Детермінанти n-го порядку та їхні властивості

Лектор — доц. Шапочка Ігор

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

3 жовтня 2022 року

Нехай нам дано деяку квадратну матрицю порядку n з елементами із множини дійсних чисел $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Нехай нам дано деяку квадратну матрицю порядку n з елементами із множини дійсних чисел $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Розглянемо всеможливі добутки по n елементів цієї матриці, розміщених в різних рядках і різних стовпцях,

Нехай нам дано деяку квадратну матрицю порядку n з елементами із множини дійсних чисел $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Розглянемо всеможливі добутки по n елементів цієї матриці, розміщених в різних рядках і різних стовпцях,тобто добутки вигляду

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

Нехай нам дано деяку квадратну матрицю порядку n з елементами із множини дійсних чисел $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Розглянемо всеможливі добутки по n елементів цієї матриці, розміщених в різних рядках і різних стовпцях,тобто добутки вигляду

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

де i_1 — номер стовпця, з якого взятий елемент з першого рядка,

Нехай нам дано деяку квадратну матрицю порядку n з елементами із множини дійсних чисел $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Розглянемо всеможливі добутки по n елементів цієї матриці, розміщених в різних рядках і різних стовпцях,тобто добутки вигляду

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

де i_1 — номер стовпця, з якого взятий елемент з першого рядка, i_2 — номер стовпця з якого взятий елемент з другого рядка,

Нехай нам дано деяку квадратну матрицю порядку n з елементами із множини дійсних чисел $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Розглянемо всеможливі добутки по n елементів цієї матриці, розміщених в різних рядках і різних стовпцях,тобто добутки вигляду

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

де i_1 — номер стовпця, з якого взятий елемент з першого рядка, i_2 — номер стовпця з якого взятий елемент з другого рядка, $\ldots$, i_n — номер стовпця з якого взятий елемент з n-го рядка.

Нехай нам дано деяку квадратну матрицю порядку n з елементами із множини дійсних чисел $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Розглянемо всеможливі добутки по n елементів цієї матриці, розміщених в різних рядках і різних стовпцях,тобто добутки вигляду

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n},$$

де i_1 — номер стовпця, з якого взятий елемент з першого рядка, i_2 — номер стовпця з якого взятий елемент з другого рядка, $\ldots$, i_n — номер стовпця з якого взятий елемент з n-го рядка.
Індекси i_1, i_2, $\ldots$, i_n складають деяку перестановку із чисел 1, 2, 3, $\ldots$, n.

Нехай нам дано деяку квадратну матрицю порядку n з елементами із множини дійсних чисел $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Розглянемо всеможливі добутки по n елементів цієї матриці, розміщених в різних рядках і різних стовпцях,тобто добутки вигляду

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

де i_1 — номер стовпця, з якого взятий елемент з першого рядка, i_2 — номер стовпця з якого взятий елемент з другого рядка, $\ldots$, i_n — номер стовпця з якого взятий елемент з n-го рядка.
Індекси i_1, i_2, $\ldots$, i_n складають деяку перестановку із чисел 1, 2, 3, $\ldots$, n. Кількість таких добутків співпадає з кількістю всіх різних перестановок із n елементів, тобто $n!$.

Приклад 1.

Розглянемо матрицю

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & -8 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.

Розглянемо матрицю

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & \color{red}{2} & 3 \\ \color{red}{-4} & 0 & 1 & -8 \\ 2 & 1 & -3 & \color{red}{1} \\ 9 & \color{red}{7} & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Прикладом такого добутку елементів даної матриці є

$$2 \cdot (-4) \cdot 1 \cdot 7,$$

Розглянемо матрицю

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & -8 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Прикладом такого добутку елементів даної матриці є

$$2 \cdot (-4) \cdot 1 \cdot 7,$$

якому відповідає перестановка $3,\ 1,\ 4,\ 2,$

Приклад 1.

Розглянемо матрицю

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & -8 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Прикладом такого добутку елементів даної матриці є

$$2 \cdot (-4) \cdot 1 \cdot 7,$$

якому відповідає перестановка $3, 1, 4, 2$, або

$$5 \cdot 0 \cdot (-3) \cdot 6,$$

Приклад 1.

Розглянемо матрицю

$$\begin{pmatrix} \color{red}{5} & 1 & 2 & 3 \\ -4 & \color{red}{0} & 1 & -8 \\ 2 & 1 & \color{red}{-3} & 1 \\ 9 & 7 & 4 & \color{red}{6} \end{pmatrix}.$$

Прикладом такого добутку елементів даної матриці є

$$2 \cdot (-4) \cdot 1 \cdot 7,$$

якому відповідає перестановка $3,\ 1,\ 4,\ 2$, або

$$5 \cdot 0 \cdot (-3) \cdot 6,$$

якому відповідає перестановка $1,\ 2,\ 3,\ 4$,

Приклад 1.

Розглянемо матрицю

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 3 \\ -4 & 0 & 1 & -8 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 9 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Прикладом такого добутку елементів даної матриці є

$$2 \cdot (-4) \cdot 1 \cdot 7,$$

якому відповідає перестановка 3, 1, 4, 2, або

$$5 \cdot 0 \cdot (-3) \cdot 6,$$

якому відповідає перестановка 1, 2, 3, 4, і т. д., і т. п.

Якщо через σ позначити підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix},$$

Якщо через σ позначити підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

то добуток $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$,

Якщо через σ позначити підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

то добуток $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$, можна також записати у вигляді

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Якщо через σ позначити підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

то добуток $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$, можна також записати у вигляді

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Означення 1

Детермінантом (визначником) матриці n-го порядку,

Якщо через σ позначити підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

то добуток $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$, можна також записати у вигляді

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Означення 1

Детермінантом (визначником) матриці n-го порядку, називається алгебраїчна сума $n!$ всеможливих членів,

Якщо через σ позначити підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

то добуток $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$, можна також записати у вигляді

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Означення 1

Детермінантом (визначником) матриці n-го порядку, називається алгебраїчна сума $n!$ всеможливих членів, кожен з яких представляє собою добуток елементів цієї матриці взятих по одному із кожного рядка та кожного стовпця,

Якщо через σ позначити підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

то добуток $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$, можна також записати у вигляді

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Означення 1

Детермінантом (визначником) матриці n-го порядку, називається алгебраїчна сума $n!$ всеможливих членів, кожен з яких представляє собою добуток елементів цієї матриці взятих по одному із кожного рядка та кожного стовпця, причому кожен із цих членів береться із знаком плюс,

Якщо через σ позначити підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

то добуток $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$, можна також записати у вигляді

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Означення 1

Детермінантом (визначником) матриці n-го порядку, називається алгебраїчна сума $n!$ всеможливих членів, кожен з яких представляє собою добуток елементів цієї матриці взятих по одному із кожного рядка та кожного стовпця, причому кожен із цих членів береться із знаком плюс, якщо відповідна йому підстановка парна,

Якщо через σ позначити підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

то добуток $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$, можна також записати у вигляді

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Означення 1

Детермінантом (визначником) матриці n-го порядку, називається алгебраїчна сума $n!$ всеможливих членів, кожен з яких представляє собою добуток елементів цієї матриці взятих по одному із кожного рядка та кожного стовпця, причому кожен із цих членів береться із знаком плюс, якщо відповідна йому підстановка парна, і з знаком мінус — у протилежному випадку.

Якщо через A позначити матрицю (1),

Якщо через A позначити матрицю (1), то детермінант матриці A будемо надалі позначати через

$$|A|$$

Якщо через A позначити матрицю (1), то детермінант матриці A будемо надалі позначати через

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Приклад 2.

Якщо

$$A = (a_{11}),$$

Приклад 2.

Якщо

$$A = (a_{11}),$$

то

$$|A| = |a_{11}| = a_{11}.$$

Приклад 3.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

Приклад 3.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

Приклад 3.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}$$

Приклад 3.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Приклад 3.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$a_{11}a_{22}$$

Приклад 3.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$a_{11}a_{22} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Приклад 3.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$a_{11}a_{22} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \text{парна}$$

Приклад 3.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$a_{11}a_{22} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \text{парна} \quad \mapsto \quad +$$

Приклад 3.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$a_{11}a_{22} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \text{парна} \quad \mapsto \quad +$$

$$a_{12}a_{21}$$

Приклад 3.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{array}{llllll} a_{11}a_{22} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{парна} & \mapsto & + \\ a_{12}a_{21} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & & & & \end{array}$$

Приклад 3.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}a_{22} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{парна} & \mapsto & + \\ a_{12}a_{21} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{непарна} & & \end{array}$$

Приклад 3.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}a_{22} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{парна} & \mapsto & + \\ a_{12}a_{21} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{непарна} & \mapsto & - \end{array}$$

Приклад 4.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

Приклад 4.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

Приклад 4.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \color{red}{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \color{red}{a_{33}} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}$$

Приклад 4.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} \color{red}{a_{11}} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & \color{red}{a_{23}} \\ a_{31} & \color{red}{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Приклад 4.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Приклад 4.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31}$$

Приклад 4.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$

Приклад 4.

Якщо ж

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

то

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} +$$

$$+ a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33}$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \text{парна}$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \text{парна} \quad \mapsto \quad +$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \text{парна} \quad \mapsto \quad +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32}$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \text{парна} \quad \mapsto \quad +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Приклад 4.

$$
\begin{array}{ccccccc}
a_{11}a_{22}a_{33} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{парна} & \mapsto & + \\
a_{11}a_{23}a_{32} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{непарна} & &
\end{array}
$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \text{парна} \quad \mapsto \quad +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \text{непарна} \quad \mapsto \quad -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33}$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Приклад 4.

$$
\begin{array}{lclclcl}
a_{11}a_{22}a_{33} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{парна} & \mapsto & + \\
a_{11}a_{23}a_{32} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{непарна} & \mapsto & - \\
a_{12}a_{21}a_{33} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{непарна} & &
\end{array}
$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \text{парна} \quad \mapsto \quad +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \text{непарна} \quad \mapsto \quad -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \text{непарна} \quad \mapsto \quad -$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{23}a_{31}$$

Приклад 4.

$$
\begin{array}{lcccccc}
a_{11}a_{22}a_{33} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{парна} & \mapsto & + \\
a_{11}a_{23}a_{32} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{непарна} & \mapsto & - \\
a_{12}a_{21}a_{33} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{непарна} & \mapsto & - \\
a_{12}a_{23}a_{31} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & & & &
\end{array}
$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна}$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32}$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна}$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{13}a_{22}a_{31}$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклад 4.

$$a_{11}a_{22}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{21}a_{33} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна} \mapsto -$$

$$a_{12}a_{23}a_{31} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{13}a_{21}a_{32} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \text{парна} \mapsto +$$

$$a_{13}a_{22}a_{31} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \text{непарна}$$

Приклад 4.

$$
\begin{array}{lcccccccc}
a_{11}a_{22}a_{33} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{парна} & \mapsto & + \\
a_{11}a_{23}a_{32} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{непарна} & \mapsto & - \\
a_{12}a_{21}a_{33} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{непарна} & \mapsto & - \\
a_{12}a_{23}a_{31} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{парна} & \mapsto & + \\
a_{13}a_{21}a_{32} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{парна} & \mapsto & + \\
a_{13}a_{22}a_{31} & \mapsto & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} & \mapsto & \text{непарна} & \mapsto & -
\end{array}
$$

Приклад 4.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Приклад 4.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1$$

Приклад 4.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2$$

Приклад 4.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2.$$

Приклад 4.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Приклад 4.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 \cdot 1$$

Приклад 4.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2$$

Приклад 4.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 - 8 \cdot 6 \cdot 1$$

Приклад 4.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 - 8 \cdot 6 \cdot 1 + 8 \cdot 4 \cdot 3$$

Приклад 4.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 - 8 \cdot 6 \cdot 1 + 8 \cdot 4 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \cdot 2$$

Приклад 4.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 - 8 \cdot 6 \cdot 1 + 8 \cdot 4 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \cdot 2 - 7 \cdot 5 \cdot 3$$

Приклад 4.

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 2 = -2.$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 5 \cdot 1 - 9 \cdot 4 \cdot 2 - 8 \cdot 6 \cdot 1 + 8 \cdot 4 \cdot 3 + 7 \cdot 6 \cdot 2 - 7 \cdot 5 \cdot 3 = 0.$$

Приклад 5.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця,

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0,

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0.

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку $i_1,\ i_2,\ \ldots i_n$ чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку $i_1,\ i_2,\ \ldots i_n$ чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку i_1, i_2, $\ldots i_n$ чисел 1, 2, $\ldots$, n і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ,

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку i_1, i_2, $\ldots i_n$ чисел 1, 2, $\ldots$, n і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$.

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку i_1, i_2, $\ldots i_n$ чисел 1, 2, $\ldots$, n і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$,

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку i_1, i_2, $\ldots i_n$ чисел 1, 2, $\ldots$, n і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$, то $a_{n\,i_n} = 0$,

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку $i_1, i_2, \ldots i_n$ чисел $1, 2, \ldots, n$ і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$, то $a_{n\,i_n} = 0$, а, отже, $d = 0$.

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку $i_1,\ i_2,\ \ldots i_n$ чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$, то $a_{n\,i_n} = 0$, а, отже, $d = 0$. Нехай $i_n = n$.

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку $i_1,\ i_2,\ \ldots i_n$ чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$, то $a_{n\, i_n} = 0$, а, отже, $d = 0$. Нехай $i_n = n$. Далі, якщо $i_{n-1} \neq n-1$,

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку $i_1,\ i_2,\ \ldots i_n$ чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$, то $a_{n\,i_n} = 0$, а, отже, $d = 0$. Нехай $i_n = n$. Далі, якщо $i_{n-1} \neq n-1$, тоді $i_{n-1} < n-1$.

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку i_1, i_2, $\ldots i_n$ чисел 1, 2, $\ldots$, n і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$, то $a_{n\,i_n} = 0$, а, отже, $d = 0$. Нехай $i_n = n$. Далі, якщо $i_{n-1} \neq n-1$, тоді $i_{n-1} < n-1$. Тому $a_{n-1\,i_{n-1}} = 0$.

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку $i_1,\ i_2,\ \ldots i_n$ чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$, то $a_{n\,i_n} = 0$, а, отже, $d = 0$. Нехай $i_n = n$. Далі, якщо $i_{n-1} \neq n-1$, тоді $i_{n-1} < n-1$. Тому $a_{n-1\,i_{n-1}} = 0$. Отже, $d = 0$.

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку i_1, i_2, $\ldots i_n$ чисел 1, 2, $\ldots$, n і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$, то $a_{n\,i_n} = 0$, а, отже, $d = 0$. Нехай $i_n = n$. Далі, якщо $i_{n-1} \neq n-1$, тоді $i_{n-1} < n-1$. Тому $a_{n-1\,i_{n-1}} = 0$. Отже, $d = 0$. Нехай $i_{n-1} = n-1$ і так далі.

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку i_1, i_2, $\dots i_n$ чисел 1, 2, $\dots$, n і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$, то $a_{n\,i_n} = 0$, а, отже, $d = 0$. Нехай $i_n = n$. Далі, якщо $i_{n-1} \neq n-1$, тоді $i_{n-1} < n-1$. Тому $a_{n-1\,i_{n-1}} = 0$. Отже, $d = 0$. Нехай $i_{n-1} = n-1$ і так далі. Продовжуючи цей процес на n-му кроці одержимо, що для довільної перестановки i_1, i_2, $\dots i_n$ відмінної від перестановки 1, 2, $\dots$, n

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку i_1, i_2, $\ldots i_n$ чисел 1, 2, $\ldots$, n і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$, то $a_{n\,i_n} = 0$, а, отже, $d = 0$. Нехай $i_n = n$. Далі, якщо $i_{n-1} \neq n-1$, тоді $i_{n-1} < n-1$. Тому $a_{n-1\,i_{n-1}} = 0$. Отже, $d = 0$. Нехай $i_{n-1} = n-1$ і так далі. Продовжуючи цей процес на n-му кроці одержимо, що для довільної перестановки i_1, i_2, $\ldots i_n$ відмінної від перестановки 1, 2, $\ldots$, n справджується рівність $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} = 0$.

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку $i_1, \; i_2, \; \ldots i_n$ чисел $1, \; 2, \; \ldots, \; n$ і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$, то $a_{n\,i_n} = 0$, а, отже, $d = 0$. Нехай $i_n = n$. Далі, якщо $i_{n-1} \neq n-1$, тоді $i_{n-1} < n-1$. Тому $a_{n-1\,i_{n-1}} = 0$. Отже, $d = 0$. Нехай $i_{n-1} = n-1$ і так далі. Продовжуючи цей процес на n-му кроці одержимо, що для довільної перестановки $i_1, i_2, \ldots i_n$ відмінної від перестановки $1, 2, \ldots,$ n справджується рівність $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} = 0$. Оскільки перестановка $1, \; 2, \; \ldots, \; n$ — парна,

Розв'язання

Очевидно, якщо одним із множників добутку елементів детермінанта Δ, взятих по одному із кожного рядка і стовпця, є 0, то і сам добуток дорівнює 0. Виходячи з цього покажемо, що

$$\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

Розглянемо довільну перестановку $i_1,\ i_2,\ \ldots i_n$ чисел $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ і відповідний їй добуток

$$d = a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n},$$

що входить у детермінант Δ, де $a_{ij} = 0$ при $i > j$. Якщо $i_n \neq n$, то $a_{n\,i_n} = 0$, а, отже, $d = 0$. Нехай $i_n = n$. Далі, якщо $i_{n-1} \neq n-1$, тоді $i_{n-1} < n-1$. Тому $a_{n-1\,i_{n-1}} = 0$. Отже, $d = 0$. Нехай $i_{n-1} = n-1$ і так далі. Продовжуючи цей процес на n-му кроці одержимо, що для довільної перестановки $i_1, i_2, \ldots i_n$ відмінної від перестановки $1, 2, \ldots,$ n справджується рівність $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} = 0$. Оскільки перестановка $1,\ 2,\ \ldots,\ n$ — парна, то $\Delta = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

Позначення

Нехай n — деяке фіксоване натуральне число;

Позначення

Нехай n — деяке фіксоване натуральне число; a_1, a_2, a_3, ..., a_n — деякі дійсні числа.

Позначення

Нехай n — деяке фіксоване натуральне число; a_1, a_2, a_3, ..., a_n — деякі дійсні числа.

Суму чисел

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Позначення

Нехай n — деяке фіксоване натуральне число; a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n — деякі дійсні числа.

Суму чисел

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

будемо позначати символом

$$\sum_{k \in \{1, 2, \ldots, n\}} a_k$$

Позначення

Нехай n — деяке фіксоване натуральне число; a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_n — деякі дійсні числа.

Суму чисел

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

будемо позначати символом

$$\sum_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} a_k \qquad \text{або} \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Розглянемо деякий член

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{4}$$

детермінанта матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Розглянемо деякий член

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{4}$$

детермінанта матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо через σ позначити підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

Розглянемо деякий член

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{4}$$

детермінанта матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Якщо через σ позначити підстановку

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix},$$

то добуток (4) можна також записати у вигляді

$$a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}.$$

Отже,

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \tag{5}$$

Отже,

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \tag{5}$$

де S_n — множина всіх підстановок степеня n,

Отже,

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}, \tag{5}$$

де S_n — множина всіх підстановок степеня n, $\mathrm{inv}(\sigma)$ — кількість інверсій у підстановці σ.

Означення 2

Матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Означення 2

Матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

називається транспонованою до матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення 2

Матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

називається транспонованою до матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Позначатимемо матрицю транспоновану до матриці A через A^T.

Означення 2

Матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{6}$$

називається транспонованою до матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Позначатимемо матрицю транспоновану до матриці A через A^T. Інколи кажуть також, що матрицю A^T отримали із матриці A за допомогою транспонування матриці A.

Теорема 1

Детермінант матриці A дорівнює детермінанту транспонованої до неї матриці A^T.

Теорема 1

Детермінант матриці A дорівнює детермінанту транспонованої до неї матриці A^T.

Тобто

$$|A| = |A^T|.$$

Доведення

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — це матриця вигляду (1).

Доведення

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — це матриця вигляду (1). Кожен член детермінанта (2) матриці A вигляду

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{7}$$

Доведення

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — це матриця вигляду (1). Кожен член детермінанта (2) матриці A вигляду

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{7}$$

є також членом детермінанта

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

Доведення

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — це матриця вигляду (1). Кожен член детермінанта (2) матриці A вигляду

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \tag{7}$$

є також членом детермінанта

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

оскільки всі множники цього члена беруться по одному із кожного рядка та кожного стовпчика матриці A, а отже і A^T.

Доведення

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — це матриця вигляду (1). Кожен член детермінанта (2) матриці A вигляду

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{7}$$

є також членом детермінанта

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

оскільки всі множники цього члена беруться по одному із кожного рядка та кожного стовпчика матриці A, а отже і A^T. Дійсно a_{1i_1} розміщений у першому стовпці та i_1-му рядку матриці A^T,

Доведення

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — це матриця вигляду (1). Кожен член детермінанта (2) матриці A вигляду

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{7}$$

є також членом детермінанта

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

оскільки всі множники цього члена беруться по одному із кожного рядка та кожного стовпчика матриці A, а отже і A^T. Дійсно a_{1i_1} розміщений у першому стовпці та i_1-му рядку матриці A^T, a_{2i_2} — у другому стовпці та i_2-му рядку матриці A^T

Доведення

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — це матриця вигляду (1). Кожен член детермінанта (2) матриці A вигляду

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \tag{7}$$

є також членом детермінанта

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

оскільки всі множники цього члена беруться по одному із кожного рядка та кожного стовпчика матриці A, а отже і A^T. Дійсно a_{1i_1} розміщений у першому стовпці та i_1-му рядку матриці A^T, a_{2i_2} — у другому стовпці та i_2-му рядку матриці A^T і т. д.,

Доведення

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — це матриця вигляду (1). Кожен член детермінанта (2) матриці A вигляду

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n} \tag{7}$$

є також членом детермінанта

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

оскільки всі множники цього члена беруться по одному із кожного рядка та кожного стовпчика матриці A, а отже і A^T. Дійсно a_{1i_1} розміщений у першому стовпці та i_1-му рядку матриці A^T, a_{2i_2} — у другому стовпці та i_2-му рядку матриці A^T і т. д., a_{ni_n} — у n-му стовпці та i_n-му рядку матриці A^T.

Доведення

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — це матриця вигляду (1). Кожен член детермінанта (2) матриці A вигляду

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \tag{7}$$

є також членом детермінанта

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

оскільки всі множники цього члена беруться по одному із кожного рядка та кожного стовпчика матриці A, а отже і A^T. Дійсно a_{1i_1} розміщений у першому стовпці та i_1-му рядку матриці A^T, a_{2i_2} — у другому стовпці та i_2-му рядку матриці A^T і т. д., a_{ni_n} — у n-му стовпці та i_n-му рядку матриці A^T.

Числа i_1, i_2, ..., i_n є попарно різними,

Доведення

Нехай $A = \|a_{ij}\|$ — це матриця вигляду (1). Кожен член детермінанта (2) матриці A вигляду

$$a_{1i_1} a_{2i_2} \cdots a_{ni_n} \tag{7}$$

є також членом детермінанта

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

оскільки всі множники цього члена беруться по одному із кожного рядка та кожного стовпчика матриці A, а отже і A^T. Дійсно a_{1i_1} розміщений у першому стовпці та i_1-му рядку матриці A^T, a_{2i_2} — у другому стовпці та i_2-му рядку матриці A^T і т. д., a_{ni_n} — у n-му стовпці та i_n-му рядку матриці A^T.

Числа i_1, i_2, ..., i_n є попарно різними, тому жодні з двох елементів a_{1i_1}, a_{2i_2}, ..., a_{ni_n} не лежать у одному рядку матриці A^T.

Доведення

Цілком очевидним є і зворотне твердження.

Доведення

Цілком очевидним є і зворотне твердження. А саме, кожен член детермінанта $|A^T|$ є членом детермінанта $|A|$.

Доведення

Далі, знак члена $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ у детермінанті $|A|$

Доведення

Далі, знак члена $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ у детермінанті $|A|$ визначається парністю підстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Доведення

Далі, знак члена $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ у детермінанті $|A|$ визначається парністю підстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

У детермінанті $|A^T|$ перші індекси вказують на номер стовпця, другі — на номер рядка, тому члену $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ у детермінанті $|A^T|$ відповідає підстановка

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Доведення

Далі, знак члена $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ у детермінанті $|A|$ визначається парністю підстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

У детермінанті $|A^T|$ перші індекси вказують на номер стовпця, другі — на номер рядка, тому члену $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ у детермінанті $|A^T|$ відповідає підстановка

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Парності підстановок (9) і (10) співпадають,

Доведення

Далі, знак члена $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ у детермінанті $|A|$ визначається парністю підстановки

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}. \tag{9}$$

У детермінанті $|A^T|$ перші індекси вказують на номер стовпця, другі — на номер рядка, тому члену $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ у детермінанті $|A^T|$ відповідає підстановка

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ 1 & 2 & \dots & n \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Парності підстановок (9) і (10) співпадають, а тому член

$$a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

бере участь в обох детермінантах з однаковим знаком.

Таким чином, детермінанти $|A|$ і $|A^T|$ є сумами однакових членів, взятих з однаковими знаками, тобто рівні між собою.

Таким чином, детермінанти $|A|$ і $|A^T|$ є сумами однакових членів, взятих з однаковими знаками, тобто рівні між собою.
Теорема доведена.

Таким чином, детермінанти $|A|$ і $|A^T|$ є сумами однакових членів, взятих з однаковими знаками, тобто рівні між собою.
Теорема доведена.

Зауваження

Із теореми 1 випливає, що всяке твердження про детермінант матриці пов'язане із рядками цієї матриці справджується і для її стовпців і навпаки.

Таким чином, детермінанти $|A|$ і $|A^T|$ є сумами однакових членів, взятих з однаковими знаками, тобто рівні між собою.
Теорема доведена.

Зауваження

Із теореми 1 випливає, що всяке твердження про детермінант матриці пов'язане із рядками цієї матриці справджується і для її стовпців і навпаки. Тому наступні теореми 2–9 будуть сформульовані тільки для рядків детермінанта.

Таким чином, детермінанти $|A|$ і $|A^T|$ є сумами однакових членів, взятих з однаковими знаками, тобто рівні між собою.
Теорема доведена.

Зауваження

Із теореми 1 випливає, що всяке твердження про детермінант матриці пов'язане із рядками цієї матриці справджується і для її стовпців і навпаки. Тому наступні теореми 2–9 будуть сформульовані тільки для рядків детермінанта. Зауважимо також, що під рядком або стовпцем детермінанта ми надалі розумітимемо відповідно рядок або стовпець матриці, детермінант якої обчислюємо.

Теорема 2

Якщо один із рядків детермінанта складається з нулів, то цей детермінант дорівнює нулю.

Теорема 2

Якщо один із рядків детермінанта складається з нулів, то цей детермінант дорівнює нулю.

Тобто

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення

Дійсно, нехай всі елементи i-го рядка детермінанта є нулями.

Доведення

Дійсно, нехай всі елементи i-го рядка детермінанта є нулями. У кожний член даного детермінанта повинен ввійти множник із i-го рядка,

Доведення

Дійсно, нехай всі елементи i-го рядка детермінанта є нулями. У кожний член даного детермінанта повинен ввійти множник із i-го рядка, тому в нашому випадку всі члени детермінанта дорівнюють нулю.

Доведення

Дійсно, нехай всі елементи i-го рядка детермінанта є нулями. У кожний член даного детермінанта повинен ввійти множник із i-го рядка, тому в нашому випадку всі члени детермінанта дорівнюють нулю. Отже, і сам детермінант дорівнює нулю.

Теорема 3

Якщо в детермінанті поміняти місцями два рядки, то він поміняє знак на протилежний.

Доведення

Розглянемо детермінант, одержаний із детермінанта (2) перестановкою k-го та l-го рядків $(k \neq l)$

Доведення

Розглянемо детермінант, одержаний із детермінанта (2) перестановкою k-го та l-го рядків ($k \neq l$)

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} \begin{array}{l} \\ \leftarrow (k\text{-й рядок}) \\ . \\ \leftarrow (l\text{-й рядок}) \\ \\ \end{array} \tag{11}$$

Доведення

Кожен член детермінанта (2) вигляду $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ є також членом детермінанта (11),

Доведення

Кожен член детермінанта (2) вигляду $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ є також членом детермінанта (11), оскільки всі його множники знаходяться в різних рядках та різних стовпцях детермінанта (11).

Доведення

Кожен член детермінанта (2) вигляду $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ є також членом детермінанта (11), оскільки всі його множники знаходяться в різних рядках та різних стовпцях детермінанта (11). Аналогічно, кожен член детермінанта (11) є членом детермінанта (2),

Доведення

Кожен член детермінанта (2) вигляду $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ є також членом детермінанта (11), оскільки всі його множники знаходяться в різних рядках та різних стовпцях детермінанта (11). Аналогічно, кожен член детермінанта (11) є членом детермінанта (2), тобто детермінанти (2) і (11) складаються із одних і тих же членів.

Доведення

Кожен член детермінанта (2) вигляду $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ є також членом детермінанта (11), оскільки всі його множники знаходяться в різних рядках та різних стовпцях детермінанта (11). Аналогічно, кожен член детермінанта (11) є членом детермінанта (2), тобто детермінанти (2) і (11) складаються із одних і тих же членів. Члену $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ детермінанта (2) відповідає підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & l & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k & \ldots & i_l & \ldots & i_n \end{pmatrix}, \tag{12}$$

Кожен член детермінанта (2) вигляду $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ є також членом детермінанта (11), оскільки всі його множники знаходяться в різних рядках та різних стовпцях детермінанта (11). Аналогічно, кожен член детермінанта (11) є членом детермінанта (2), тобто детермінанти (2) і (11) складаються із одних і тих же членів. Члену $a_{1i_1}a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$ детермінанта (2) відповідає підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k & \ldots & l & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k & \ldots & i_l & \ldots & i_n \end{pmatrix}, \tag{12}$$

а в детермінанті (11) йому відповідає підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & l & \ldots & k & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k & \ldots & i_l & \ldots & i_n \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Доведення

Підстановку (13) можна одержати із підстановки (12) шляхом однієї транспозиції у верхньому рядку.

Доведення

Підстановку (13) можна одержати із підстановки (12) шляхом однієї транспозиції у верхньому рядку. Це в свою чергу означає, що ці підстановки мають протилежну парність.

Доведення

Підстановку (13) можна одержати із підстановки (12) шляхом однієї транспозиції у верхньому рядку. Це в свою чергу означає, що ці підстановки мають протилежну парність. Звідси випливає, що всі члени детермінанта (2) входять в детермінант (11) з протилежним знаком і навпаки.

Доведення

Підстановку (13) можна одержати із підстановки (12) шляхом однієї транспозиції у верхньому рядку. Це в свою чергу означає, що ці підстановки мають протилежну парність. Звідси випливає, що всі члени детермінанта (2) входять в детермінант (11) з протилежним знаком і навпаки. Таким чином, детермінанти (2) і (11), як суми, що складають з відповідно взаємно протилежних доданків, відрізняються тільки знаком.

Доведення

Підстановку (13) можна одержати із підстановки (12) шляхом однієї транспозиції у верхньому рядку. Це в свою чергу означає, що ці підстановки мають протилежну парність. Звідси випливає, що всі члени детермінанта (2) входять в детермінант (11) з протилежним знаком і навпаки. Таким чином, детермінанти (2) і (11), як суми, що складають з відповідно взаємно протилежних доданків, відрізняються тільки знаком. Теорема доведена.

Теорема 4

Детермінант, що містить два однакові рядки, дорівнює нулю.

Теорема 4

Детермінант, що містить два однакові рядки, дорівнює нулю.

Тобто

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

Теорема 4

Детермінант, що містить два однакові рядки, дорівнює нулю.

Тобто

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення

Нехай

$$
\begin{vmatrix}
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1 & a_2 & \dots & a_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1 & a_2 & \dots & a_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots
\end{vmatrix}
$$

Доведення

Нехай

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \Delta$$

Доведення

Нехай

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \Delta$$

Поміняємо місцями два однакові рядки.

Доведення

Нехай

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \Delta$$

Поміняємо місцями два однакові рядки. Із теореми 3 слідує, що після перестановки цих двох рядків ми одержимо детермінант, що дорівнюватиме $-\Delta$.

Доведення

Нехай

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \Delta$$

Поміняємо місцями два однакові рядки. Із теореми 3 слідує, що після перестановки цих двох рядків ми одержимо детермінант, що дорівнюватиме $-\Delta$. Але оскільки ці рядки однакові, то з іншого боку цей детермінант не зміниться і він дорівнюватиме Δ,

Доведення

Нехай
$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \Delta$$

Поміняємо місцями два однакові рядки. Із теореми 3 слідує, що після перестановки цих двох рядків ми одержимо детермінант, що дорівнюватиме $-\Delta$. Але оскільки ці рядки однакові, то з іншого боку цей детермінант не зміниться і він дорівнюватиме Δ, тобто $\Delta = -\Delta$.

Доведення

Нехай

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \Delta$$

Поміняємо місцями два однакові рядки. Із теореми 3 слідує, що після перестановки цих двох рядків ми одержимо детермінант, що дорівнюватиме $-\Delta$. Але оскільки ці рядки однакові, то з іншого боку цей детермінант не зміниться і він дорівнюватиме Δ, тобто $\Delta = -\Delta$. Таке можливо лише у випадку, коли $\Delta = 0$.

Нехай

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \Delta$$

Поміняємо місцями два однакові рядки. Із теореми 3 слідує, що після перестановки цих двох рядків ми одержимо детермінант, що дорівнюватиме $-\Delta$. Але оскільки ці рядки однакові, то з іншого боку цей детермінант не зміниться і він дорівнюватиме Δ, тобто $\Delta = -\Delta$. Таке можливо лише у випадку, коли $\Delta = 0$.

Теорема доведена.

Теорема 5

Якщо всі елементи деякого рядка детермінанта помножити на число γ, то і сам детермінант помножиться на γ.

Теорема 5

Якщо всі елементи деякого рядка детермінанта помножити на число γ, то і сам детермінант помножиться на γ.

Тобто

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_{i1} & \gamma a_{i2} & \cdots & \gamma a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Доведення

Обчислимо детермінант, одержаний із детермінанта (2) множенням всіх елементів i-го рядка на число γ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_{i1} & \gamma a_{i2} & \cdots & \gamma a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

Доведення

Обчислимо детермінант, одержаний із детермінанта (2) множенням всіх елементів i-го рядка на число γ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_{i1} & \gamma a_{i2} & \cdots & \gamma a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1\,\sigma(i-1)} (\gamma a_{i\sigma(i)}) a_{i+1\,\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

Доведення

Обчислимо детермінант, одержаний із детермінанта (2) множенням всіх елементів i-го рядка на число γ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_{i1} & \gamma a_{i2} & \cdots & \gamma a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1\,\sigma(i-1)} (\gamma a_{i\sigma(i)}) a_{i+1\,\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \gamma \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

Доведення

Обчислимо детермінант, одержаний із детермінанта (2) множенням всіх елементів i-го рядка на число γ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_{i1} & \gamma a_{i2} & \cdots & \gamma a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1\,\sigma(i-1)} (\gamma a_{i\sigma(i)}) a_{i+1\,\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \gamma \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \gamma \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Доведення

Обчислимо детермінант, одержаний із детермінанта (2) множенням всіх елементів i-го рядка на число γ:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_{i1} & \gamma a_{i2} & \cdots & \gamma a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i-1\,\sigma(i-1)} (\gamma a_{i\sigma(i)}) a_{i+1\,\sigma(i+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \gamma \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \gamma \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

що й потрібно було довести.

Теорема 6

Детермінант, що містить два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

Тобто

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_1 & \gamma a_2 & \dots & \gamma a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

Теорема 6

Детермінант, що містить два пропорційні рядки, дорівнює нулю.

Тобто

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_1 & \gamma a_2 & \dots & \gamma a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = 0.$$

Доведення

Справді, нехай елементи k-го рядка відрізняють від відповідних елементів l-го рядка одним і тим же множником γ. Тоді згідно попередньої теореми після того, як ми винесемо цей множник із k-го рядка за знак детермінанта, ми одержимо детермінант з двома однаковими рядками, який, як випливає із теореми 4, дорівнює нулю.

Доведення

Справді, нехай елементи k-го рядка відрізняють від відповідних елементів l-го рядка одним і тим же множником γ. Тоді згідно попередньої теореми після того, як ми винесемо цей множник із k-го рядка за знак детермінанта, ми одержимо детермінант з двома однаковими рядками, який, як випливає із теореми 4, дорівнює нулю. Інакше кажучи,

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_1 & \gamma a_2 & \dots & \gamma a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

Доведення

Справді, нехай елементи k-го рядка відрізняють від відповідних елементів l-го рядка одним і тим же множником γ. Тоді згідно попередньої теореми після того, як ми винесемо цей множник із k-го рядка за знак детермінанта, ми одержимо детермінант з двома однаковими рядками, який, як випливає із теореми 4, дорівнює нулю. Інакше кажучи,

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_1 & \gamma a_2 & \dots & \gamma a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

Доведення

Справді, нехай елементи k-го рядка відрізняють від відповідних елементів l-го рядка одним і тим же множником γ. Тоді згідно попередньої теореми після того, як ми винесемо цей множник із k-го рядка за знак детермінанта, ми одержимо детермінант з двома однаковими рядками, який, як випливає із теореми 4, дорівнює нулю. Інакше кажучи,

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_1 & \gamma a_2 & \dots & \gamma a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \gamma \cdot 0$$

Доведення

Справді, нехай елементи k-го рядка відрізняють від відповідних елементів l-го рядка одним і тим же множником γ. Тоді згідно попередньої теореми після того, як ми винесемо цей множник із k-го рядка за знак детермінанта, ми одержимо детермінант з двома однаковими рядками, який, як випливає із теореми 4, дорівнює нулю. Інакше кажучи,

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_1 & \gamma a_2 & \dots & \gamma a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \gamma \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \gamma \cdot 0 = 0.$$

Теорема доведена.

Теорема 7

Якщо всі елементи i-го рядка детермінанта n-го порядку представлені у вигляді суми двох доданків

$$a_{ij} = b_j + c_j, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

то цей детермінант можна представити у вигляді суми двох детермінантів, у яких всі рядки, крім i-го, — ті ж самі, як і в даному детермінанті, а i-ий рядок в одному із цих детермінантів складається з елементів b_j, а в іншому — із елементів c_j.

Тобто

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Тобто

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & \dots & b_n + c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Доведення

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

де $a_{ij} = b_j + c_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$.

Доведення

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

де $a_{ij} = b_j + c_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Тоді за означенням детермінанта

$$\Delta = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots (b_{\sigma(i)} + c_{\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} =$$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots b_{\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} +$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \Delta_1 + \Delta_2,$$

Доведення

Нехай

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

де $a_{ij} = b_j + c_j$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Тоді за означенням детермінанта

$$\Delta = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots a_{i\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots (b_{\sigma(i)} + c_{\sigma(i)}) \cdots a_{n\sigma(n)} =$$
$$= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots b_{\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} +$$
$$+ \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1\sigma(1)} \cdots c_{\sigma(i)} \cdots a_{n\sigma(n)} = \Delta_1 + \Delta_2,$$

Доведення

де, очевидно,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_1 & c_2 & \cdots & c_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Теорема доведена.

Користуючись методом математичної індукції, можна узагальнити теорему 7 на випадок, коли кожний елемент i-го рядка представляється у вигляді суми k доданків, де $k \geq 2$.

Користуючись методом математичної індукції, можна узагальнити теорему 7 на випадок, коли кожний елемент i-го рядка представляється у вигляді суми k доданків, де $k \geq 2$.
Будемо говорити, що i-ий рядок детермінанта (2) є лінійною комбінацією рядків з номерами k_1, k_2, ..., k_s, якщо існують такі числа β_1, β_2, ..., β_s, що

$$a_{ij} = \beta_1 a_{k_1 j} + \beta_2 a_{k_2 j} + \cdots + \beta_s a_{k_s j}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

Теорема 8

Якщо один із рядків детермінанта є лінійною комбінацією деяких інших його рядків, то цей детермінант дорівнює нулю.

Доведення

Нехай i-й рядок детермінанта Δ є лінійною комбінацією інших рядків цього ж детермінанта з номерами $k_1, k_2, \ldots, k_s$.

Доведення

Нехай i-й рядок детермінанта Δ є лінійною комбінацією інших рядків цього ж детермінанта з номерами $k_1, k_2, \dots, k_s$.
Оскільки кожен елемент i-го рядка є сумою s доданків, то з теореми 7 випливає, що даний детермінант можна представити у вигляді суми s детермінантів,

Доведення

Нехай i-й рядок детермінанта Δ є лінійною комбінацією інших рядків цього ж детермінанта з номерами $k_1, k_2, \ldots, k_s$.
Оскільки кожен елемент i-го рядка є сумою s доданків, то з теореми 7 випливає, що даний детермінант можна представити у вигляді суми s детермінантів, у кожному з яких i-й рядок є пропорційним деякому іншому рядку

Доведення

Нехай i-й рядок детермінанта Δ є лінійною комбінацією інших рядків цього ж детермінанта з номерами $k_1, k_2, \ldots, k_s$.
Оскільки кожен елемент i-го рядка є сумою s доданків, то з теореми 7 випливає, що даний детермінант можна представити у вигляді суми s детермінантів, у кожному з яких i-й рядок є пропорційним деякому іншому рядку (у першого з цих детермінантів пропорційними будуть i-й та k_1-й рядки,

Доведення

Нехай i-й рядок детермінанта Δ є лінійною комбінацією інших рядків цього ж детермінанта з номерами $k_1, k_2, \ldots, k_s$.
Оскільки кожен елемент i-го рядка є сумою s доданків, то з теореми 7 випливає, що даний детермінант можна представити у вигляді суми s детермінантів, у кожному з яких i-й рядок є пропорційним деякому іншому рядку (у першого з цих детермінантів пропорційними будуть i-й та k_1-й рядки, у другому — i-й та k_2-й рядки і т. д.).

Доведення

Нехай i-й рядок детермінанта Δ є лінійною комбінацією інших рядків цього ж детермінанта з номерами $k_1, k_2, \ldots, k_s$.
Оскільки кожен елемент i-го рядка є сумою s доданків, то з теореми 7 випливає, що даний детермінант можна представити у вигляді суми s детермінантів, у кожному з яких i-й рядок є пропорційним деякому іншому рядку (у першого з цих детермінантів пропорційними будуть i-й та k_1-й рядки, у другому — i-й та k_2-й рядки і т. д.). Згідно теореми 6, кожен із цих детермінантів дорівнює нулю.

Доведення

Нехай i-й рядок детермінанта Δ є лінійною комбінацією інших рядків цього ж детермінанта з номерами $k_1, k_2, \ldots, k_s$.
Оскільки кожен елемент i-го рядка є сумою s доданків, то з теореми 7 випливає, що даний детермінант можна представити у вигляді суми s детермінантів, у кожному з яких i-й рядок є пропорційним деякому іншому рядку (у першого з цих детермінантів пропорційними будуть i-й та k_1-й рядки, у другому — i-й та k_2-й рядки і т. д.). Згідно теореми 6, кожен із цих детермінантів дорівнює нулю. Отже, нулю дорівнює і даний детермінант Δ.

Теорема 9

Якщо до елементів одного з рядків детермінанта додати відповідні елементи іншого рядка помножені на одне і те ж саме число, а всі інші рядки залишити без зміни, то одержаний детермінант буде рівний даному.

Теорема 9

Якщо до елементів одного з рядків детермінанта додати відповідні елементи іншого рядка помножені на одне і те ж саме число, а всі інші рядки залишити без зміни, то одержаний детермінант буде рівний даному.

Тобто

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}$$

Теорема 9

Якщо до елементів одного з рядків детермінанта додати відповідні елементи іншого рядка помножені на одне і те ж саме число, а всі інші рядки залишити без зміни, то одержаний детермінант буде рівний даному.

Тобто

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+\gamma a_{k1} & a_{i2}+\gamma a_{k2} & \dots & a_{in}+\gamma a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Доведення

Нехай до i-го рядка детермінанта (2) додається k-й рядок $(i \neq k)$, помножений на число γ.

Доведення

Нехай до i-го рядка детермінанта (2) додається k-й рядок $(i \neq k)$, помножений на число γ. Тоді в утвореному детермінанті Δ' i-й рядок складається із елементів $a_{ij} + \gamma a_{kj}$, $j = 1, \ldots, n$.

Доведення

Нехай до i-го рядка детермінанта (2) додається k-й рядок $(i \neq k)$, помножений на число γ. Тоді в утвореному детермінанті Δ' i-й рядок складається із елементів $a_{ij} + \gamma a_{kj}$, $j = 1, \ldots, n$. За теоремою 7 детермінант Δ' можна представити у вигляді суми двох детермінантів,

Доведення

Нехай до i-го рядка детермінанта (2) додається k-й рядок $(i \neq k)$, помножений на число γ. Тоді в утвореному детермінанті Δ' i-й рядок складається із елементів $a_{ij} + \gamma a_{kj}$, $j = 1, \ldots, n$. За теоремою 7 детермінант Δ' можна представити у вигляді суми двох детермінантів, один із яких є детермінантом (2),

Доведення

Нехай до i-го рядка детермінанта (2) додається k-й рядок $(i \neq k)$, помножений на число γ. Тоді в утвореному детермінанті Δ' i-й рядок складається із елементів $a_{ij} + \gamma a_{kj}$, $j = 1, \ldots, n$. За теоремою 7 детермінант Δ' можна представити у вигляді суми двох детермінантів, один із яких є детермінантом (2), а інший містить два пропорційних рядки, а тому рівний нулю.

Доведення

Нехай до i-го рядка детермінанта (2) додається k-й рядок $(i \neq k)$, помножений на число γ. Тоді в утвореному детермінанті Δ' i-й рядок складається із елементів $a_{ij} + \gamma a_{kj}$, $j = 1, \ldots, n$. За теоремою 7 детермінант Δ' можна представити у вигляді суми двох детермінантів, один із яких є детермінантом (2), а інший містить два пропорційних рядки, а тому рівний нулю. Це завершує доведення теореми.

Доведення

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} + \gamma a_{k1} & a_{i2} + \gamma a_{k2} & \dots & a_{in} + \gamma a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} =$$

Доведення

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}+\gamma a_{k1} & a_{i2}+\gamma a_{k2} & \dots & a_{in}+\gamma a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma a_{k1} & \gamma a_{k2} & \dots & \gamma a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix} =$$

Доведення

$$= \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{vmatrix}.$$

Приклад 6.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

Приклад 6.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Приклад 6.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання. За чергою

Приклад 6.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання. За чергою додамо до другого рядка детермінанта Δ перший, помножений на 3;

Приклад 6.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання. За чергою додамо до другого рядка детермінанта Δ перший, помножений на 3; далі, Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання. За чергою додамо до другого рядка детермінанта Δ перший, помножений на 3; далі, додамо до третього рядка одержаного детермінанта перший,

Приклад 6.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання. За чергою додамо до другого рядка детермінанта Δ перший, помножений на 3; далі, додамо до третього рядка одержаного детермінанта перший, помножений відповідно на -1;

Приклад 6.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання. За чергою додамо до другого рядка детермінанта Δ перший, помножений на 3; далі, додамо до третього рядка одержаного детермінанта перший, помножений відповідно на -1; опісля, до четвертого перший, помножений на 2.

Приклад 6.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання. За чергою додамо до другого рядка детермінанта Δ перший, помножений на 3; далі, додамо до третього рядка одержаного детермінанта перший, помножений відповідно на -1; опісля, до четвертого перший, помножений на 2. Тоді детермінант Δ не зміниться

Приклад 6.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання. За чергою додамо до другого рядка детермінанта Δ перший, помножений на 3; далі, додамо до третього рядка одержаного детермінанта перший, помножений відповідно на -1; опісля, до четвертого перший, помножений на 2. Тоді детермінант Δ не зміниться (значення його не зміниться).

Приклад 6.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання. За чергою додамо до другого рядка детермінанта Δ перший, помножений на 3; далі, додамо до третього рядка одержаного детермінанта перший, помножений відповідно на -1; опісля, до четвертого перший, помножений на 2. Тоді детермінант Δ не зміниться (значення його не зміниться). Отже,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

Приклад 6.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання. За чергою додамо до другого рядка детермінанта Δ перший, помножений на 3; далі, додамо до третього рядка одержаного детермінанта перший, помножений відповідно на -1; опісля, до четвертого перший, помножений на 2. Тоді детермінант Δ не зміниться (значення його не зміниться). Отже,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

Приклад 6.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання. За чергою додамо до другого рядка детермінанта Δ перший, помножений на 3; далі, додамо до третього рядка одержаного детермінанта перший, помножений відповідно на -1; опісля, до четвертого перший, помножений на 2. Тоді детермінант Δ не зміниться (значення його не зміниться). Отже,

$$\Delta = \left| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ & & & \end{array} \right.$$

Приклад 6.

Обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{vmatrix},$$

звівши його до східчастого вигляду за допомогою елементарних перетворень.

Розв'язання. За чергою додамо до другого рядка детермінанта Δ перший, помножений на 3; далі, додамо до третього рядка одержаного детермінанта перший, помножений відповідно на -1; опісля, до четвертого перший, помножений на 2. Тоді детермінант Δ не зміниться (значення його не зміниться). Отже,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 33 \end{vmatrix}.$$

Далі, додамо до другого та четвертого рядків, одержаного детермінанта,

Приклад 6.

Далі, додамо до другого та четвертого рядків, одержаного детермінанта, третій помножений відповідно на 2 та 3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 33 \end{vmatrix} =$$

Приклад 6.

Далі, додамо до другого та четвертого рядків, одержаного детермінанта, третій помножений відповідно на 2 та 3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

Приклад 6.

Далі, додамо до другого та четвертого рядків, одержаного детермінанта, третій помножений відповідно на 2 та 3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

Приклад 6.

Далі, додамо до другого та четвертого рядків, одержаного детермінанта, третій помножений відповідно на 2 та 3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ & & & \end{vmatrix}$$

Приклад 6.

Далі, додамо до другого та четвертого рядків, одержаного детермінанта, третій помножений відповідно на 2 та 3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \end{vmatrix}.$$

Приклад 6.

Далі, додамо до другого та четвертого рядків, одержаного детермінанта, третій помножений відповідно на 2 та 3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \end{vmatrix}.$$

Тепер поміняємо місцями другий та четвертий рядки.

Приклад 6.

Далі, додамо до другого та четвертого рядків, одержаного детермінанта, третій помножений відповідно на 2 та 3.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 8 & 4 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 13 & -2 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \end{vmatrix}.$$

Тепер поміняємо місцями другий та четвертий рядки. Тоді

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}. \qquad (14)$$

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}$$

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ & & & \end{vmatrix}$$

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}.$$

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Нарешті до четвертого рядка детермінанта (15)

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Нарешті до четвертого рядка детермінанта (15) додамо третій,

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Нарешті до четвертого рядка детермінанта (15) додамо третій, помножений на $-\frac{18}{83}$.

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Нарешті до четвертого рядка детермінанта (15) додамо третій, помножений на $-\frac{18}{83}$.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -$$

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Нарешті до четвертого рядка детермінанта (15) додамо третій, помножений на $-\frac{18}{83}$.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Нарешті до четвертого рядка детермінанта (15) додамо третій, помножений на $-\frac{18}{83}$.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ & & & \\ & & & \end{vmatrix}$$

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Нарешті до четвертого рядка детермінанта (15) додамо третій, помножений на $-\frac{18}{83}$.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ & & & \end{vmatrix}$$

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Нарешті до четвертого рядка детермінанта (15) додамо третій, помножений на $-\frac{18}{83}$.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{301}{83} \end{vmatrix}.$$

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Нарешті до четвертого рядка детермінанта (15) додамо третій, помножений на $-\frac{18}{83}$.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{301}{83} \end{vmatrix}.$$

Із прикладу 5 слідує,

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Нарешті до четвертого рядка детермінанта (15) додамо третій, помножений на $-\frac{18}{83}$.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{301}{83} \end{vmatrix}.$$

Із прикладу 5 слідує, що

$$\Delta = -\left(1 \cdot 1 \cdot 83 \cdot \left(-\frac{301}{83}\right)\right)$$

Приклад 6.

Додамо до третього рядка детермінанта (14) другий, помножений на 4:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Нарешті до четвертого рядка детермінанта (15) додамо третій, помножений на $-\frac{18}{83}$.

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 18 & 25 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 19 & 33 \\ 0 & 0 & 83 & 132 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{301}{83} \end{vmatrix}.$$

Із прикладу 5 слідує, що

$$\Delta = -\left(1 \cdot 1 \cdot 83 \cdot \left(-\frac{301}{83}\right)\right) = 301.$$