x+9 = \\ (x+2)^2+5\end{matrix}\right| = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

<u>Спосіб 2.</u> Застосовуючи означення невласного інтегралу 1-го роду, отримаємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9} = \int_{-\infty}^{0}\frac{dx}{x^2+4x+9} + \int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+9} =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\int_A^0\frac{dx}{x^2+4x+9} + \lim_{B\to+\infty}\int_0^B\frac{dx}{x^2+4x+9} =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\int_A^0\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} + \lim_{B\to+\infty}\int_0^B\frac{d(x+2)}{(x+2)^2+5} =$$

$$= \lim_{A\to-\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)\Big|_A^0 + \lim_{B\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+2}{\sqrt{5}}\right)\Big|_0^B =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{A\to-\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}} - \operatorname{arctg}\left(\frac{A+2}{\sqrt{5}}\right)\right) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\lim_{B\to+\infty}\left(\operatorname{arctg}\left(\frac{B+2}{\sqrt{5}}\right) - \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{\pi}{2}\right) +$$

$$+\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\pi}{\sqrt{5}}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$.

4) За означенням невласного інтеграла 1-го роду маємо

$$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx = \lim_{A\to\infty}\int_2^A\frac{\ln x}{x}dx = \left|d(\ln x) = \frac{1}{x}dx\right| = \lim_{A\to\infty}\int_2^A \ln x\, d(\ln x)$$

$$= \lim_{A\to\infty}\left(\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_2^A\right) = \lim_{A\to\infty}\left(\frac{\ln^2 A}{2} - \frac{\ln^2 2}{2}\right) = \infty.$$

Інтеграл розбіжний.

2. Обчисліть невласні інтеграли 2-го роду або встановіть їх розбіжність:

1) $\int_0^1 \ln x\, dx$; 2) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}}$;

3) $\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx$; 4) $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^{\frac{6}{5}}}$.

Розв'язання. 1) Точка $x = 0$ – особлива точка підінтегральної функції $y = \ln x$ на [0,1], тому даний інтеграл є невласним інтегралом 2-го роду. За означенням такого невласного інтеграла маємо

$$\int_0^1 \ln x\, dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{0+\varepsilon}^1 \ln x\, dx = \begin{vmatrix} u = \ln x & dv = dx \\ du = \dfrac{1}{x}dx & v = x \end{vmatrix} =$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(x\cdot \ln x|_{0+\varepsilon}^1 - \int_{0+\varepsilon}^1 x\frac{1}{x}dx\right) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left((1\ln 1 - \varepsilon\cdot\ln\varepsilon) - \int_\varepsilon^1 dx\right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon\cdot\ln\varepsilon - x|_\varepsilon^1) = \lim_{\varepsilon\to 0}(-\varepsilon\cdot\ln\varepsilon - 1 + \varepsilon) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\varepsilon}{\frac{1}{\varepsilon}} - 1 + \lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\frac{1}{\varepsilon}}{-\frac{1}{\varepsilon^2}} - 1 + 0 = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon} - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює -1.

2) Точка $x = 2$ – особлива точка підінтегральної функції на [0,2], тому інтеграл є невласним інтегралом другого роду. За означенням такого невласного інтеграла маємо

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{2-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{2-x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\int_0^{2-\varepsilon}(2-x)^{-\frac{1}{2}}d(2-x)\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\left.\frac{(2-x)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_0^{2-\varepsilon}\right) = -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{2-x}\,\Big|_0^{2-\varepsilon}\right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{\varepsilon} - 2\sqrt{2}\right) = 2\sqrt{2}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $2\sqrt{2}$.

3) Точка $x = 1$ – особлива точка підінтегральної функції на [1,2], тому інтеграл є невласним інтегралом 2-го роду і

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \int_1^2 \frac{(x-1)-1}{\sqrt{x-1}}dx = \int_1^2 \sqrt{x-1}dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx.$$

Перший доданок – визначений інтеграл. А другий – невласний інтеграл 2- го роду. Тоді

$$\int_1^2 \frac{x-2}{\sqrt{x-1}}dx = \int_1^2 \sqrt{x-1}dx - \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}dx = \left.\frac{(x-1)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_1^2 -$$

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{1+\varepsilon}^2 (x-1)^{-\frac{1}{2}}dx\right) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}\Big|_1^2 - \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{(x-1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right|_{1+\varepsilon}^2 =$$

$$= \frac{2}{3}(1-0) - \lim_{\varepsilon\to 0}\left(2\sqrt{x-1}\Big|_{1+\varepsilon}^2\right) = \frac{2}{3} - 2\lim_{\varepsilon\to 0}(1-\sqrt{\varepsilon}) = \frac{2}{3} - 2 = \frac{-4}{3}.$$

Отже, інтеграл збігається і дорівнює $\frac{-4}{3}$.

4) Оскільки $x = 0$ – особлива точка, то

$$\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^{\frac{6}{5}}} = \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^{\frac{6}{5}}} + \int_0^1 \frac{dx}{x^{\frac{6}{5}}} = I_1 + I_2.$$

Обчислимо окремо кожен інтеграл

$$I_1 = \int_{-2}^0 \frac{dx}{x^{\frac{6}{5}}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-2}^{0-\varepsilon} \frac{dx}{x^{\frac{6}{5}}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\left.\frac{x^{-\frac{6}{5}+1}}{-\frac{6}{5}+1}\right|_{-2}^{-\varepsilon} = -5\left(-\infty + \frac{1}{2^{\frac{1}{5}}}\right) = \infty.$$

Невласний інтеграл 2-го роду I_1 розбіжний, отже і розбігається інтеграл $\int_{-2}^1 \frac{dx}{x^{\frac{6}{5}}}$.

Зауважимо, що, якщо не врахувати, що підінтегральна функція має розрив на проміжку інтегрування та формально використати формулу Ньютона-Лейбніца, то отриманий результат буде невірним.

3. Дослідити на збіжність інтеграли:

1) $\int_1^{+\infty} \frac{x^2}{x^4-x^2+1}dx$; 2) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$; 3) $\int_0^1 \frac{1}{e^{x^2}-1}dx$;

4) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt[3]{8-x^3}}dx$; 5) $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^3}dx$.

Розв'язання. 1) Дослідимо за ознакою порівняння.

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} > 0, x \in [1; +\infty);$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1} = \frac{x^2}{x^2(x^2 - 1 + \frac{1}{x^2})} \leq \frac{1}{x^2} = g(x), x \to \infty.$$

І оскільки інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$ збіжний ($\alpha = 2 > 1$), то і заданий інтеграл збіжний за 1-ою ознакою порівняння.

2) Плануючи використання ознаки порівняння, розбиваємо невласний інтеграл 1-го роду на суму двох інтегралів так, щоб точка $x = 0$ не належала проміжку інтегрування невласного інтеграла:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5 + 1}}dx = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^5 + 1}}dx + \int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5 + 1}}dx.$$

Перший доданок – визначений інтеграл, а другий – невласний інтеграл 1- го роду.

Дослідимо $\int_1^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^5+1}}dx$ за ознакою порівняння.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^5 + 1}} > 0, x \in [1; +\infty);$$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^5 + 1}} \leq \frac{x}{\sqrt{x^5}} = \frac{1}{x^{3/2}} = g(x), x \to \infty.$$

Оскільки інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}dx$ збіжний ($\alpha = 3/2 > 1$), то і заданий інтеграл збіжний за ознакою порівняння. Заданий інтеграл збігається як сума визначеного і збіжного невластивого інтеграла.

3) З'ясовуємо в яких точках підінтегральна функція стає необмеженою.

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2} - 1} > 0, x \in (0,1]; \lim_{x \to 0} \frac{1}{e^{x^2} - 1} = \infty.$$

Точка $x = 0$ – точка нескінченного розриву і досліджуваний інтеграл є невласним інтегралом 2-го роду. Застосовуємо наслідок з граничної ознаки порівняння (еквівалентність $e^x - 1 \sim x, x \to 0$):

$$f(x) = \frac{1}{e^{x^2} - 1} \sim \frac{1}{x^2} = g(x), x \to 0.$$

І оскільки інтеграл $\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx$ розбіжний ($\alpha = 2 > 1$, а інтеграл є невласним інтегралом 2-го роду), то і заданий інтеграл розбіжний за граничною ознакою порівняння.

4) З'ясовуємо в яких точках підінтегральна функція стає необмеженою.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{8 - x^3}} > 0, x \in [0; 1); \lim_{x \to 2} \frac{x}{\sqrt[3]{8 - x^3}} = \infty.$$

Точка $x = 2$ – точка нескінченного розриву і досліджуваний інтеграл є невласним інтегралом 2-го роду. Застосуємо наслідок з граничної ознаки порівняння:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{8 - x^3}} = \frac{x}{\sqrt[3]{(2 - x)(4 + x + x^2)}} \sim \frac{2}{\sqrt[3]{(2 - x)(4 + 2 + 2^2)}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt[3]{10}\sqrt[3]{(2 - x)}} = g(x), x \to 2.$$

Оскільки, інтеграл $\int_0^2 \frac{1}{(2-x)^{1/3}} dx$ збіжний ($\alpha = 1/3 < 1$, а інтграл є невласним інтегралом 2-го роду), то і заданий інтеграл збіжний за граничною ознакою порівняння.

5) Підінтегральна функція $f(x) = \frac{\sin x}{x^3}$ знакозмінна при $x \geq 1$. Оскільки $|\sin x| \leq 1$, то $\left|\frac{\sin x}{x^3}\right| \leq \frac{1}{x^3} = g(x)$. Інтеграл $\int_1^\infty \frac{1}{x^3} dx$ збігається ($\alpha = 3 > 1$), тому інтеграл $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x^3} dx$ також збігається.

4. Дослідити на абсолютну збіжніть інтеграл $\int_1^2 \frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}} dx$.

Розв'язання. Особлива точка $x = 1$. Для встановлення абсолютної збіжності $\int_a^b f(x)dx$ потрібно довести збіжність $\int_a^b |f(x)|dx$.

Розглянемо інтеграл $\int_1^2 \left|\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x-1}}\right| dx$. Тоді застосуємо 1-у ознаку порівняння:

$$0 \leq f(x) = \left|\frac{\cos x}{\sqrt[3]{x - 1}}\right| \leq \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1}} = g(x), x \in (1; 2].$$

Обчислимо невласний інтеграл 2-го роду (точка $x = 1$ – особлива)

$$\int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x - 1}} dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{1+\varepsilon}^2 (x - 1)^{-\frac{1}{3}} dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\left(\left.\frac{(x-1)^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1}\right|_{1+\varepsilon}^{2}\right) = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\left.\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}}\right|_{1+\varepsilon}^{2}\right) = \lim_{\varepsilon\to0}\left(\frac{3}{2}\left(1-\varepsilon^{\frac{2}{3}}\right)\right) = \frac{3}{2}.$$

Оскільки існує скінчена границя, то інтеграл збігається, а отже і заданий інтеграл є абсолютно збіжним.

Індивідуальне завдання №7. Невласні інтеграли

7.1. *Обчисліть невласні інтеграли або доведіть їх розбіжність.*

1. а) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x\ln x}$.

2. а) $\int_0^{+\infty} e^{-\sqrt{x}} x dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}$.

3. а) $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{x^3-5x^2}$.

4. а) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x+1}}$; б) $\int_{-1}^1 \frac{x+1}{\sqrt[5]{x^3}} dx$.

5. а) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \cos x\, dx$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$.

6. а) $\int_{0.5}^{+\infty} \frac{dx}{4x^2+4x+5} dx$; б) $\int_2^3 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^2-4}}$.

7. а) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{(x+1)^3}$; б) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

8. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$; б) $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(1-x)^2}}$.

9. а) $\int_0^{+\infty} e^{-2x} \sin 3x\, dx$; б) $\int_0^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$.

10. а) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{x^4+1}$; б) $\int_1^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

11. а) $\int_0^{+\infty} \frac{x^3dx}{\sqrt{16x^4+1}}$; б) $\int_{1/2}^1 \frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}$.

12. а) $\int_{-\infty}^0 \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$; б) $\int_0^2 \frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}$.

13. а) $\int_{-1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+4x+5}$; б) $\int_0^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

14. а) $\int_0^{+\infty} x^2 e^{-x/2} dx$; б) $\int_0^3 \frac{xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}$.

15. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{x^2+1} dx$; б) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}$.

16. а) $\int_0^{+\infty} \frac{(2x+1)dx}{4x^2+4x+5}$; б) $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

17. а) $\int_{-\infty}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5} dx$; б) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx$.

18. а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2(x+1)}$; в) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[5]{4x-x^2-4}}$.

19. а) $\int_0^{+\infty} x e^{-6x} dx$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{\sqrt{\cos x}}$.

20. а) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{(x^2+1)^5}}$; б) $\int_0^1 \frac{x^4 dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}$.

21. а) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^{3/2}}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}}$.

22. а) $\int_0^{+\infty} e^{\sqrt{x}} dx$; б) $\int_1^2 \ln(x^2-1)\, dx$.

23. а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

24. а) $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^3}$; б) $\int_{-3}^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

25. а) $\int_0^{+\infty} e^{-3x} dx$; б) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-3}}$.

26. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{xdx}{4+x^2}$; б) $\int_1^e \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

27. а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\,(4+\ln^2 x)}$; б) $\int_0^1 \ln x^2\, dx$.

28. а) $\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-\sqrt{x}} dx$; б) $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{x+1} dx$.

29. а) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{2x^2-2x+1}$; б) $\int_0^1 x \ln x\, dx$.

30. а) $\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^3} dx;$ б) $\int_0^2 \sqrt{\frac{2+x}{2-x}} dx.$

7.2. *Дослідити на збіжність наступні інтеграли.*

1. а) $\int_1^{+\infty} \frac{x dx}{3+2x^2+3x^5};$ б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x\sqrt{x}} dx.$

2. а) $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{\sqrt{x^6+1}};$ б) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}}.$

3. а) $\int_3^{+\infty} \frac{\arcsin\frac{1}{x}}{4+x^2\sqrt{x}} dx;$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt{x}}-1}.$

4. а) $\int_0^{+\infty} \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{x^5+1}} dx;$ б) $\int_2^3 \frac{dx}{3+x^2-4x}.$

5. а) $\int_0^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^3+1}} dx;$ б) $\int_0^1 \frac{x dx}{e^{x^5}-1}.$

6. а) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3-1}};$ б) $\int_0^{10} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2\sqrt[4]{x}+x^3}.$

7. а) $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/x}-1}{\sqrt{x}} dx;$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}.$

8. а) $\int_1^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4} dx;$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x^3}.$

9. а) $\int_0^{+\infty} \frac{2x}{x^3+1} dx;$ б) $\int_0^3 \frac{\ln\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)}{e^{\sin x}-1} dx.$

10. а) $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{\sqrt[3]{(x^2+16)^5}};$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^4}}.$

11. а) $\int_\pi^{+\infty} \frac{2+\cos x}{x^5} dx;$ б) $\int_0^1 \frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} dx.$

12. а) $\int_1^{+\infty} \frac{3+\sin x}{\sqrt[3]{x}} dx;$ б) $\int_{-2}^2 \frac{2x}{x^2-4} dx.$

13. а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x}};$ б) $\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{e^{3x}-1}} dx.$

14. а) $\int_{10}^{+\infty} \frac{\arcsin\frac{\pi}{x}}{\pi \sin\frac{1}{x}} dx;$ б) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

15. а) $\int_2^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^4+1}} dx;$ б) $\int_0^3 \frac{dx}{27-x^3}.$

16. а) $\int_1^{+\infty} \frac{\sin\frac{1}{x}}{2+x\sqrt{x}}\,dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{x^4+x^2}$.

17. а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(2x+1)^2+1}$; б) $\int_0^e \frac{dx}{e^x-1}$.

18. а) $\int_2^{+\infty} \frac{x^{14}dx}{(x^3+x+1)^5}$; б) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{x\sqrt{9x^2-1}}$.

19. а) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2+\sqrt{x}}\sin\frac{1}{x}\,dx$; б) $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{(1-x^4)^5}}$.

20. а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{1+x^{10}}$; б) $\int_0^{\pi} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$.

21. а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^5+x}}$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{(e^x-1)^2}$.

22. а) $\int_2^{+\infty} \frac{x^7dx}{(x^3+2x+1)^3}$; б) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1-x^2}\,dx$.

23. а) $\int_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^4+1}\,dx$; б) $\int_0^1 \frac{dx}{e^{\sqrt[3]{x}}-1}$.

24. а) $\int_0^{+\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^3+1}}$; б) $\int_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt[3]{1-x^2}}\,dx$.

25. а) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{+\infty} \frac{3+\sin x}{x^2}\,dx$; б) $\int_2^4 \frac{xdx}{\sqrt[4]{x^4-16}}$.

26. а) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{2x+x^9+1}}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\frac{1}{x}\frac{dx}{x^2}$.

27. а) $\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{arctg}\,x}{\sqrt[3]{x^9+1}}\,dx$; б) $\int_{-1}^0 \frac{\sqrt{x}dx}{x^3+1}$.

28. а) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{3x^2+\sqrt[3]{x^5+1}}$; б) $\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{1-\cos x}}\,dx$.

29. а) $\int_2^{+\infty} \frac{4+\arccos\frac{1}{x}}{\sqrt{x}}\,dx$; б) $\int_1^2 \frac{xdx}{\sqrt[3]{x^3-1}}$.

30. а) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x^2+1}+3}$; б) $\int_0^3 \frac{x}{\sqrt[3]{9-x^2}}\,dx$.

Тема 8. ЗАСТОСУВАННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛА

ТЕОРЕТИЧНІ ПИТАННЯ

1. Обчислення площ плоских фігур. Площа у прямокутних декартових координатах. Обчислення площі за параметричного задання контуру. Площа криволінійного сектора у полярних координатах.

2. Знаходження довжини дуги кривої, заданої явним, параметричним рівняннями і рівнянням у полярній системі координат.

3. Обчислення об’ємів тіл із заданим поперечним перерізом та тіл обертання. Обчислення площ поверхонь обертання.

4. Обчислення статичних моментів та моментів інерції. Координати центрів мас плоских областей та дуг кривих.

НАВЧАЛЬНІ ЗАДАЧІ

1. Обчисліть площі фігур, обмежених кривими

1) $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}, y = 0, x = 1;$ 2) $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x.$

Розв’язання. 1) Із побудованого за умовою рис. 8.1 отримаємо фігуру, обмежену зверху кривою $y = \frac{x}{(x^2+1)^2}, y = 0, x = 1$, а знизу віссю Ох, прямими $x = 0$ і $x = 1$ ($0 \leq x \leq 1$) (фігура не є симетричною),

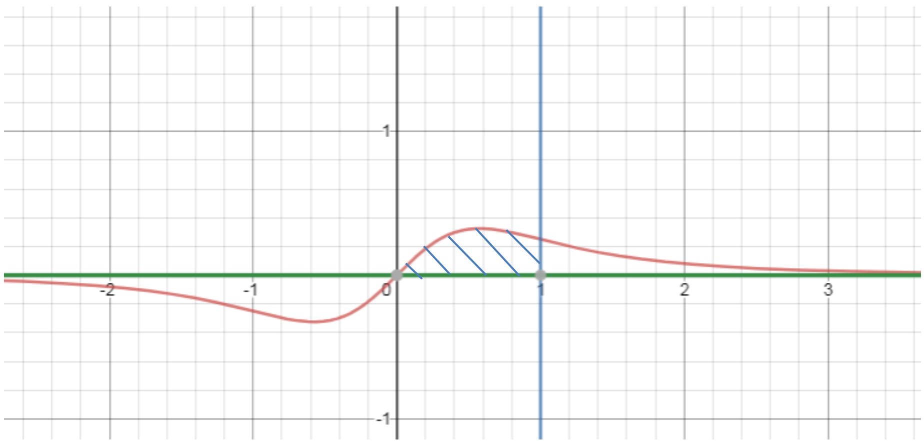


Рисунок 8.1

тому із формули для обчислення площі криволінійної трапеції, обмеженої відрізком [a;b] на осі OX, прямими x = a та $x = b$ і графіком неперервної, невід'ємної функції $y = f(x)$

$$S = \int_a^b f(x)\,dx$$

маємо

$$S = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2}\,dx = \left| \begin{matrix} d(x^2+1) = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}d(x^2+1) \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{d(x^2+1)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (x^2+1)^{-2} d(x^2+1) = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{-2+1}}{-2+1}\bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}\bigg|_0^1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - 1\right) = \frac{1}{4} \text{ (кв.од).}$$

2) Розв'язавши систему $\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{cases}$ визначимо точки перетину парабол $A(-1;\ 3)$ і $B(2;\ 0)$.

Парабола $y = 4 - x^2$ обмежує фігуру зверху, а парабола $y = x^2 - 2x$ знизу. Тому за формулою

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx\,, a \le x \le b,$$

$$f_2(x) \ge f_1(x)$$

маємо відповідно для $-1 \le x \le 2$ та $f_2(x) = 4 - x^2$, $f_1(x) = x^2 - 2x$:

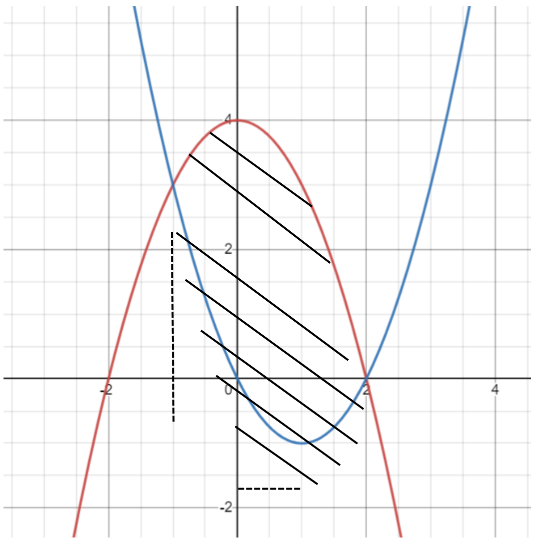


Рисунок 8.2

$$S = \int_{-1}^2 (4 - x^2 - (x^2 - 2x))dx =$$

$$= \int_{-1}^2 (4 - 2x^2 + 2x)dx = \left(4x - 2\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2}\right)\bigg|_{-1}^2 =$$

$$= \left(4 \cdot 2 - 2\frac{2^3}{3} + 2^2\right) - \left(4 \cdot (-1) - 2\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2\right) = 9 \text{ (кв.од).}$$

2. Обчислити площі фігур, обмежених лініями, що задані рівняннями

1) $\begin{cases} x = 4(t - \sin t) \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases}, 0 \le x \le 8\pi, y \ge 6;$

2) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}, x = 1 (x \ge 1).$

Розв'язання. а) Задана крива є циклоїдою; максимальне значення y дорівнює $4 \cdot 2$, тобто 8. Оскільки $x \in [0; 8\pi]$,то це означає, що задано лише одну арку циклоїди. Рівняння $y = 6$ задає пряму.

Щоб знайти площу фігури $ABECD$, необхідно знайти такі

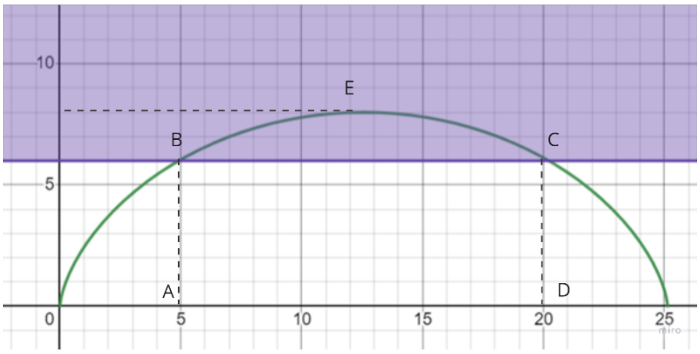


Рисунок 8.3

значення t, за яких відбувається перетин прямої та циклоїди. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = 6 \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases} \Rightarrow 6 = 4(1 - \cos t) \Rightarrow 1 - \cos t = \frac{6}{4} \Rightarrow \cos t = -\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \pm\left(\pi - arccos\frac{1}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z; \Rightarrow t = \pm\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2\pi n, n \in Z.$$

Відповідно до умови прикладу, маємо такі корені: $t_1 = \frac{2\pi}{3}, t_2 = \frac{4\pi}{3}$.

Площу фігури $ABECD$ можна знайти за формулою

$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt, t_1 \le t \le t_2$. Тоді

$$S_{ABECD} = \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} 4(1 - \cos t)4(t - \sin t)'dt = 16\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (1 - \cos t)^2 dt =$$

$$= 16\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt = 16\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \left(1 - 2\cos t + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt =$$

$$= 16\left(\frac{3}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} dt - 2\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos t\, dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos 2t\, dt\right) =$$

$$= 16\left(t - 2sint + \frac{1}{4}\sin 2t\right)\Big|_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} = 16\pi + 36\sqrt{3}.$$

Обчислимо площу прямокутника $ABCD$ довжиною $AB = 6$ і шириною $AD = x_2 - x_1 = x(t_2) - x(t_1)$ для $x = 4(t - \sin t)$ маємо при $t_1 = \frac{2\pi}{3}, t_2 = \frac{4\pi}{3}$, тоді

$$x_2 - x_1 = x\left(\frac{4\pi}{3}\right) - x\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 4\left(\frac{4\pi}{3} - \sin\frac{4\pi}{3}\right) - 4\left(\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{8\pi}{3} + 4\sqrt{3}.$$

Отже,

$$S_{ABCD} = AD \cdot AB = \left(\frac{8\pi}{3} + 4\sqrt{3}\right) \cdot 6 = 16\pi + 24\sqrt{3}$$

Остаточно, $S_{BEC} = S_{ABECD} - S_{ABCD} = \left(16\pi + 36\sqrt{3}\right) - \left(16\pi + 24\sqrt{3}\right) = 12\sqrt{3}$ (кв.од).

2) Крива, задана рівняннями $\begin{cases} x = 8\cos^3 t \\ y = 8\sin^3 t \end{cases}$, є астроїда, і нерівність $x \geq 1$ однозначно визначає зафарбовану на рисунку фігуру.

Знайдемо значення параметра, які визначають точки перетину прямої $x = 1$ і астроїди. Для цього знайдемо розв'язок системи:

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 8\cos^3 t \end{cases} \Rightarrow 1 = 8\cos^3 t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^3 t = \frac{1}{8} \Rightarrow \cos t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \pm\frac{\pi}{3}.$$

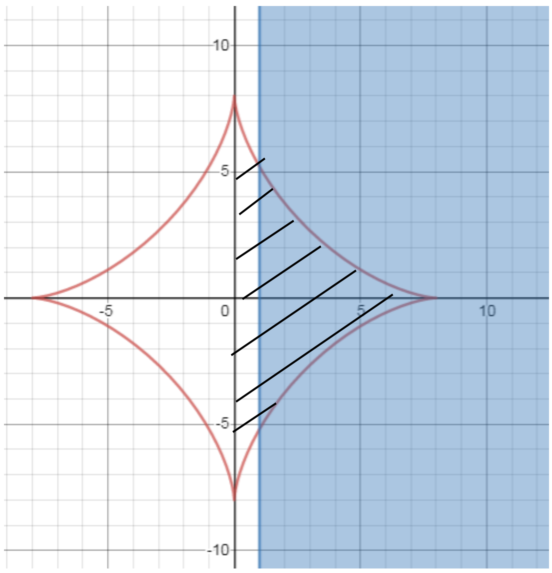


Рисунок 8.4

Фігура симетрична щодо осі абсцис, тому обчислимо площу верхньої половинки (міститься у I чверті) площі , а результат подвоїмо.

Підставимо значення $t = \frac{\pi}{3}$ в параметричне рівняння $y(t) = 8\sin^3 t$:

$$y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 8\sin^3\frac{\pi}{3} = 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 8 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{8} = 3\sqrt{3}.$$

В результаті отримане значення буде координатою верхньої точки перетину астроїди і прямої $x = 1$.

Правій вершині астроїди, очевидно, відповідає значення $t = 0$. Виконаємо перевірку:

$$\begin{cases} x(0) = 8\cos^3\ 0 = 8 \\ y(0) = 8\sin^3\ 0 = 0. \end{cases}$$

Параметричні рівняння «зображують» дугу астроїди справа наліво. При зростанні параметра t від 0 до 2π крива робить повний обхід проти руху стрілки годинника. При зміні параметра в межах $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$ функція $x(t) = 8\cos^3\ t$ спадає, отже за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\,, t_1 \le t \le t_2.$$

маємо (проти руху стрілки годинника $0 \le t \le \frac{\pi}{3}$, за годинниковою $\frac{\pi}{3} \le t \le 0$):

$$S = \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} 8\sin^3\ t\,(8\cos^3\ t)'dt = -\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 8\sin^3\ t\cdot 8\cdot 3\cos^2\ t\,(-\sin t)dt =$$

$$= 192\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^4\ t\cdot\cos^2\ t\,dt = 192\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\ t\cdot\cos^2\ t\cdot\sin^2\ t\,dt =$$

$$= 192\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\ t\cdot(\sin t\cos t)^2 dt = 192\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\ t\cdot\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt =$$

$$= \frac{192}{4}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sin^2\ t\cdot\sin^2\ 2t\,dt = 48\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{2}(\cos t - \cos 3t)\right)^2 dt =$$

$$= \frac{48}{4}\left(\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\ t\,dt - 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos t\cos 3t\,dt + \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2\ 3t\,dt\right) =$$

$$= 12\left(\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 2t)dt - 2\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2}(\cos 2t + \cos 4t) + \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{3}}(1+\cos 6t)dt\right) =$$

$$= 6\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} - 12\left(\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} + 6\left(t + \frac{1}{6}\sin 6t\right)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} =$$

$$= 12t - 3\sin 2t - 3\sin 4t + \sin 6t\Big|_{0}^{\frac{\pi}{3}} = 12\frac{\pi}{3} - 3\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\frac{-\sqrt{3}}{2} = 4\pi \text{ (кв.од).}$$

Тоді площа цілої фігури $S_{Ф} = 2S = 8\pi$ (кв.од).

3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями, що задані рівняннями в полярних координатах $\rho = 14\cos 3\varphi, \rho = 7 (\rho \geq 7)$.

Розв'язання. Перше з рівнянь визначає коло з центром у точці O(0; 0) та радіусом $\rho = 7$. Друге рівняння задає трипелюсткову „троянду”.

Знайдена фігура, площу S якої необхідно знайти, складається з трьох рівновеликих частин. Знайдемо площу S_1 однієї з цих частин, наприклад.

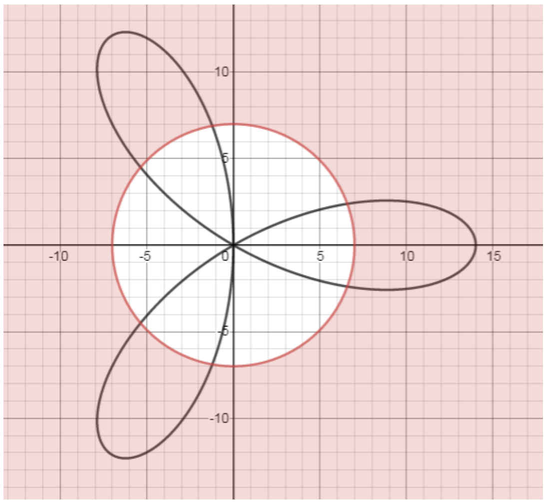


Рисунок 8.5

Шукаємо точки перетину кривих із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \rho = 7 \\ \rho = 14\cos 3\varphi \end{cases} \Rightarrow 7 = 14\cos 3\varphi \Rightarrow \cos 3\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow 3\varphi = \pm arccos\frac{1}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\Rightarrow 3\varphi = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z \Rightarrow \varphi = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi n, n \in Z.$$

Відповідно умові прикладу маємо значення коренів: $\varphi = \pm\frac{\pi}{9}$, тобто $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{9}; \frac{\pi}{9}\right]$. Тоді, із формули для площі S криволінійного сектора у полярних координатах сектора, $S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$, одержимо

$$S_1 = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}((14\cos 3\varphi)^2 - 7^2)d\varphi = \frac{49}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}(4\cos^2 3\varphi - 1)d\varphi =$$

$$= \frac{49}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}(2(1 + \cos 6\varphi) - 1)d\varphi = \frac{49}{2}\int_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}}(1 + 2\cos 6\varphi)d\varphi =$$

$$= \frac{49}{2}\left(\varphi + \frac{1}{3}\sin 6\varphi\right)\Big|_{-\frac{\pi}{9}}^{\frac{\pi}{9}} = \frac{49}{2}\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{2}\right) = 49\left(\frac{\pi}{9} + \frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ (кв.од)},$$

$$S = 3S_1 = 49\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ (кв.од)}.$$

4. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівнянням в прямокутній системі координат $y = chx + 3, 0 \le x \le 1$.

Розв'язання. Скористаємося формулою

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y'(x))^2}\, dx.$$

Знайдемо похідну

$$y'(x) = (ch\, x + 3)' = sh\, x, 0 \le x \le 1.$$

Отже, $l = \int_0^1 \sqrt{1 + sh^{\,2} x}\, dx =$

$= |ch^{\,2} x - sh^{\,2} x = 1| \int_0^1 ch\, x\, dx = sh\, x|_0^1 =$

$= \frac{e - e^{-1} - 1 + 1}{2} = \frac{e}{2} - \frac{1}{e}.$ (лін.од.)

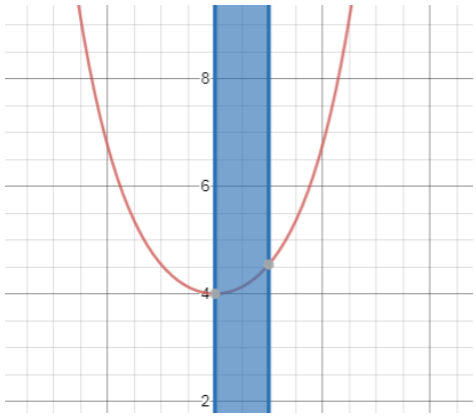


Рисунок 8.6

5. Обчислити довжину дуги кривої, заданої параметричним рівнянням

$$\begin{cases} x = 8(\cos t + t \sin t) \\ y = 8(\sin t - t \cos t) \end{cases}, \ 0 \le t \le \pi/4.$$

Розв'язання. Крива має вигляд розгортки круга (рис. 8.7 а)). У випадку $0 \le t \le \pi/4$ маємо дугу кривої (рис. 8.7 б)).

Довжину дуги знаходимо за формулою

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x_t')^2 + (y_t')^2}\, dt,$$

де

$$x_t' = (8(\cos t + t \sin t))' = -8 \sin t + 8 \sin t + 8t \cos t = 8t \cos t,$$

$$y_t' = (8(\sin t - t \cos t))' = 8 \cos t - 8 \cos t + 8t \sin t = 8t \sin t,$$

$$(x_t')^2 + (y_t')^2 = (8t \cos t)^2 + (8t\, sin\, t)^2 = 64t^2 \cos^2 t + 64t^2 \sin^2 t = 64t^2.$$

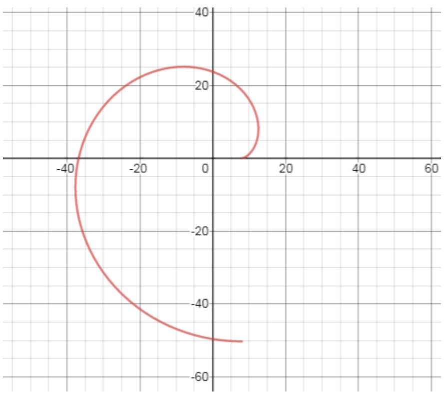


Рисунок 8.7 а)

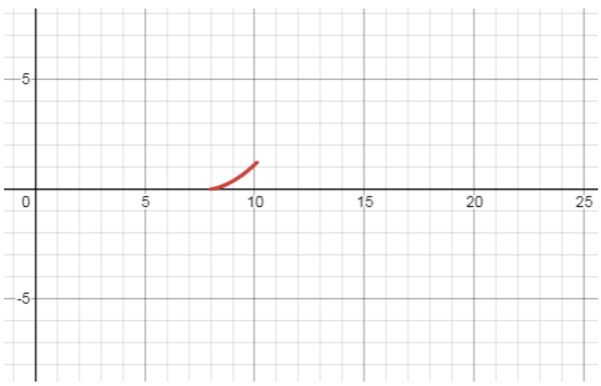


Рисунок 8.7 б)

Отже,

$$l = \int_0^{\pi/4} \sqrt{64t^2}\, dt = 8\int_0^{\pi/4} t\, dt = 8\frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi/4} = 4\left(\frac{\pi^2}{16} - 0\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$ (лін.од.)

6. Обчислити довжину дуги кривої, заданої рівнянням в полярних координатах $\rho = 8(1 - \cos\varphi), -\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq 0$.

Розв'язання. Використаємо формулу для обчислення довжини дуги отриманої кардіоїди

$$l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\, d\varphi.$$

З того, що $\rho = 8(1 - \cos\varphi)$ випливає, що

$$\rho' = 8\sin\varphi\,;$$

$$\rho^2 + (\rho')^2 = 64(1 - \cos\varphi)^2 + 64\sin^2\varphi =$$

$$= 64 - 128\cos\varphi + 64\cos^2\varphi + 64\sin^2\varphi =$$

$$= 128 - 128\cos\varphi.$$

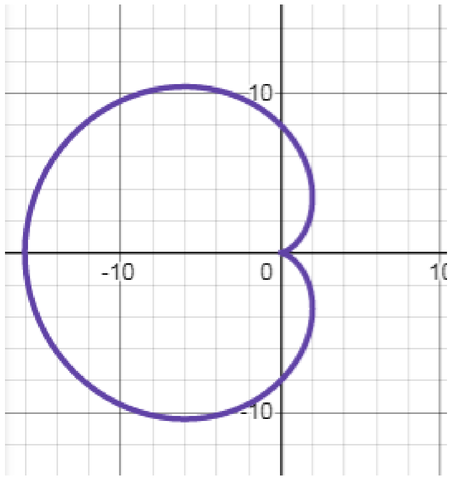


Рисунок 8.8

Отже, при $-\frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq 0$ маємо:

$$l = \int_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \sqrt{128 - 128\cos\varphi}\, d\varphi = \sqrt{128}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \sqrt{1 - \cos\varphi}\, d\varphi =$$

$$\sqrt{128}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \sqrt{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = \sqrt{128\cdot 2}\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \sqrt{\sin^2\frac{\varphi}{2}}\, d\varphi = 16\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \left|\sin\frac{\varphi}{2}\right| d\varphi =$$

$$= -16\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\varphi = -16\cdot 2\int_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} \sin\frac{\varphi}{2}\, d\frac{\varphi}{2} =$$

$$= -32\left(-\cos\frac{\varphi}{2}\right)\Big|_{-\frac{2\pi}{3}}^{0} = -32\left(-\cos 0 + \cos\frac{2\pi}{6}\right) = -32\left(-1 + \frac{1}{2}\right) = 16.$$ (лін.од.)

7. Обчислити об'єм тіла, обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, a > 0, b > 0, c > 0$.

Розв'язання. Знайдемо об'єм даного тіла за відомою площею $S(x)$ перерізу його площиною, перпендикулярною до осі *Ox*:

$$V = \int_a^b S(x)dx.$$

Перетином еліпсоїда площиною $x = h$ є еліпс $\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)} = 1$ з півосями $b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$ і $c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}$, $-a \le x \le a$ (рис. 8.9). Площа отриманого перетину (як площа еліпсу):

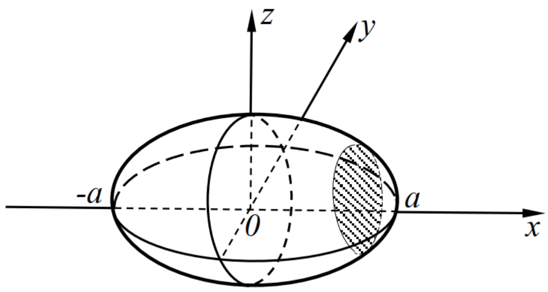


Рисунок 8.9

$$S(h) = \pi\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right)\left(c\sqrt{1-\frac{h^2}{a^2}}\right) = \pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right).$$

Тоді, за формулою обчислення об'єму тіла з відомою площею $S(h)$, отримаємо:

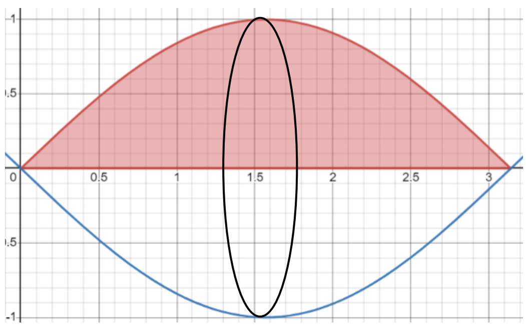
$$V = \int_{-a}^{a} S(h)dh = \int_{-a}^{a} \pi bc\left(1-\frac{h^2}{a^2}\right)dh = \pi bc\left(h-\frac{h^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc. \text{ (куб.од.)}$$

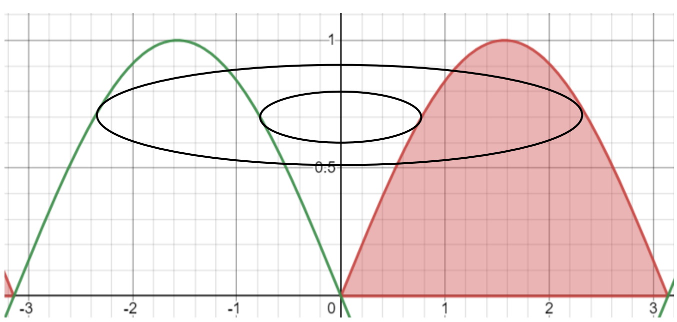
8. Знайти об'єм тіла, що обмежене поверхнею, утвореною обертанням відрізків наступних ліній $y = \sin x\ (0 \le x \le \pi), y = 0$

а) навколо осі *Ox*, б) навколо вісі *Oy*.

Розв'язання. а) На рис. 8.10 а) зображено відповідну криволінійну трапецію *D*, що обертається навколо осі *Ox* і схему цього обертання. Об'єм утвореного тіла дорівнює

$$V_x = \pi\int_0^{\pi} y^2(x)dx = \pi\int_0^{\pi} \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos 2x)\, dx$$





$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}. \text{ (куб.од.)}$$

Рисунок 8.10 а) Рисунок 8.10 б)

б) Відповідно до рис. 8.10 б) і формули для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції, обмеженої $y = \sin x \ (0 \leq x \leq \pi), y = 0$, навколо осі *Oy,* маємо:

$$V_y = 2\pi \int_0^{\pi} xy(x)dx = 2\pi \int_0^{\pi} x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x & dv = \sin x dx \\ du = dx & v = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= 2\pi\left(-x \ \cos x|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x \ dx\right) = 2\pi(\pi + \sin x|_0^{\pi}) = 2\pi^2. \text{ (куб.од.)}$$

9. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі ***Ox*** **криволінійної трапеції, обмеженої лініями** $x^2 + y^2 = 2, y = x^2, x = 0 \ (x \geq 0)$.

Розв'язання. Знайдемо координати точки перетину ліній *A* (рис. 8.11), розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^2, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Тоді отримаємо точку $A(1,1)$. Із формули для знаходження об'єму тіла, утвореного обертанням криволінійної трапеції навколо осі абсцис маємо:

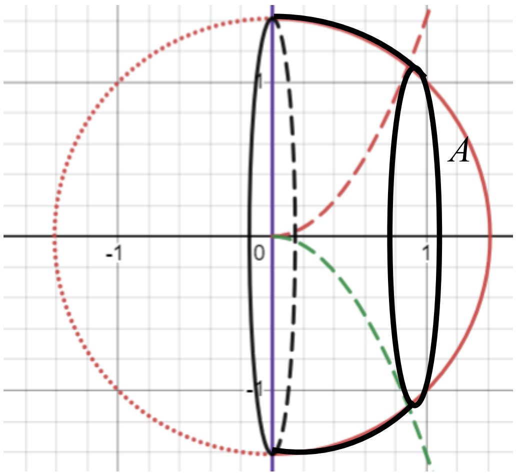


Рисунок 8.11

$$V_x = \pi \int_0^1 \left((2 - x^2) - (x^2)^2\right)dx =$$

$$= \pi\left(2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 - \pi \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 = \frac{22}{15}\pi. \text{ (куб.од.)}$$

10. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням:

а) параболи $y^2 = 2px$ **навколо осі** ***Ox*** **та обмеженої площиною** $x = H$;

б) лемніскати Бернуллі $\rho^2 = 4\cos 2\varphi$ (рис. 8.13) **навколо полярної осі.**

Розв'язання. а) Площу поверхні обчислимо за формулою

$$S_{\text{пов}} = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

У нашому випадку $f(x) = \sqrt{2px}, f'(x) = \frac{2p}{2\sqrt{2px}} = \frac{p}{\sqrt{2px}}, 0 \leq x \leq H$ (рис. 8.12), тому

$$S_{\text{пов}} = 2\pi \int\limits_0^H \sqrt{2px}\sqrt{1+\frac{p}{2x}}dx = 2\pi\sqrt{p}\int\limits_0^H \sqrt{2x+p}dx =$$

$$= \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}(2x+p)^{3/2}\Big|_0^H = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}(2H+p)^{3/2} - \frac{2\pi p^2}{3}. \text{ (кв.од.)}$$

б) Із формули $S_{\text{пов}} = 2\pi\int_a^b \rho\sin\varphi\sqrt{(\rho(\varphi))^2+(\rho'(\varphi))^2}d\varphi$ враховуючи, що $\rho(\varphi) = 2\sqrt{\cos 2\varphi}$, $\rho'(\varphi) = -\frac{2\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ та симетричність лемніскати відносно обох осей, маємо для $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$:

$$S_{\text{пов}} = 2\cdot 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} 2\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi\sqrt{4\cos 2\varphi + \frac{4\sin^2\varphi}{\cos 2\varphi}}d\varphi =$$

$$= 4\pi\cdot 4\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\, d\varphi = 16\pi(-\cos\varphi)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 16\pi\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \text{ (кв.од.)}$$

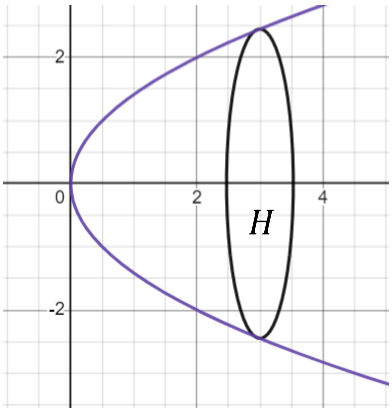


Рисунок 8.12

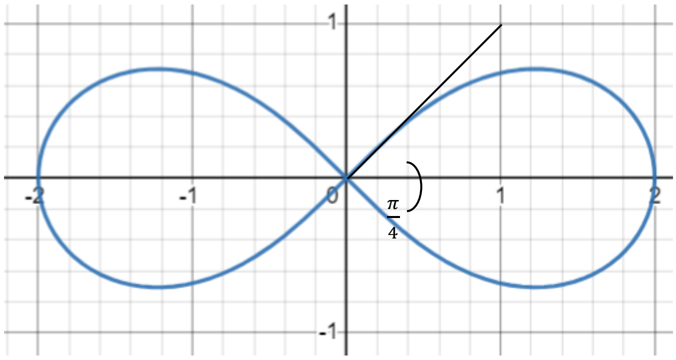


Рисунок 8.13

11. Для півкола, заданого рівнянням $y = \sqrt{25-x^2}$ знайти: а) статичний момент відносно осі *Ox;* б) момент інерції відносно осі *Ox;* в) координати центра ваги.

Розв'язання. Шукані статичний момент M_x та момент інерції I_x знаходимо за відповідними формулами:

$$M_x = \int_a^b y\sqrt{1+(y'(x))^2}dx\,;\; I_x = \int_a^b y^2\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

Для $y(x)=\sqrt{25-x^2},\ -5\le x\le 5$ маємо $y'(x)=-\frac{x}{\sqrt{25-x^2}}$, $\sqrt{1+(y'(x))^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{25-x^2}}=\frac{5}{\sqrt{25-x^2}}$.

а) Обчислимо статичний момент M_x:

$$M_x=\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}\frac{5}{\sqrt{25-x^2}}dx=5\int_{-5}^{5}dx=5x|_{-5}^{5}=50.$$

б) Обчислимо тепер момент інерції I_x:

$$I_x=\int_{-5}^{5}(25-x^2)\frac{5}{\sqrt{25-x^2}}dx=5\int_{-5}^{5}\sqrt{25-x^2}dx=10\int_{0}^{5}\sqrt{25-x^2}dx=$$

$$=\left|\begin{matrix}x=5\sin t\\ dx=5\cos t dt\\ x=0\Rightarrow t=0\\ x=5\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}\end{matrix}\right|=10\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{25-25\sin^2 t}\,5\cos t dt=250\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=$$

$$=250\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=125\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt=125\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{125\pi}{2}.$$

в) Обчислимо координати центра ваги кривої за формулами:

$$x_c=\frac{M_y}{l},\ y_c=\frac{M_x}{l},\text{ де } l \text{ – довжина кривої.}$$

Оскільки довжина дуги півкола $l=5\pi$, $M_x=50$ і центр ваги півкола знаходиться на осі Ox, тобто $x_c=0$, а

$$y_c=\frac{M_x}{l}=\frac{50}{5\pi}=\frac{10}{\pi}.$$

Отже, центром ваги заданої дуги півкола є точка $C\left(0,\frac{10}{\pi}\right)$.

12. Для фігури, розміщеної у першій чверті та обмеженої дугою еліпса $x=3\cos t, y=2\sin t$ і осями координат, знайти: а) статичний момент відносно осі *Oy;* б) момент інерції відносно осі *Oy;* в) координати центра ваги.

Розв'язання. Задана фігура має вигляд:

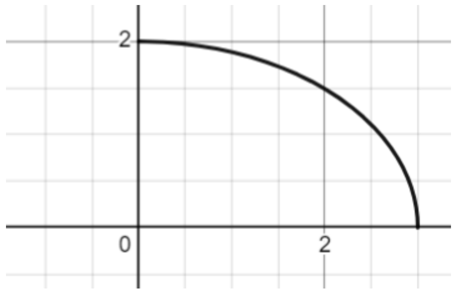


Рисунок 8.14

а) Статичний момент M_y відносно осі Oy знаходимо за формулою:

$$M_y = \int_0^a xydx = \left| \begin{matrix} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \\ dx = -3\sin t\, dt \\ x = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{2} \\ x = 3 \Rightarrow t = 0 \end{matrix} \right| = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 3\cos t \cdot 2\sin t\,(-3\sin t)\,dt =$$

$$= 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \sin^2 t\,dt = 18\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,d(\sin t) = 18\frac{\sin^3 t}{3}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 6.$$

б) Момент інерції I_y відносно осі Oy знаходимо за формулою:

$$I_y = \int_a^a x^2ydx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 9\cos^2 t \cdot 2\sin t\,(-3\sin t)\,dt = 54\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \cdot \sin^2 t\,dt =$$

$$= \frac{54}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\,dt = \frac{54}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4t)dt = \frac{27}{4}\left(t - \frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{27\pi}{8}.$$

в) Обчислимо координати центра ваги кривої за формулами:

$x_c = \frac{M_y}{S}, y_c = \frac{M_x}{S}$, де S – площа фігури.

Оскільки площа чверті даного еліпса $S = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$, $M_y = 6$, то

$$x_c = \frac{M_y}{S} = \frac{6}{\frac{3\pi}{2}} = \frac{12}{3\pi} = \frac{4}{\pi},$$

$$y_c = \frac{M_x}{S} = \frac{2}{3\pi}\frac{1}{2}\int_0^a y^2dx = \frac{1}{3\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} 4\sin^2 t\,(-3\sin t)\,dt =$$

$$= -\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos^2 t)d(\cos t) = -\frac{4}{\pi}\left(\cos t - \frac{\cos^3 t}{3}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{3\pi}.$$

Отже, центром ваги заданої кривої є точка С$\left(\frac{4}{\pi},\frac{8}{3\pi}\right)$.

Індивідуальне завдання №8. Застосування визначеного інтеграла

8.1. *Обчисліть площі фігур, обмежених кривими.*

1. $y = x^2, y = 2 - x^2$;
2. $y = x^2 + 2x, y = 2 + x$;
3. $y^2 = x^3, y = 8, x = 0$;
4. $y = -x^2 + 4x, y = x^2 - 4x$;
5. $y = 4 + x, y = x^2 - 4x$;
6. $4y = x^2, y^2 = 4x$;
7. $y = x^2, y = 8 - x^2$;
8. $2y = x^3, y^2 = 2x$;
9. $y = (x+1)^2, y^2 = x + 1$;
10. $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$;
11. $y = x^2 - 2x - 1, 2y = 3x - 2$;
12. $y = 3x - 4, y = -x^2$;
13. $y = x^3, y = 2 - x, x = 0$;
14. $y = (x-2)^3, y = 4x - 8$;
15. $x = y^2 - 2, y = -x$;
16. $y^2 = 4 - x, x = y^2 - 2y$;
17. $x = y^2 + 2y - 2, y = -x - 2$;
18. $y^2 = x^3, x = 4$;
19. $y = x^2 + 6x, y = -x^2$;
20. $y = x^2, 2y = 6 - x^2$.
21. $xy = 4, y = 1, y = x + 3$;
22. $5y = x^2, y^2 = 5x$;
23. $y = (x-1)^2, y^2 = x - 1$;
24. $x = \sqrt{4 - y^2}, y = 0$;
25. $y = x^2 + 3x, y = 3 + x$;
26. $y^2 = x^3, y = 0, x = 8$;
27. $y = \sqrt{4 - x^2}, y = 0, x = 0, x = 1$;
28. $y = x^2 + 5x, y = 5 + x$
29. $y = x^2 - 2x, y = 2 - x$;
30. $y = x^2, y = 50 - x^2$.

8.2. *Обчисліть площі фігур, межі яких задані у полярній системі координат.*

1. $\rho = \cos\varphi, \rho = 2\cos\varphi$;

2. $\rho = \sin 3\varphi$;

3. $\rho = 2\sin\varphi, \rho = 3\sin\varphi$;

4. $\rho = \cos 2\varphi$;

5. $\rho = \cos 3\varphi$;

6. $\rho = 3\cos 2\varphi$;

7. $\rho = \cos\varphi, \rho = \sin\varphi \ \left(0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}\right)$;

8. $\rho = 2\cos 2\varphi$;

9. $\rho = \cos\varphi, \rho = 3\cos\varphi$;

10. $\rho = 2\cos 3\varphi$;

11. $\rho = \sin\varphi, \rho = 2\sin\varphi$;

12. $\rho = 3\sin 5\varphi$;

13. $\rho = 2\cos 4\varphi$;

14. $\rho = 3\cos 3\varphi$;

15. $\rho = \sin\varphi, \rho = 3\sin\varphi$;

16. $\rho = 2\sin 6\varphi$;

17. $\rho = 2\cos 6\varphi$;

18. $\rho = 2\sin 3\varphi$;

19. $\rho = 3\sin 3\varphi$;

20. $\rho = 2\cos 5\varphi$;

21. $\rho = 3\cos 4\varphi$;

22. $\rho = 3\sin 3\varphi$;

23. $\rho = 2\cos\varphi, \rho = 4\cos\varphi$;

24. $\rho = 3\cos 5\varphi$;

25. $\rho = \sin\varphi, \rho = 4\sin\varphi$;

26. $\rho = 2\sin 4\varphi$;

27. $\rho = 6\sin 3\varphi, \rho = 3 (\rho \ge 3)$;

28. $\rho = 2\cos 6\varphi$;

29. $\rho = 4\cos 3\varphi, \rho = 2 (\rho \ge 2)$;

30. $\rho = 3\cos 5\varphi$.

8.3. *Обчисліть площі фігур, межі яких задані параметрично.*

1. $\begin{cases} x = 6\cos t, \frac{5\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{6}; \\ y = 6\sin t, \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \frac{\pi}{6} \le t \le 0; \\ y = 3\sin^3 t; \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = 4\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t) \end{cases} \frac{\pi}{3} \le t \le \frac{5\pi}{3};$

4. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t\,, \\ y = 2\sin^3 t; \end{cases} \frac{\pi}{4} \le t \le 0;$

5. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t\,, \\ \ y = \sqrt{2}\sin t, \end{cases} \frac{3\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{4};$

6. $\begin{cases} x = 2\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases} \frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{4\pi}{3};$

7. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t\,, \\ y = 4\sin^3 t; \end{cases} \frac{\pi}{3} \le t \le 0;;$

8. $\begin{cases} x = 4\cos t\,, \\ y = 2\sin t, \end{cases} \frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{3};$

9. $\begin{cases} x = 6\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t) \end{cases} \frac{\pi}{3} \le t \le \frac{5\pi}{3};$

10. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t\,, \\ \ y = 3\sin^3 t; \end{cases} \frac{\pi}{3} \le t \le 0;$

11. $\begin{cases} x = 9\cos t\,, \\ y = 8\sin t, \end{cases} \frac{5\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{6};$

12. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t\,, \\ y = 4\sin^3 t; \end{cases} \frac{\pi}{6} \le t \le 0;$

13. $\begin{cases} x = 10\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t) \end{cases} \frac{2\pi}{3} \le t \le \frac{4\pi}{3};$

14. $\begin{cases} x = 3\sqrt{2}\cos t\,, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases} \frac{3\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{6};$

15. $\begin{cases} x = 6\cos t\,, \\ y = 4\sin t, \end{cases} \frac{5\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{6};$

16. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t\,, \\ \ y = 2\sin^3 t; \end{cases} \frac{\pi}{6} \le t \le 0;$

17. $\begin{cases} x = 8\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 8(1 - \cos t) \end{cases} \frac{\pi}{3} \le t \le \frac{5\pi}{3};$

18. $\begin{cases} x = 8\cos^3 t\,, \\ y = 4\sin^3 t; \end{cases} \frac{\pi}{4} \le t \le 0;$

19. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t\,, \\ y = 2\sqrt{2}\sin t, \end{cases} y = 2(y \ge 2);$

20. $\begin{cases} x = 16\cos^3 t\,, \\ \ y = 2\sin^3 t; \end{cases} x = 2(x \ge 2);$

21. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos^3 t\,, \\ \ y = \sqrt{2}\sin^3 t; \end{cases} x = 1(x \ge 1);$

22. $\begin{cases} x = 2\cos t\,, \\ y = 6\sin t, \end{cases} y = 3(y \ge 3);$

23. $\begin{cases} x = 4\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 4(1 - \cos t), \end{cases}$

$y = 4(0 < x < 8\pi, y \ge 4);$

24. $\begin{cases} x = 3\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases}$

$y = 3(0 < x < 6\pi, y \ge 3);$

25. $\begin{cases} x = 2\sqrt{2}\cos t\,, \\ y = 3\sqrt{2}\sin t, \end{cases} y = 3(y \ge 3);$

26. $\begin{cases} x = 32\cos^3 t\,, \\ \ y = \sin^3 t; \end{cases} x = 4(x \ge 4);$

27. $\begin{cases} x = 10\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 10(1 - \cos t), \end{cases}$

28. $\begin{cases} x = 6\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 6(1 - \cos t), \end{cases}$

$y = 15(0 < x < 20\pi, y \geq 15)$; $y = 6(0 < x < 12\pi, y \geq 6)$;

29. $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos t, \\ y = 4\sqrt{2}\sin t, \end{cases} y = 4(y \geq 4)$; 30. $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 6\sin t, \end{cases} y = 3(y \geq 3)$;

8.4. *Обчислити довжини дуг кривих.*

1. а) $y = \ln x, \sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{15}$; б) $\begin{cases} x = 5\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$;

2. а) $y = e^x + 6, \ln\sqrt{8} \leq x \leq \ln\sqrt{15}$; б) $\begin{cases} x = 10\cos^3 t, \\ y = 10\sin^3 t; \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$;

3. а) $y = e^x + e, \ln\sqrt{3} \leq x \leq \ln\sqrt{15}$; б) $\rho = 2e^{4\varphi/3}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;

4. а) $3y^2 = x^3, 0 \leq x \leq 8$; б) $\begin{cases} x = 6(\cos t + t\sin t), \\ y = 6(\sin t - t\cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$;

5. а) $y = \ln(1 - x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{4}$; б) $\begin{cases} x = 3\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 3(1 - \cos t), \end{cases} \pi \leq t \leq 2\pi$;

6. а) $\rho = 2(1 - \cos\varphi), -\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2}$; б) $\begin{cases} x = 6\cos^3 t, \\ y = 6\sin^3 t; \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$;

7. а) $y = x^2/2, 0 \leq x \leq 1$; б) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$;

8. а) $\rho = 3(1 + \sin\varphi), -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq 0$; б) $\begin{cases} x = 3(\cos t + t\sin t), \\ y = 3(\sin t - t\cos t), \end{cases} 0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$;

9. а) $y = \ln(1 + x^2), 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$; б) $\begin{cases} x = 2.5\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 2.5(1 - \cos t), \end{cases} \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$;

10. а) $y^2 = 3x^3, 0 \leq x \leq 5$; б) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$;

11. а) $y = \frac{1}{4}(3 + e^{2x} + e^{-2x}), 0 \leq x \leq 2$; б) $\begin{cases} x = 8\cos^3 t, \\ y = 8\sin^3 t; \end{cases} 0 \leq t \leq \pi$;

12. а) $\rho = 5(1 - \cos\varphi), -\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 0$; б) $\begin{cases} x = 5\,(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 5(1 - \cos t), \end{cases} \pi \leq t \leq 2\pi$;

13. а) $\rho = 2\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{3}{4}$; б) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$;

14. а) $y = \ln 7 - \ln x, \sqrt{3} \le x \le \sqrt{8}$; б) $\rho = 6(1 + \sin\varphi), -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le 0$;

15. а) $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), 0 \le x \le 1$; б) $\rho = 6e^{12\varphi/5}, -\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$;

16. а) $y = 2 - e^x, \ln\sqrt{3} \le x \le \ln\sqrt{8}$; б) $\begin{cases} x = 3\cos^3 t, \\ y = 3\sin^3 t; \end{cases} \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}$;

17. а) $y = \sqrt{2}e^{\varphi}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$; б) $\begin{cases} x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t, \end{cases} 0 \le t \le \pi$;

18. а) $y = e^x + 13, \ln\sqrt{15} \le x \le \ln\sqrt{24}$; б) $\rho = 1 - \sin\varphi, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$;

19. а) $y = \ln(1 - x^2), 0 \le x \le \frac{1}{2}$; б) $\begin{cases} x = 2\cos^3 t, \\ y = 2\sin^3 t; \end{cases} \frac{\pi}{4} \le t \le \frac{\pi}{2}$;

20. а) $y = 2\left(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}}\right), 0 \le x \le 4$; б) $\begin{cases} x = t - \sin t, \\ y = 1 - \cos t, \end{cases} -\pi \le t \le \pi$;

21. а) $y = 1 - \ln(x^2 - 1), 3 \le x \le 4$; б) $\rho = 12e^{12\varphi/5}, 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$;

22. а) $\rho = 7(1 - \sin\varphi), -\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{6}$; б) $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t, \end{cases} 0 \le t \le 1$;

23. а) $y = 2 + \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}), 0 \le x \le 1$; б) $\rho = 4\varphi, 0 \le \varphi \le 2$;

24. а) $y = \frac{x^2}{4} - \ln\sqrt{x}, 1 \le x \le 2$; б) $\begin{cases} x = 2(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \frac{\pi}{2} \le t \le \pi$;

25. а) $y = \ln\sin x, \frac{\pi}{3} \le x \le \frac{\pi}{2}$; б) $\begin{cases} x = 11\cos^3 t, \\ y = 11\sin^3 t; \end{cases} \frac{\pi}{6} \le t \le \frac{\pi}{3}$;

26. а) $\rho = 8\sin\varphi, \frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$; б) $\begin{cases} x = e^t(\cos t + \sin t), \\ y = e^t(\cos t - \sin t), \end{cases} \frac{\pi}{2} \le t \le \pi$;

27. а) $\rho = 3(1 - \sin\varphi), \frac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$; б) $\begin{cases} x = 2(\mathrm{t} - \sin t), \\ y = 2(1 - \cos t), \end{cases} \frac{\pi}{3} \le t \le \frac{\pi}{2}$;

28. а) $y = -\ln\cos x\,, 0 \le x \le \frac{\pi}{6}$; б) $\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{4}\cos 2t\,, \\ y = \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{4}\sin 2t\,, \end{cases} \frac{\pi}{2} \le t \le \frac{2\pi}{3}$;

29. а) $y = \ln(x^2 - 1)\,, 2 \le x \le 3$; б) $\rho = 2(1 - \cos\varphi), -\pi \le \varphi \le -\frac{\pi}{2}$;

30. а) $\rho = 3e^{\varphi}, \frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$; б) $\begin{cases} x = 3.5(2\cos t - \cos 2t), \\ y = 3.5(2\sin t - \sin 2t), \end{cases} 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Вища математика у прикладах і задачах. Ч. 2. Інтегральне числення функцій однієї змінної. Диференціальне та інтегральне числення функцій багатьох змінних / А. Д. Тевяшев, О.Г. Литвин, Г. М. Кривошеєва та ін. Харків : ХНУРЕ, 2002. 440 с.
2. Денисюк В. П., Репета В. К. Вища математика : підручник : у 2 ч. Ч. 1. К. : НАУ, 2013. 472 с.
3. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Практикум. (І курс І семестр) / Уклад.: І. В. Алєксєєва, В. О. Гайдей, О. О. Диховичний, Л. Б. Федорова. К: НТУУ «КПІ», 2013. 252 с.
4. Невласні інтеграли. Методичні вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів теплоенергетичного факультету денної та заочної форм навчання / Уклад.: Є.В. Массалітіна, О.М. Шевцова. К.: НТУУ «КПІ», 2013. 48 с.
5. Курченко О.О. Інтегральне числення функцій однієї змінної: навч. посібник. К., 2016. 140 с.
6. Невизначені інтеграли: Метод. вказівки до викон. типової розрахунк. роботи з матем. аналізу для студ. 1 курсу фіз.-мат. ф-ту / Уклад.: З.П. Ординська, Л.А. Репета, В.В. Дрозд. К.: НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2017. 81 с.
7. Сливка-Тилищак Г.І., Тегза А.М., Федорянич Т.В. Методичні вказівки до лабораторних робіт з математичного аналізу для студентів математичного факультету. Частина V. Ужгород, 2007. 56 с.
8. Дубініна О. М. Визначений інтеграл і система комп'ютерної математики MathCad: навчально-методичний посібник Харків: НТУ «ХПІ», 2017. 225 с.
9. Інтегральне числення функції однієї змінної. Гамма- та бета-функції: Практикум для студентів І курсу фізико-математичного факультету: навч. посіб. для студ. спеціальності 111 «Математика», спеціалізації «Комп'ютерне та математичне моделювання динамічних систем», «Страхова та фінансова математика» / О. О. Дем'яненко, В.В. Дрозд, В.А. Жук ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. К.: НТУУ «КПІ імені Ігоря Сікорського», 2018. 123 с.

Відповідальний за випуск: завідувач кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу доктор фіз.-мат. наук, доц. Сливка-Тилищак Г.І.

Укладачі: канд. фіз.-мат. наук, доц. Боярищева Т.В., канд. фіз.-мат. наук Герич М.С., канд. фіз.-мат. наук, доц. Погоріляк О.О., канд. фіз.-мат. наук, доц. Синявська О.О.

Рецензенти: докт. техн. наук, проф. Гече Ф.Е.,
канд. фіз-мат. наук., доц. Млавець Ю.Ю.

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ ДО ВИКОНАННЯ ТИПОВИХ ІНДИВІДУАЛЬНИХ ЗАВДАНЬ

З МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

ДЛЯ СТУДЕНТІВ ФАКУЛЬТЕТУ МАТЕМАТИКИ ТА ЦИФРОВИХ ТЕХНОЛОГІЙ