Мінори та їх алгебраїчні доповнення. Обчислення детермінантів

Лектор — доц. Шапочка Ігор

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

8 жовтня 2022 року

Нехай дано детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

порядку n,

Нехай дано детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

порядку n, де n — деяке фіксоване натуральне число,

Нехай дано детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

порядку n, де n — деяке фіксоване натуральне число, a_{ij} — деяке дійсне число, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Нехай дано детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

порядку n, де n — деяке фіксоване натуральне число, a_{ij} — деяке дійсне число, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Розглянемо деяке натуральне число k менше за n.

Нехай дано детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad (1)$$

порядку n, де n — деяке фіксоване натуральне число, a_{ij} — деяке дійсне число, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Розглянемо деяке натуральне число k менше за n. Нехай $i_1, i_2, \ldots, i_k$

Нехай дано детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

порядку n, де n — деяке фіксоване натуральне число, a_{ij} — деяке дійсне число, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Розглянемо деяке натуральне число k менше за n. Нехай $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та $j_1, j_2, \ldots, j_k$

Нехай дано детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

порядку n, де n — деяке фіксоване натуральне число, a_{ij} — деяке дійсне число, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Розглянемо деяке натуральне число k менше за n. Нехай $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та $j_1, j_2, \ldots, j_k$ — відповідно номера деяких рядків та стовпців детермінанта (1),

Нехай дано детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

порядку n, де n — деяке фіксоване натуральне число, a_{ij} — деяке дійсне число, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Розглянемо деяке натуральне число k менше за n. Нехай $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та $j_1, j_2, \ldots, j_k$ — відповідно номера деяких рядків та стовпців детермінанта (1), впорядковані за зростанням,

Нехай дано детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1}$$

порядку n, де n — деяке фіксоване натуральне число, a_{ij} — деяке дійсне число, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Розглянемо деяке натуральне число k менше за n. Нехай $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та $j_1, j_2, \ldots, j_k$ — відповідно номера деяких рядків та стовпців детермінанта (1), впорядковані за зростанням, тобто

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \qquad j_1 < j_2 < \ldots < j_k.$$

Означення 1

Детермінант порядку k

Означення 1

Детермінант порядку k вигляду

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$$

Означення 1

Детермінант порядку k вигляду

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & a_{i_1j_2} & \cdots & a_{i_1j_k} \\ a_{i_2j_1} & a_{i_2j_2} & \cdots & a_{i_2j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_kj_1} & a_{i_kj_2} & \cdots & a_{i_kj_k} \end{vmatrix} \tag{2}$$

називається мінором k-го порядку,

Означення 1

Детермінант порядку k вигляду

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

називається мінором k-го порядку, розміщеним в рядках з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$

Означення 1

Детермінант порядку k вигляду

$$M = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

називається мінором k-го порядку, розміщеним в рядках з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та стовпцях з номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Приклад 1.

Нехай дано детермінант,

Приклад 1.

Нехай дано детермінант, в якому виберемо деякі 3 рядки та 3 стовпці,

Приклад 1.

Нехай дано детермінант, в якому виберемо деякі 3 рядки та 3 стовпці,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 9 & 4 & 9 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 4 & 4 & -2 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.

Нехай дано детермінант, в якому виберемо деякі 3 рядки та 3 стовпці,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 9 & 4 & 9 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 4 & 4 & -2 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Нехай дано детермінант, в якому виберемо деякі 3 рядки та 3 стовпці,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 9 & 4 & 9 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 4 & 4 & -2 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.

Нехай дано детермінант, в якому виберемо деякі 3 рядки та 3 стовпці,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 9 & 4 & 9 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 4 & 4 & -2 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 1.

Нехай дано детермінант, в якому виберемо деякі 3 рядки та 3 стовпці,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 9 & 4 & 9 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 4 & 4 & -2 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Детермінант

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

Приклад 1.

Нехай дано детермінант, в якому виберемо деякі 3 рядки та 3 стовпці,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 9 & 4 & 9 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 4 & 4 & -2 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Детермінант

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

є мінором 3-го порядку,

Нехай дано детермінант, в якому виберемо деякі 3 рядки та 3 стовпці,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 9 & 4 & 9 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 4 & 4 & -2 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Детермінант

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

є мінором 3-го порядку, розміщеним в рядках з номерами 2, 3, 6

Приклад 1.

Нехай дано детермінант, в якому виберемо деякі 3 рядки та 3 стовпці,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 6 & 9 & -1 & 0 & 0 & 5 \\ 4 & 8 & 4 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ 5 & 9 & 4 & 9 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 0 & 4 & 4 & 4 & -2 & 2 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Детермінант

$$M = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

є мінором 3-го порядку, розміщеним в рядках з номерами 2, 3, 6 та стовпцях з номерами 1, 4, 7.

Приклад 1.

Детермінант

$$M' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

Приклад 1.

Детермінант

$$M' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

є, так званим,

Приклад 1.

Детермінант

$$M' = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & 6 \\ 8 & 4 & -1 & 0 \\ 9 & 4 & 1 & -1 \\ 6 & 5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

є, так званим, доповнюючим мінором до мінору M.

Означення 2

Нехай M — мінор k-го порядку детермінанта Δ,

Означення 2

Нехай M — мінор k-го порядку детермінанта Δ, розміщений в рядках з номерами i_1, i_2, $\ldots$, i_k

Означення 2

Нехай M — мінор k-го порядку детермінанта Δ, розміщений в рядках з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та стовпцях з номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$.

Означення 2

Нехай M — мінор k-го порядку детермінанта Δ, розміщений в рядках з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпцях з номерами j_1, j_2, ..., j_k. Мінор M' цього детермінанта,

Означення 2

Нехай M — мінор k-го порядку детермінанта Δ, розміщений в рядках з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпцях з номерами j_1, j_2, ..., j_k. Мінор M' цього детермінанта, отриманий внаслідок закреслення рядків з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпців з номерами j_1, j_2, ..., j_k,

Означення 2

Нехай M — мінор k-го порядку детермінанта Δ, розміщений в рядках з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та стовпцях з номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$. Мінор M' цього детермінанта, отриманий внаслідок закреслення рядків з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та стовпців з номерами $j_1, j_2, \ldots, j_k$, називається доповнюючим мінором до мінору M.

Означення 2

Нехай M — мінор k-го порядку детермінанта Δ, розміщений в рядках з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпцях з номерами j_1, j_2, ..., j_k. Мінор M' цього детермінанта, отриманий внаслідок закреслення рядків з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпців з номерами j_1, j_2, ..., j_k, називається **доповнюючим мінором** до мінору M.

Очевидно, мінор M є доповнюючим до мінору M'.

Якщо мінор M детермінанта (1) знаходиться на перетині рядків та стовпців відповідно з номерами i_1, i_2, $\ldots$, i_k та j_1, j_2, $\ldots$, j_k, то до кінця цього параграфа, Якщо мінор M детермінанта (1) знаходиться на перетині рядків та стовпців відповідно з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та $j_1, j_2, \ldots, j_k$, то до кінця цього параграфа, через s_M будемо позначати суму номерів всіх рядків та стовпців, в яких знаходиться мінор M, Якщо мінор M детермінанта (1) знаходиться на перетині рядків та стовпців відповідно з номерами i_1, i_2, ..., i_k та j_1, j_2, ..., j_k, то до кінця цього параграфа, через s_M будемо позначати суму номерів всіх рядків та стовпців, в яких знаходиться мінор M, тобто

$$s_M = i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k.$$

Якщо мінор M детермінанта (1) знаходиться на перетині рядків та стовпців відповідно з номерами $i_1, i_2, \dots, i_k$ та $j_1, j_2, \dots, j_k$, то до кінця цього параграфа, через s_M будемо позначати суму номерів всіх рядків та стовпців, в яких знаходиться мінор M, тобто

$$s_M = i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k.$$

Означення 3

Нехай M — мінор k-го порядку детермінанта Δ, Якщо мінор M детермінанта (1) знаходиться на перетині рядків та стовпців відповідно з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та $j_1, j_2, \ldots, j_k$, то до кінця цього параграфа, через s_M будемо позначати суму номерів всіх рядків та стовпців, в яких знаходиться мінор M, тобто

$$s_M = i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k.$$

Означення 3

Нехай M — мінор k-го порядку детермінанта Δ, а M' — доповнюючий до нього мінор.

Якщо мінор M детермінанта (1) знаходиться на перетині рядків та стовпців відповідно з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$ та $j_1, j_2, \ldots, j_k$, то до кінця цього параграфа, через s_M будемо позначати суму номерів всіх рядків та стовпців, в яких знаходиться мінор M, тобто

$$s_M = i_1 + \cdots + i_k + j_1 + \cdots + j_k.$$

Означення 3

Нехай M — мінор k-го порядку детермінанта Δ, а M' — доповнюючий до нього мінор. Число $(-1)^{s_M} M'$ називається алгебраїчним доповненням до мінору M.

Теорема 1

Добуток довільного мінору M k-го порядку

Теорема 1

Добуток довільного мінору M k-го порядку на його алгебраїчне доповнення в детермінанті Δ

Теорема 1

Добуток довільного мінору M k-го порядку на його алгебраїчне доповнення в детермінанті Δ є алгебраїчною сумою,

Теорема 1

Добуток довільного мінору M k-го порядку на його алгебраїчне доповнення в детермінанті Δ є алгебраїчною сумою, доданки якої, що одержуються в результаті множення членів мінору M на взяті із знаком $(-1)^{s_M}$ члени доповнюючого мінору M',

Теорема 1

Добуток довільного мінору M k-го порядку на його алгебраїчне доповнення в детермінанті Δ є алгебраїчною сумою, доданки якої, що одержуються в результаті множення членів мінору M на взяті із знаком $(-1)^{s_M}$ члени доповнюючого мінору M', є членами детермінанта Δ

Теорема 1

Добуток довільного мінору M k-го порядку на його алгебраїчне доповнення в детермінанті Δ є алгебраїчною сумою, доданки якої, що одержуються в результаті множення членів мінору M на взяті із знаком $(-1)^{s_M}$ члени доповнюючого мінору M', є членами детермінанта Δ і з тими ж знаками з якими ці члени входять у детермінант Δ.

Доведення.

Спочатку доведемо теорему у випадку, коли мінор M знаходиться у перших k рядках та перших k стовпцях детермінанта (1).

Доведення.

Спочатку доведемо теорему у випадку, коли мінор M знаходиться у перших k рядках та перших k стовпцях детермінанта (1).

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k\,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1\,1} & \dots & a_{k+1\,k} & a_{k+1\,k+1} & \dots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$$

Доведення.

Спочатку доведемо теорему у випадку, коли мінор M знаходиться у перших k рядках та перших k стовпцях детермінанта (1).

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k\,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1\,1} & \dots & a_{k+1\,k} & a_{k+1\,k+1} & \dots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$$

Доведення.

Спочатку доведемо теорему у випадку, коли мінор M знаходиться у перших k рядках та перших k стовпцях детермінанта (1).

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1\,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k\,k+1} & \ldots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1\,1} & \ldots & a_{k+1\,k} & a_{k+1\,k+1} & \ldots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & a_{n\,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right|$$

Тоді

$$s_M = 1 + \ldots + k + 1 + \ldots + k = 2(1 + \ldots + k),$$

Доведення.

Спочатку доведемо теорему у випадку, коли мінор M знаходиться у перших k рядках та перших k стовпцях детермінанта (1).

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \ldots & a_{1k} & a_{1\,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} & a_{k\,k+1} & \ldots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1\,1} & \ldots & a_{k+1\,k} & a_{k+1\,k+1} & \ldots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nk} & a_{n\,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{array}\right|$$

Тоді

$$s_M = 1 + \ldots + k + 1 + \ldots + k = 2(1 + \ldots + k),$$

отже,

$$(-1)^{s_M} = (-1)^{2(1+\ldots+k)} = 1.$$

Доведення.

Спочатку доведемо теорему у випадку, коли мінор M знаходиться у перших k рядках та перших k стовпцях детермінанта (1).

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1k} & a_{1\,k+1} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} & a_{k\,k+1} & \dots & a_{kn} \\ \hline a_{k+1\,1} & \dots & a_{k+1\,k} & a_{k+1\,k+1} & \dots & a_{k+1\,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nk} & a_{n\,k+1} & \dots & a_{nn} \end{array}\right|$$

Тоді

$$s_M = 1 + \ldots + k + 1 + \ldots + k = 2(1 + \ldots + k),$$

отже,

$$(-1)^{s_M} = (-1)^{2(1+\ldots+k)} = 1.$$

Тому алгебраїчним доповненням до мінору M є доповнюючий мінор M'.

Доведення

Тепер, нехай

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{kq_k} \tag{3}$$

— довільний член мінору M.

Доведення

Тепер, нехай

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{kq_k} \tag{3}$$

— довільний член мінору M. Його знак в M дорівнює $(-1)^r$, де r — кількість інверсій у підстановці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k \end{pmatrix}.$$

Доведення

Тепер, нехай

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{kq_k} \tag{3}$$

— довільний член мінору M. Його знак в M дорівнює $(-1)^r$, де r — кількість інверсій у підстановці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k \end{pmatrix}.$$

Довільний член

$$a_{k+1,q_{k+1}}a_{k+2,q_{k+2}}\cdots a_{nq_n} \tag{4}$$

мінору M'

Доведення

Тепер, нехай

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{kq_k} \tag{3}$$

— довільний член мінору M. Його знак в M дорівнює $(-1)^r$, де r — кількість інверсій у підстановці

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k \end{pmatrix}.$$

Довільний член

$$a_{k+1,q_{k+1}}a_{k+2,q_{k+2}}\cdots a_{nq_n} \tag{4}$$

мінору M' має в цьому мінорі знак $(-1)^{r'}$, де r' — кількість інверсій у підстановці

$$\begin{pmatrix} k+1 & k+2 & \dots & n \\ q_{k+1} & q_{k+2} & \dots & q_n \end{pmatrix}.$$

Доведення

Перемноживши члени (3) і (4) відповідно мінорів M і M', ми одержимо добуток

$$a_{1q_1}\cdots a_{kq_k}a_{k+1,q_{k+1}}\cdots a_{nq_n} \tag{5}$$

n елементів детермінанта Δ,

Доведення

Перемноживши члени (3) і (4) відповідно мінорів M і M', ми одержимо добуток

$$a_{1q_1} \cdots a_{kq_k} a_{k+1,q_{k+1}} \cdots a_{nq_n} \tag{5}$$

n елементів детермінанта Δ, які розміщені в різних рядках та різних стовпцях цього детермінанта, а отже, добуток (5) є його членом.

Доведення

Перемноживши члени (3) і (4) відповідно мінорів M і M', ми одержимо добуток

$$a_{1q_1} \cdots a_{kq_k} a_{k+1,q_{k+1}} \cdots a_{nq_n} \tag{5}$$

n елементів детермінанта Δ, які розміщені в різних рядках та різних стовпцях цього детермінанта, а отже, добуток (5) є його членом. Знак члена (5) в добутку MM' дорівнює $(-1)^r \cdot (-1)^{r'} = (-1)^{r+r'}$.

Доведення

Перемноживши члени (3) і (4) відповідно мінорів M і M', ми одержимо добуток

$$a_{1q_1}\cdots a_{kq_k}a_{k+1,q_{k+1}}\cdots a_{nq_n} \tag{5}$$

n елементів детермінанта Δ, які розміщені в різних рядках та різних стовпцях цього детермінанта, а отже, добуток (5) є його членом. Знак члена (5) в добутку MM' дорівнює $(-1)^r\cdot(-1)^{r'}=(-1)^{r+r'}$. Такий знак має також член (5) в детермінанті (1),

Доведення

Перемноживши члени (3) і (4) відповідно мінорів M і M', ми одержимо добуток

$$a_{1q_1} \cdots a_{kq_k} a_{k+1,q_{k+1}} \cdots a_{nq_n} \tag{5}$$

n елементів детермінанта Δ, які розміщені в різних рядках та різних стовпцях цього детермінанта, а отже, добуток (5) є його членом. Знак члена (5) в добутку MM' дорівнює $(-1)^r \cdot (-1)^{r'} = (-1)^{r+r'}$. Такий знак має також член (5) в детермінанті (1), оскільки підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k & q_{k+1} & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

яка відповідає цьому члену, має $r + r'$ інверсій.

Доведення

Перемноживши члени (3) і (4) відповідно мінорів M і M', ми одержимо добуток

$$a_{1q_1} \cdots a_{kq_k} a_{k+1,q_{k+1}} \cdots a_{nq_n} \tag{5}$$

n елементів детермінанта Δ, які розміщені в різних рядках та різних стовпцях цього детермінанта, а отже, добуток (5) є його членом. Знак члена (5) в добутку MM' дорівнює $(-1)^r \cdot (-1)^{r'} = (-1)^{r+r'}$. Такий знак має також член (5) в детермінанті (1), оскільки підстановка

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_k & q_{k+1} & \dots & q_n \end{pmatrix},$$

яка відповідає цьому члену, має $r + r'$ інверсій. Останнє твердження очевидне, так як $q_i \leq k < k + 1 \leq q_j$ для довільних $i \in \{1, \dots, k\}$ та $j \in \{k + 1, \dots, n\}$. Таким чином теорема у вказаному вище випадку доведена.

Доведення

Розглянемо тепер довільний мінор M k-го порядку, розміщений в рядках з номерами i_1, i_2, $\ldots$, i_k та стовпцях з номерами j_1, j_2, $\ldots$ $\ldots$, j_k, причому

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \qquad j_1 < j_2 < \ldots < j_k.$$

Доведення

Розглянемо тепер довільний мінор M k-го порядку, розміщений в рядках з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпцях з номерами j_1, j_2, ..., j_k, причому

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_k, \qquad j_1 < j_2 < \ldots < j_k.$$

Нехай M' — доповнюючий мінор до мінору M.

Доведення

$$\Delta = \begin{vmatrix} \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & a_{i_1j_1} & \dots & a_{i_1j_2} & \dots & a_{i_1j_k} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & a_{i_2j_1} & \dots & a_{i_2j_2} & \dots & a_{i_2j_k} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ \dots & a_{i_kj_1} & \dots & a_{i_kj_2} & \dots & a_{i_kj_k} & \dots \\ \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}.$$

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1),

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ,

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M,

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'.

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'. Для цього, наприклад, зробимо наступне:

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'. Для цього, наприклад, зробимо наступне: поміняємо місцями i_1-ий рядок з $(i_1 - 1)$-им, далі,

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'. Для цього, наприклад, зробимо наступне: поміняємо місцями i_1-ий рядок з $(i_1 - 1)$-им, далі, $(i_1 - 1)$-ий рядок з $(i_1 - 2)$-им і т. д.,

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'. Для цього, наприклад, зробимо наступне: поміняємо місцями i_1-ий рядок з $(i_1 - 1)$-им, далі, $(i_1 - 1)$-ий рядок з $(i_1 - 2)$-им і т. д., поки i_1-й рядок детермінанта (1) не стане першим рядком;

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'. Для цього, наприклад, зробимо наступне: поміняємо місцями i_1-ий рядок з $(i_1 - 1)$-им, далі, $(i_1 - 1)$-ий рядок з $(i_1 - 2)$-им і т. д., поки i_1-й рядок детермінанта (1) не стане першим рядком; для цього нам потрібно переставити рядки $i_1 - 1$ разів;

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'. Для цього, наприклад, зробимо наступне: поміняємо місцями i_1-ий рядок з (i_1-1)-им, далі, (i_1-1)-ий рядок з (i_1-2)-им і т. д., поки i_1-й рядок детермінанта (1) не стане першим рядком; для цього нам потрібно переставити рядки i_1-1 разів; аналогічно переставляємо i_2-ий рядок детермінанта (1) доти, поки він не стане другим рядком;

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'. Для цього, наприклад, зробимо наступне: поміняємо місцями i_1-ий рядок з $(i_1 - 1)$-им, далі, $(i_1 - 1)$-ий рядок з $(i_1 - 2)$-им і т. д., поки i_1-й рядок детермінанта (1) не стане першим рядком; для цього нам потрібно переставити рядки $i_1 - 1$ разів; аналогічно переставляємо i_2-ий рядок детермінанта (1) доти, поки він не стане другим рядком; для цього потрібно $i_2 - 2$ разів переставляти рядки;

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'. Для цього, наприклад, зробимо наступне: поміняємо місцями i_1-ий рядок з (i_1-1)-им, далі, (i_1-1)-ий рядок з (i_1-2)-им і т. д., поки i_1-й рядок детермінанта (1) не стане першим рядком; для цього нам потрібно переставити рядки i_1-1 разів; аналогічно переставляємо i_2-ий рядок детермінанта (1) доти, поки він не стане другим рядком; для цього потрібно i_2-2 разів переставляти рядки; цей процес продовжуємо до тих пір, поки i_k-ий рядок детермінанта (1) не стане k-им;

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'. Для цього, наприклад, зробимо наступне: поміняємо місцями i_1-ий рядок з (i_1-1)-им, далі, (i_1-1)-ий рядок з (i_1-2)-им і т. д., поки i_1-й рядок детермінанта (1) не стане першим рядком; для цього нам потрібно переставити рядки i_1-1 разів; аналогічно переставляємо i_2-ий рядок детермінанта (1) доти, поки він не стане другим рядком; для цього потрібно i_2-2 разів переставляти рядки; цей процес продовжуємо до тих пір, поки i_k-ий рядок детермінанта (1) не стане k-им; всього для цього необхідно виконати

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_k-k)=$$

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'. Для цього, наприклад, зробимо наступне: поміняємо місцями i_1-ий рядок з (i_1-1)-им, далі, (i_1-1)-ий рядок з (i_1-2)-им і т. д., поки i_1-й рядок детермінанта (1) не стане першим рядком; для цього нам потрібно переставити рядки i_1-1 разів; аналогічно переставляємо i_2-ий рядок детермінанта (1) доти, поки він не стане другим рядком; для цього потрібно i_2-2 разів переставляти рядки; цей процес продовжуємо до тих пір, поки i_k-ий рядок детермінанта (1) не стане k-им; всього для цього необхідно виконати

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_k-k)=(i_1+i_2+\cdots+i_k)-(1+2+\cdots+k)$$

транспозицій рядків;

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'. Для цього, наприклад, зробимо наступне: поміняємо місцями i_1-ий рядок з $(i_1 - 1)$-им, далі, $(i_1 - 1)$-ий рядок з $(i_1 - 2)$-им і т. д., поки i_1-й рядок детермінанта (1) не стане першим рядком; для цього нам потрібно переставити рядки $i_1 - 1$ разів; аналогічно переставляємо i_2-ий рядок детермінанта (1) доти, поки він не стане другим рядком; для цього потрібно $i_2 - 2$ разів переставляти рядки; цей процес продовжуємо до тих пір, поки i_k-ий рядок детермінанта (1) не стане k-им; всього для цього необхідно виконати

$$(i_1 - 1) + (i_2 - 2) + \cdots + (i_k - k) = (i_1 + i_2 + \cdots + i_k) - (1 + 2 + \cdots + k)$$

транспозицій рядків; аналогічний процес застосуємо до стовпців детермінанта,

Доведення

Переставляючи рядки та стовпці детермінанта (1), побудуємо новий детермінант Λ, в якого в перших k рядках та перших k стовпцях знаходиться мінор M, а доповнюючим до нього є мінор M'. Для цього, наприклад, зробимо наступне: поміняємо місцями i_1-ий рядок з (i_1-1)-им, далі, (i_1-1)-ий рядок з (i_1-2)-им і т. д., поки i_1-й рядок детермінанта (1) не стане першим рядком; для цього нам потрібно переставити рядки i_1-1 разів; аналогічно переставляємо i_2-ий рядок детермінанта (1) доти, поки він не стане другим рядком; для цього потрібно i_2-2 разів переставляти рядки; цей процес продовжуємо до тих пір, поки i_k-ий рядок детермінанта (1) не стане k-им; всього для цього необхідно виконати

$$(i_1-1)+(i_2-2)+\cdots+(i_k-k)=(i_1+i_2+\cdots+i_k)-(1+2+\cdots+k)$$

транспозицій рядків; аналогічний процес застосуємо до стовпців детермінанта, отриманого після перестановки рядків; для цього потрібно виконати

$$(j_1+j_2+\cdots+j_k)-(1+2+\cdots+k)$$

транспозицій стовпців.

Доведення

Для мінору детермінанта Λ,

Доведення

Для мінору детермінанта Λ, що знаходить в перших k рядках та перших k стовпцях,

Доведення

Для мінору детермінанта Λ, що знаходить в перших k рядках та перших k стовпцях, тобто мінору M, ми можемо застосувати нашу теорему.

Доведення

Для мінору детермінанта Λ, що знаходить в перших k рядках та перших k стовпцях, тобто мінору M, ми можемо застосувати нашу теорему. Таким чином всі доданки, враховуючи знаки, добутку MM' входять в детермінант Λ.

Доведення

Для мінору детермінанта Λ, що знаходить в перших k рядках та перших k стовпцях, тобто мінору M, ми можемо застосувати нашу теорему. Таким чином всі доданки, враховуючи знаки, добутку MM' входять в детермінант Λ. Із теореми, про зміну місцями рядків або стовпців детермінанта слідує, що

$$\Lambda = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)-(1+2+\cdots+k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)-(1+2+\cdots+k)}\Delta =$$

Доведення

Для мінору детермінанта Λ, що знаходить в перших k рядках та перших k стовпцях, тобто мінору M, ми можемо застосувати нашу теорему. Таким чином всі доданки, враховуючи знаки, добутку MM' входять в детермінант Λ. Із теореми, про зміну місцями рядків або стовпців детермінанта слідує, що

$$\Lambda = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)-(1+2+\cdots+k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)-(1+2+\cdots+k)}\Delta =$$

$$= (-1)^{s_M - 2\cdot(1+2+\cdots+k)}\Delta =$$

Доведення

Для мінору детермінанта Λ, що знаходить в перших k рядках та перших k стовпцях, тобто мінору M, ми можемо застосувати нашу теорему. Таким чином всі доданки, враховуючи знаки, добутку MM' входять в детермінант Λ. Із теореми, про зміну місцями рядків або стовпців детермінанта слідує, що

$$\Lambda = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)-(1+2+\cdots+k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)-(1+2+\cdots+k)}\Delta =$$

$$= (-1)^{s_M-2\cdot(1+2+\cdots+k)}\Delta =$$

$$= (-1)^{s_M}\Delta.$$

Доведення

Для мінору детермінанта Λ, що знаходить в перших k рядках та перших k стовпцях, тобто мінору M, ми можемо застосувати нашу теорему. Таким чином всі доданки, враховуючи знаки, добутку MM' входять в детермінант Λ. Із теореми, про зміну місцями рядків або стовпців детермінанта слідує, що

$$\Lambda = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)-(1+2+\cdots+k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)-(1+2+\cdots+k)}\Delta =$$

$$= (-1)^{s_M - 2\cdot(1+2+\cdots+k)}\Delta =$$

$$= (-1)^{s_M}\Delta.$$

Звідси

$$\Delta = \frac{\Lambda}{(-1)^{s_M}}$$

Доведення

Для мінору детермінанта Λ, що знаходить в перших k рядках та перших k стовпцях, тобто мінору M, ми можемо застосувати нашу теорему. Таким чином всі доданки, враховуючи знаки, добутку MM' входять в детермінант Λ. Із теореми, про зміну місцями рядків або стовпців детермінанта слідує, що

$$\Lambda = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)-(1+2+\cdots+k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)-(1+2+\cdots+k)}\Delta =$$

$$= (-1)^{s_M - 2\cdot(1+2+\cdots+k)}\Delta =$$

$$= (-1)^{s_M}\Delta.$$

Звідси

$$\Delta = \frac{\Lambda}{(-1)^{s_M}} = (-1)^{s_M}\Lambda.$$

Доведення

Для мінору детермінанта Λ, що знаходить в перших k рядках та перших k стовпцях, тобто мінору M, ми можемо застосувати нашу теорему. Таким чином всі доданки, враховуючи знаки, добутку MM' входять в детермінант Λ. Із теореми, про зміну місцями рядків або стовпців детермінанта слідує, що

$$\Lambda = (-1)^{(i_1+i_2+\dots+i_k)-(1+2+\dots+k)+(j_1+j_2+\dots+j_k)-(1+2+\dots+k)}\Delta =$$

$$= (-1)^{s_M - 2\cdot(1+2+\dots+k)}\Delta =$$

$$= (-1)^{s_M}\Delta.$$

Звідси

$$\Delta = \frac{\Lambda}{(-1)^{s_M}} = (-1)^{s_M}\Lambda.$$

З вище сказаного слідує, що всі доданки добутку мінору M детермінанта Δ на його алгебраїчне доповнення $(-1)^{s_M}M'$ входять в детермінант Δ.

Доведення

Для мінору детермінанта Λ, що знаходить в перших k рядках та перших k стовпцях, тобто мінору M, ми можемо застосувати нашу теорему. Таким чином всі доданки, враховуючи знаки, добутку MM' входять в детермінант Λ. Із теореми, про зміну місцями рядків або стовпців детермінанта слідує, що

$$\Lambda = (-1)^{(i_1+i_2+\cdots+i_k)-(1+2+\cdots+k)+(j_1+j_2+\cdots+j_k)-(1+2+\cdots+k)}\Delta =$$
$$= (-1)^{s_M - 2\cdot(1+2+\cdots+k)}\Delta =$$
$$= (-1)^{s_M}\Delta.$$

Звідси

$$\Delta = \frac{\Lambda}{(-1)^{s_M}} = (-1)^{s_M}\Lambda.$$

З вище сказаного слідує, що всі доданки добутку мінору M детермінанта Δ на його алгебраїчне доповнення $(-1)^{s_M}M'$ входять в детермінант Δ. Теорема доведена.

Теорема 2 (Лаплас)

Нехай в детермінанті порядку n

Теорема 2 (Лаплас)

Нехай в детермінанті порядку n довільно вибрані k рядків

Теорема 2 (Лаплас)

Нехай в детермінанті порядку n *довільно вибрані* k *рядків* $($*або* k *стовпців*$)$,

Теорема 2 (Лаплас)

Нехай в детермінанті порядку n *довільно вибрані* k *рядків* (*або* k *стовпців*), $1 \leq k \leq n-1$.

Теорема 2 (Лаплас)

Нехай в детермінанті порядку n *довільно вибрані* k *рядків* (*або* k *стовпців*), $1 \leq k \leq n-1$. *Тоді цей детермінант дорівнює*

Теорема 2 (Лаплас)

Нехай в детермінанті порядку n довільно вибрані k рядків (або k стовпців), $1 \leq k \leq n-1$. Тоді цей детермінант дорівнює сумі добутків всіх мінорів k-го порядку,

Теорема 2 (Лаплас)

Нехай в детермінанті порядку n *довільно вибрані* k *рядків (або* k *стовпців),* $1 \le k \le n-1$. *Тоді цей детермінант дорівнює сумі добутків всіх мінорів* k*-го порядку, що розміщені в цих рядках (стовпцях),*

Теорема 2 (Лаплас)

Нехай в детермінанті порядку n *довільно вибрані* k *рядків (або* k *стовпців),* $1 \leq k \leq n-1$*. Тоді цей детермінант дорівнює сумі добутків всіх мінорів* k*-го порядку, що розміщені в цих рядках (стовпцях), на їх алгебраїчні доповнення.*

Доведення

Із означення детермінанта та теореми 1 випливає,

Доведення

Із означення детермінанта та теореми 1 випливає, що всі добутки мінорів k-го порядку на їх алгебраїчні доповнення

Доведення

Із означення детермінанта та теореми 1 випливає, що всі добутки мінорів k-го порядку на їх алгебраїчні доповнення є сумами $k!(n-k)!$ членів детермінанта Δ,

Доведення

Із означення детермінанта та теореми 1 випливає, що всі добутки мінорів k-го порядку на їх алгебраїчні доповнення є сумами $k!(n-k)!$ членів детермінанта Δ, взятих з тими ж знаками, з якими вони входять в цей детермінант.

Доведення

Із означення детермінанта та теореми 1 випливає, що всі добутки мінорів k-го порядку на їх алгебраїчні доповнення є сумами $k!(n-k)!$ членів детермінанта Δ, взятих з тими ж знаками, з якими вони входять в цей детермінант. З іншого боку число всіх мінорів k-го порядку,

Доведення

Із означення детермінанта та теореми 1 випливає, що всі добутки мінорів k-го порядку на їх алгебраїчні доповнення є сумами $k!(n-k)!$ членів детермінанта Δ, взятих з тими ж знаками, з якими вони входять в цей детермінант. З іншого боку число всіх мінорів k-го порядку, що знаходяться у фіксованих k рядках,

Доведення

Із означення детермінанта та теореми 1 випливає, що всі добутки мінорів k-го порядку на їх алгебраїчні доповнення є сумами $k!(n-k)!$ членів детермінанта Δ, взятих з тими ж знаками, з якими вони входять в цей детермінант. З іншого боку число всіх мінорів k-го порядку, що знаходяться у фіксованих k рядках, дорівнює числу всіх комбінацій з n по k,

Доведення

Із означення детермінанта та теореми 1 випливає, що всі добутки мінорів k-го порядку на їх алгебраїчні доповнення є сумами $k!(n-k)!$ членів детермінанта Δ, взятих з тими ж знаками, з якими вони входять в цей детермінант. З іншого боку число всіх мінорів k-го порядку, що знаходяться у фіксованих k рядках, дорівнює числу всіх комбінацій з n по k, тобто

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Доведення

Із означення детермінанта та теореми 1 випливає, що всі добутки мінорів k-го порядку на їх алгебраїчні доповнення є сумами $k!(n-k)!$ членів детермінанта Δ, взятих з тими ж знаками, з якими вони входять в цей детермінант. З іншого боку число всіх мінорів k-го порядку, що знаходяться у фіксованих k рядках, дорівнює числу всіх комбінацій з n по k, тобто

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Отже, вказана у даній теоремі сума

Доведення

Із означення детермінанта та теореми 1 випливає, що всі добутки мінорів k-го порядку на їх алгебраїчні доповнення є сумами $k!(n-k)!$ членів детермінанта Δ, взятих з тими ж знаками, з якими вони входять в цей детермінант. З іншого боку число всіх мінорів k-го порядку, що знаходяться у фіксованих k рядках, дорівнює числу всіх комбінацій з n по k, тобто

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Отже, вказана у даній теоремі сума є сумою

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k!(n-k)! = n!$$

Доведення

Із означення детермінанта та теореми 1 випливає, що всі добутки мінорів k-го порядку на їх алгебраїчні доповнення є сумами $k!(n-k)!$ членів детермінанта Δ, взятих з тими ж знаками, з якими вони входять в цей детермінант. З іншого боку число всіх мінорів k-го порядку, що знаходяться у фіксованих k рядках, дорівнює числу всіх комбінацій з n по k, тобто

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Отже, вказана у даній теоремі сума є сумою

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k!(n-k)! = n!$$

членів детермінанта Δ, причому знаки цих членів у цій сумі та детермінанті Δ співпадають.

Доведення

Із означення детермінанта та теореми 1 випливає, що всі добутки мінорів k-го порядку на їх алгебраїчні доповнення є сумами $k!(n-k)!$ членів детермінанта Δ, взятих з тими ж знаками, з якими вони входять в цей детермінант. З іншого боку число всіх мінорів k-го порядку, що знаходяться у фіксованих k рядках, дорівнює числу всіх комбінацій з n по k, тобто

$$\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Отже, вказана у даній теоремі сума є сумою

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot k!(n-k)! = n!$$

членів детермінанта Δ, причому знаки цих членів у цій сумі та детермінанті Δ співпадають.Тому для доведення теореми достатньо лише показати, що у вказану в теоремі суму не входить двічі жоден член детермінанта Δ.

Доведення

Нехай i_1, i_2, ..., i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ.

Доведення

Нехай i_1, i_2, ..., i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, ..., i_k

$$a_{i_1q_{i_1}}a_{i_2q_{i_2}}\cdots a_{i_kq_{i_k}}.$$

Доведення

Нехай $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами $i_1, i_2, \ldots, i_k$

$$a_{i_1 q_{i_1}} a_{i_2 q_{i_2}} \cdots a_{i_k q_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M,

Доведення

Нехай i_1, i_2, ..., i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, ..., i_k

$$a_{i_1q_{i_1}}a_{i_2q_{i_2}}\cdots a_{i_kq_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами i_1, i_2, ..., i_k

Доведення

Нехай i_1, i_2, ..., i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, ..., i_k

$$a_{i_1q_{i_1}}a_{i_2q_{i_2}}\cdots a_{i_kq_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпців з номерами q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k}

Доведення

Нехай i_1, i_2, ..., i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, ..., i_k

$$a_{i_1 q_{i_1}} a_{i_2 q_{i_2}} \cdots a_{i_k q_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпців з номерами q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k} і не є членом жодного іншого мінору k-го порядку,

Доведення

Нехай i_1, i_2, $\ldots$, i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, $\ldots$, i_k

$$a_{i_1q_{i_1}}a_{i_2q_{i_2}}\cdots a_{i_kq_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами i_1, i_2, $\ldots$, i_k та стовпців з номерами q_{i_1}, q_{i_2}, $\ldots$, q_{i_k} і не є членом жодного іншого мінору k-го порядку, що знаходиться в цих же рядках та інших стовпцях.

Доведення

Нехай i_1, i_2, ..., i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, ..., i_k

$$a_{i_1q_{i_1}}a_{i_2q_{i_2}}\cdots a_{i_kq_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпців з номерами q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k} і не є членом жодного іншого мінору k-го порядку, що знаходиться в цих же рядках та інших стовпцях. Отже, мінор M, який знаходиться в рядках з номерами i_1, i_2, ..., i_k

Доведення

Нехай i_1, i_2, $\dots$, i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, $\dots$, i_k

$$a_{i_1q_{i_1}}a_{i_2q_{i_2}}\cdots a_{i_kq_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами i_1, i_2, $\dots$, i_k та стовпців з номерами q_{i_1}, q_{i_2}, $\dots$, q_{i_k} і не є членом жодного іншого мінору k-го порядку, що знаходиться в цих же рядках та інших стовпцях. Отже, мінор M, який знаходиться в рядках з номерами i_1, i_2, $\dots$, i_k визначається членом (6)

Доведення

Нехай i_1, i_2, ..., i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, ..., i_k

$$a_{i_1q_{i_1}}a_{i_2q_{i_2}}\cdots a_{i_kq_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпців з номерами q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k} і не є членом жодного іншого мінору k-го порядку, що знаходиться в цих же рядках та інших стовпцях. Отже, мінор M, який знаходиться в рядках з номерами i_1, i_2, ..., i_k визначається членом (6) однозначно.

Доведення

Нехай i_1, i_2, ..., i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, ..., i_k

$$a_{i_1 q_{i_1}} a_{i_2 q_{i_2}} \cdots a_{i_k q_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпців з номерами q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k} і не є членом жодного іншого мінору k-го порядку, що знаходиться в цих же рядках та інших стовпцях. Отже, мінор M, який знаходиться в рядках з номерами i_1, i_2, ..., i_k визначається членом (6) однозначно. Неважко бачити, що добуток інших елементів члена (6),

Доведення

Нехай i_1, i_2, ..., i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, ..., i_k

$$a_{i_1q_{i_1}}a_{i_2q_{i_2}}\cdots a_{i_kq_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпців з номерами q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k} і не є членом жодного іншого мінору k-го порядку, що знаходиться в цих же рядках та інших стовпцях. Отже, мінор M, який знаходиться в рядках з номерами i_1, i_2, ..., i_k визначається членом (6) однозначно. Неважко бачити, що добуток інших елементів члена (6), які не належать вище вказаним рядкам,

Доведення

Нехай i_1, i_2, ..., i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, ..., i_k

$$a_{i_1q_{i_1}}a_{i_2q_{i_2}}\cdots a_{i_kq_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпців з номерами q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k} і не є членом жодного іншого мінору k-го порядку, що знаходиться в цих же рядках та інших стовпцях. Отже, мінор M, який знаходиться в рядках з номерами i_1, i_2, ..., i_k визначається членом (6) однозначно. Неважко бачити, що добуток інших елементів члена (6), які не належать вище вказаним рядкам, є членом доповнюючого мінору M' до мінору M.

Доведення

Нехай i_1, i_2, ..., i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1} a_{2q_2} \cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, ..., i_k

$$a_{i_1 q_{i_1}} a_{i_2 q_{i_2}} \cdots a_{i_k q_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпців з номерами q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k} і не є членом жодного іншого мінору k-го порядку, що знаходиться в цих же рядках та інших стовпцях. Отже, мінор M, який знаходиться в рядках з номерами i_1, i_2, ..., i_k визначається членом (6) однозначно. Неважко бачити, що добуток інших елементів члена (6), які не належать вище вказаним рядкам, є членом доповнюючого мінору M' до мінору M. Таким чином довільний член (6) детермінанта Δ входить у цілком, причому однозначно, визначений добуток $M \cdot M'$ мінору k-го порядку,

Доведення

Нехай i_1, i_2, ..., i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, ..., i_k

$$a_{i_1q_{i_1}}a_{i_2q_{i_2}}\cdots a_{i_kq_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпців з номерами q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k} і не є членом жодного іншого мінору k-го порядку, що знаходиться в цих же рядках та інших стовпцях. Отже, мінор M, який знаходиться в рядках з номерами i_1, i_2, ..., i_k визначається членом (6) однозначно. Неважко бачити, що добуток інших елементів члена (6), які не належать вище вказаним рядкам, є членом доповнюючого мінору M' до мінору M. Таким чином довільний член (6) детермінанта Δ входить у цілком, причому однозначно, визначений добуток $M \cdot M'$ мінору k-го порядку, який знаходиться у вказаних вище рядках на його доповнюючий мінор.

Доведення

Нехай i_1, i_2, ..., i_k — номера, вибраних k рядків,

$$a_{1q_1}a_{2q_2}\cdots a_{nq_n} \tag{6}$$

— довільний член детермінанта Δ. Розглянемо добуток тих елементів цього члену, які належать рядкам з номерами i_1, i_2, ..., i_k

$$a_{i_1q_{i_1}}a_{i_2q_{i_2}}\cdots a_{i_kq_{i_k}}.$$

Очевидно, цей добуток є членом мінору M, що знаходиться на перетині рядків з номерами i_1, i_2, ..., i_k та стовпців з номерами q_{i_1}, q_{i_2}, ..., q_{i_k} і не є членом жодного іншого мінору k-го порядку, що знаходиться в цих же рядках та інших стовпцях. Отже, мінор M, який знаходиться в рядках з номерами i_1, i_2, ..., i_k визначається членом (6) однозначно. Неважко бачити, що добуток інших елементів члена (6), які не належать вище вказаним рядкам, є членом доповнюючого мінору M' до мінору M. Таким чином довільний член (6) детермінанта Δ входить у цілком, причому однозначно, визначений добуток $M \cdot M'$ мінору k-го порядку, який знаходиться у вказаних вище рядках на його доповнюючий мінор. Це завершує доведення теореми.

Цілком зрозуміло, що мінорами першого порядку детермінанта є самі елементи цього детермінанта.

Цілком зрозуміло, що мінорами першого порядку детермінанта є самі елементи цього детермінанта. В сенсі цього зауваження має місце наступний наслідок

Цілком зрозуміло, що мінорами першого порядку детермінанта є самі елементи цього детермінанта. В сенсі цього зауваження має місце наступний наслідок із попередньої теореми.

Цілком зрозуміло, що мінорами першого порядку детермінанта є самі елементи цього детермінанта. В сенсі цього зауваження має місце наступний наслідок із попередньої теореми.

Наслідок 1

Детермінант дорівнює

Цілком зрозуміло, що мінорами першого порядку детермінанта є самі елементи цього детермінанта. В сенсі цього зауваження має місце наступний наслідок із попередньої теореми.

Наслідок 1

Детермінант дорівнює сумі добутків всіх елементів довільного його рядка

Цілком зрозуміло, що мінорами першого порядку детермінанта є самі елементи цього детермінанта. В сенсі цього зауваження має місце наступний наслідок із попередньої теореми.

Наслідок 1

Детермінант дорівнює сумі добутків всіх елементів довільного його рядка (стовпця)

Цілком зрозуміло, що мінорами першого порядку детермінанта є самі елементи цього детермінанта. В сенсі цього зауваження має місце наступний наслідок із попередньої теореми.

Наслідок 1

Детермінант дорівнює сумі добутків всіх елементів довільного його рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення.

Тобто, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— деякий детермінант n-го порядку,

Тобто, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— деякий детермінант n-го порядку, де $n \in \mathbb{N}$,

Тобто, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— деякий детермінант n-го порядку, де $n \in \mathbb{N}$, а A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у цьому детермінанті,

Тобто, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— деякий детермінант n-го порядку, де $n \in \mathbb{N}$, а A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у цьому детермінанті, i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

Тобто, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— деякий детермінант n-го порядку, де $n \in \mathbb{N}$, а A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у цьому детермінанті, $i,\ j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то для довільного $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ справджуються рівності

Тобто, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— деякий детермінант n-го порядку, де $n \in \mathbb{N}$, а A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у цьому детермінанті, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджуються рівності

$$\Delta = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}, \tag{7}$$

Тобто, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— деякий детермінант n-го порядку, де $n \in \mathbb{N}$, а A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у цьому детермінанті, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджуються рівності

$$\Delta = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}, \tag{7}$$

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}. \tag{8}$$

Тобто, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— деякий детермінант n-го порядку, де $n \in \mathbb{N}$, а A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у цьому детермінанті, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджуються рівності

$$\Delta = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}, \qquad (7)$$

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}. \qquad (8)$$

Формула (7) називається розкладом детермінанта Δ

Тобто, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— деякий детермінант n-го порядку, де $n \in \mathbb{N}$, а A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у цьому детермінанті, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджуються рівності

$$\Delta = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}, \tag{7}$$

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}. \tag{8}$$

Формула (7) називається розкладом детермінанта Δ за елементами його k-го рядка.

Тобто, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— деякий детермінант n-го порядку, де $n \in \mathbb{N}$, а A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у цьому детермінанті, $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджуються рівності

$$\Delta = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}, \tag{7}$$

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}. \tag{8}$$

Формула (7) називається розкладом детермінанта Δ за елементами його k-го рядка. Відповідно, формула (8) —

Тобто, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— деякий детермінант n-го порядку, де $n \in \mathbb{N}$, а A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у цьому детермінанті, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то для довільного $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ справджуються рівності

$$\Delta = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}, \tag{7}$$

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}. \tag{8}$$

Формула (7) називається розкладом детермінанта Δ за елементами його k-го рядка. Відповідно, формула (8) — розкладом детермінанта Δ

Тобто, якщо

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

— деякий детермінант n-го порядку, де $n \in \mathbb{N}$, а A_{ij} — алгебраїчне доповнення до елемента a_{ij} у цьому детермінанті, $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то для довільного $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджуються рівності

$$\Delta = a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \cdots + a_{kn}A_{kn}, \tag{7}$$

$$\Delta = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \cdots + a_{nk}A_{nk}. \tag{8}$$

Формула (7) називається розкладом детермінанта Δ за елементами його k-го рядка. Відповідно, формула (8) — розкладом детермінанта Δ за елементами його k-го стовпця.

Приклад 2.

Обчислити детермінант четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Приклад 2.

Обчислити детермінант четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо даний детермінант за третім стовпцем.

Приклад 2.

Обчислити детермінант четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо даний детермінант за третім стовпцем.

$$\Delta = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} & & \\ & * & \\ & & \end{vmatrix}$$

Приклад 2.

Обчислити детермінант четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо даний детермінант за третім стовпцем.

$$\Delta = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} & & \\ & * & \\ & & \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} +$$

Приклад 2.

Обчислити детермінант четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо даний детермінант за третім стовпцем.

$$\Delta = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} & * & \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+7 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} +$$

Приклад 2.

Обчислити детермінант четвертого порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & -3 & 7 & 5 \\ 3 & -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкладемо даний детермінант за третім стовпцем.

$$\Delta = 0 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} & * & \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+7 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} & * & \end{vmatrix}.$$

Приклад 2.

Обчислюючи вказані вище мінори третього порядку, отримаємо

Приклад 2.

Обчислюючи вказані вище мінори третього порядку, отримаємо

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 49,$$

Приклад 2.

Обчислюючи вказані вище мінори третього порядку, отримаємо

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 49, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10.$$

Обчислюючи вказані вище мінори третього порядку, отримаємо

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 49, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10.$$

Тому

$$\Delta =$$

Приклад 2.

Обчислюючи вказані вище мінори третього порядку, отримаємо

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 49, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10.$$

Тому

$$\Delta = 2 \cdot 49 + 7 \cdot 10$$

Приклад 2.

Обчислюючи вказані вище мінори третього порядку, отримаємо

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 49, \qquad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10.$$

Тому

$$\Delta = 2 \cdot 49 + 7 \cdot 10 = 168.$$

Приклад 3.

Користуючись теоремою Лапласа, обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Приклад 3.

Користуючись теоремою Лапласа, обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Зафіксуємо другий і п'ятий рядки детермінанта Δ.

Приклад 3.

Користуючись теоремою Лапласа, обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Зафіксуємо другий і п'ятий рядки детермінанта Δ. Розглянемо мінори

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix},$$

Приклад 3.

Користуючись теоремою Лапласа, обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Зафіксуємо другий і п'ятий рядки детермінанта Δ. Розглянемо мінори

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix},$$

Приклад 3.

Користуючись теоремою Лапласа, обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ \color{blue}{3} & \color{blue}{4} & \color{blue}{0} & \color{blue}{5} & \color{blue}{0} \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ \color{blue}{4} & \color{blue}{6} & \color{blue}{0} & \color{blue}{7} & \color{blue}{0} \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Зафіксуємо другий і п'ятий рядки детермінанта Δ. Розглянемо мінори

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix},$$

які розміщені в цих рядках.

Приклад 3.

Користуючись теоремою Лапласа, обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Зафіксуємо другий і п'ятий рядки детермінанта Δ. Розглянемо мінори

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix},$$

які розміщені в цих рядках. Всі інші мінори другого порядку в цих рядках дорівнюють нулю,

Приклад 3.

Користуючись теоремою Лапласа, обчислити детермінант

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 0 & 7 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Зафіксуємо другий і п'ятий рядки детермінанта Δ. Розглянемо мінори

$$M_1 = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}, \qquad M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}, \qquad M_3 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix},$$

які розміщені в цих рядках. Всі інші мінори другого порядку в цих рядках дорівнюють нулю, оскільки містять нульовий стовпець.

Приклад 3.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до мінорів M_1, M_2, M_3:

Приклад 3.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до мінорів M_1, M_2, M_3:

$$(-1)^{s_{M_1}} M_1' = (-1)^{2+5+1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 49,$$

Приклад 3.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до мінорів M_1, M_2, M_3:

$$(-1)^{s_{M_1}} M_1' = (-1)^{2+5+1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 49,$$

$$(-1)^{s_{M_2}} M_2' = (-1)^{2+5+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -100,$$

Приклад 3.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до мінорів M_1, M_2, M_3:

$$(-1)^{s_{M_1}} M_1' = (-1)^{2+5+1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 49,$$

$$(-1)^{s_{M_2}} M_2' = (-1)^{2+5+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -100,$$

$$(-1)^{s_{M_3}} M_3' = (-1)^{2+5+2+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Приклад 3.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до мінорів M_1, M_2, M_3:

$$(-1)^{s_{M_1}} M_1' = (-1)^{2+5+1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 49,$$

$$(-1)^{s_{M_2}} M_2' = (-1)^{2+5+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -100,$$

$$(-1)^{s_{M_3}} M_3' = (-1)^{2+5+2+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді

$$\Delta = M_1 \cdot (-1)^{s_{M_1}} M_1' + M_2 \cdot (-1)^{s_{M_2}} M_2' + M_3 \cdot (-1)^{s_{M_3}} M_3'$$

Приклад 3.

Обчислимо алгебраїчні доповнення до мінорів M_1, M_2, M_3:

$$(-1)^{s_{M_1}} M_1' = (-1)^{2+5+1+2} \begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 49,$$

$$(-1)^{s_{M_2}} M_2' = (-1)^{2+5+1+4} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -100,$$

$$(-1)^{s_{M_3}} M_3' = (-1)^{2+5+2+4} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

Тоді

$$\Delta = M_1 \cdot (-1)^{s_{M_1}} M_1' + M_2 \cdot (-1)^{s_{M_2}} M_2' + M_3 \cdot (-1)^{s_{M_3}} M_3' =$$

$$= 2 \cdot 49 + 1 \cdot (-100) + (-2) \cdot 1 = -4.$$