n-вимірний векторний простір. Лінійна залежність векторів

Лектор — доц. Шапочка Ігор

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

18 жовтня 2022 року

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор,

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$,

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами α_1, α_2, ..., α_n, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами α_1, α_2, ..., α_n, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і при цьому α_1

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ α_n, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і при цьому α_1 називатимемо його першою компонентою,

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і при цьому α_1 називатимемо його першою компонентою, α_2 — його другою компонентою

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами α_1, α_2, ..., α_n, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і при цьому α_1 називатимемо його першою компонентою, α_2 — його другою компонентою і т. д., α_n — n-ою компонентою цього вектора.

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і при цьому α_1 називатимемо його першою компонентою, α_2 — його другою компонентою і т. д., α_n — n-ою компонентою цього вектора.

Означення 2

Два дійсні n-вимірні вектори

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ α_n, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і при цьому α_1 називатимемо його першою компонентою, α_2 — його другою компонентою і т. д., α_n — n-ою компонентою цього вектора.

Означення 2

Два дійсні n-вимірні вектори називаються рівними,

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots,$ α_n, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ і при цьому α_1 називатимемо його першою компонентою, α_2 — його другою компонентою і т. д., α_n — n-ою компонентою цього вектора.

Означення 2

Два дійсні n-вимірні вектори називаються рівними, якщо рівні

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ α_n, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і при цьому α_1 називатимемо його першою компонентою, α_2 — його другою компонентою і т. д., α_n — n-ою компонентою цього вектора.

Означення 2

Два дійсні n-вимірні вектори називаються рівними, якщо рівні всі відповідні компоненти

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots,$ α_n, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і при цьому α_1 називатимемо його першою компонентою, α_2 — його другою компонентою і т. д., α_n — n-ою компонентою цього вектора.

Означення 2

Два дійсні n-вимірні вектори називаються рівними, якщо рівні всі відповідні компоненти цих векторів.

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і при цьому α_1 називатимемо його першою компонентою, α_2 — його другою компонентою і т. д., α_n — n-ою компонентою цього вектора.

Означення 2

Два дійсні n-вимірні вектори називаються рівними, якщо рівні всі відповідні компоненти цих векторів.

Рівність векторів позначають символом $=$,

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і при цьому α_1 називатимемо його першою компонентою, α_2 — його другою компонентою і т. д., α_n — n-ою компонентою цього вектора.

Означення 2

Два дійсні n-вимірні вектори називаються рівними, якщо рівні всі відповідні компоненти цих векторів.

Рівність векторів позначають символом $=$, тобто

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і при цьому α_1 називатимемо його першою компонентою, α_2 — його другою компонентою і т. д., α_n — n-ою компонентою цього вектора.

Означення 2

Два дійсні n-вимірні вектори називаються рівними, якщо рівні всі відповідні компоненти цих векторів.

Рівність векторів позначають символом $=$, тобто

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

якщо і тільки якщо

Означення 1

Дійсним n-вимірним вектором називається впорядкований набір n дійсних чисел.

Дійсний n-вимірний вектор, утворений дійсними числами α_1, α_2, ..., α_n, будемо позначати символом $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і при цьому α_1 називатимемо його першою компонентою, α_2 — його другою компонентою і т. д., α_n — n-ою компонентою цього вектора.

Означення 2

Два дійсні n-вимірні вектори називаються рівними, якщо рівні всі відповідні компоненти цих векторів.

Рівність векторів позначають символом $=$, тобто

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n),$$

якщо і тільки якщо

$$\alpha_1 = \beta_1, \quad \alpha_2 = \beta_2, \quad \ldots, \quad \alpha_n = \beta_n.$$

Позначимо через $\mathbb{R}^n$

Позначимо через $\mathbb{R}^n$ множину всіх дійсних n-вимірних векторів,

Позначимо через $\mathbb{R}^n$ множину всіх дійсних n-вимірних векторів, тобто

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Позначимо через $\mathbb{R}^n$ множину всіх дійсних n-вимірних векторів, тобто

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Зауваження 1

Надалі будемо використовувати терміни n-вимірний вектор

Позначимо через $\mathbb{R}^n$ множину всіх дійсних n-вимірних векторів, тобто

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Зауваження 1

Надалі будемо використовувати терміни n-вимірний вектор або просто вектор,

Позначимо через $\mathbb{R}^n$ множину всіх дійсних n-вимірних векторів, тобто

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Зауваження 1

Надалі будемо використовувати терміни n-вимірний вектор або просто вектор, якщо із контексту зрозуміло, що йде мова про дійсний n-вимірний вектор.

Позначимо через $\mathbb{R}^n$ множину всіх дійсних n-вимірних векторів, тобто

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Зауваження 1

Надалі будемо використовувати терміни n-вимірний вектор або просто вектор, якщо із контексту зрозуміло, що йде мова про дійсний n-вимірний вектор.

Означення 3

Сумою векторів

Позначимо через $\mathbb{R}^n$ множину всіх дійсних n-вимірних векторів, тобто

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Зауваження 1

Надалі будемо використовувати терміни n-вимірний вектор або просто вектор, якщо із контексту зрозуміло, що йде мова про дійсний n-вимірний вектор.

Означення 3

Сумою векторів $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$

Позначимо через $\mathbb{R}^n$ множину всіх дійсних n-вимірних векторів, тобто

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Зауваження 1

Надалі будемо використовувати терміни n-вимірний вектор або просто вектор, якщо із контексту зрозуміло, що йде мова про дійсний n-вимірний вектор.

Означення 3

Сумою векторів $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ і $b = (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n)$

Позначимо через $\mathbb{R}^n$ множину всіх дійсних n-вимірних векторів, тобто

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Зауваження 1

Надалі будемо використовувати терміни n-вимірний вектор або просто вектор, якщо із контексту зрозуміло, що йде мова про дійсний n-вимірний вектор.

Означення 3

Сумою векторів $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ і $b = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ із $\mathbb{R}^n$

Позначимо через $\mathbb{R}^n$ множину всіх дійсних n-вимірних векторів, тобто

$$\mathbb{R}^n = \Big\{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}\Big\}.$$

Зауваження 1

Надалі будемо використовувати терміни n-вимірний вектор або просто вектор, якщо із контексту зрозуміло, що йде мова про дійсний n-вимірний вектор.

Означення 3

Сумою векторів $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ і $b = (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n)$ із $\mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$(\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n + \beta_n). \tag{1}$$

Позначимо через $\mathbb{R}^n$ множину всіх дійсних n-вимірних векторів, тобто

$$\mathbb{R}^n = \Big\{ (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Зауваження 1

Надалі будемо використовувати терміни n-вимірний вектор або просто вектор, якщо із контексту зрозуміло, що йде мова про дійсний n-вимірний вектор.

Означення 3

Сумою векторів $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ і $b = (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n)$ із $\mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$a + b = (\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n + \beta_n). \tag{1}$$

Означення 4

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$

Означення 4

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ на вектор $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

Означення 4

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ на вектор $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$(\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \ldots, \gamma\alpha_n). \tag{2}$$

Означення 4

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ **на вектор** $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1,\ \gamma\alpha_2,\ \ldots,\ \gamma\alpha_n). \tag{2}$$

Означення 4

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ на вектор $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1,\ \gamma\alpha_2,\ \ldots,\ \gamma\alpha_n). \tag{2}$$

Теорема 1

Для довільних чисел $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$

Означення 4

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ **на вектор** $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1,\ \gamma\alpha_2,\ \ldots,\ \gamma\alpha_n). \tag{2}$$

Теорема 1

Для довільних чисел $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$ *та довільних* n*-вимірних векторів* $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^n$

Означення 4

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ **на вектор** $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \ldots, \gamma\alpha_n). \tag{2}$$

Теорема 1

Для довільних чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ та довільних n-вимірних векторів a, b, $c \in \mathbb{R}^n$ справджуються наступні рівності:

Означення 4

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ на вектор $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \ldots, \gamma\alpha_n). \tag{2}$$

Теорема 1

Для довільних чисел α, $\beta \in \mathbb{R}$ та довільних n-вимірних векторів a, b, $c \in \mathbb{R}^n$ справджуються наступні рівності:

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$;

Означення 4

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ **на вектор** $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \dots, \gamma\alpha_n). \tag{2}$$

Теорема 1

Для довільних чисел α, $\beta \in \mathbb{R}$ та довільних n-вимірних векторів a, b, $c \in \mathbb{R}^n$ справджуються наступні рівності:

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2) $a + b = b + a$;

Означення 4

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ на вектор $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1,\ \gamma\alpha_2,\ \ldots,\ \gamma\alpha_n). \tag{2}$$

Теорема 1

Для довільних чисел α, $\beta \in \mathbb{R}$ та довільних n-вимірних векторів a, b, $c \in \mathbb{R}^n$ справджуються наступні рівності:

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2) $a + b = b + a$;
3) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;

Означення 4

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ на вектор $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1,\ \gamma\alpha_2,\ \ldots,\ \gamma\alpha_n). \tag{2}$$

Теорема 1

Для довільних чисел α, $\beta \in \mathbb{R}$ та довільних n-вимірних векторів a, b, $c \in \mathbb{R}^n$ справджуються наступні рівності:

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2) $a + b = b + a$;
3) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
4) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;

Означення 4

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ на вектор $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \ldots, \gamma\alpha_n). \quad (2)$$

Теорема 1

Для довільних чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ та довільних n-вимірних векторів a, b, $c \in \mathbb{R}^n$ справджуються наступні рівності:

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2) $a + b = b + a$;
3) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
4) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;
5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;

Означення 4

Добутком числа $\gamma \in \mathbb{R}$ на вектор $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ називається дійсний n-вимірний вектор

$$\gamma a = (\gamma\alpha_1, \gamma\alpha_2, \ldots, \gamma\alpha_n). \tag{2}$$

Теорема 1

Для довільних чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ та довільних n-вимірних векторів a, b, $c \in \mathbb{R}^n$ справджуються наступні рівності:

1) $(a + b) + c = a + (b + c)$;
2) $a + b = b + a$;
3) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$;
4) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$;
5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$;
6) $1 \cdot a = a$.

Оскільки дійсний n-вимірний вектор

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

можна трактувати,

Оскільки дійсний n-вимірний вектор

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

можна трактувати, як $1 \times n$-матрицю

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами,

Оскільки дійсний n-вимірний вектор

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

можна трактувати, як $1 \times n$-матрицю

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами, а операції додавання векторів

Оскільки дійсний n-вимірний вектор

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

можна трактувати, як $1 \times n$-матрицю

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами, а операції додавання векторів та множення числа на вектор

Оскільки дійсний n-вимірний вектор

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

можна трактувати, як $1 \times n$-матрицю

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами, а операції додавання векторів та множення числа на вектор визначаються аналогічно подібним операція над матрицями,

Оскільки дійсний n-вимірний вектор

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

можна трактувати, як $1 \times n$-матрицю

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \ldots & \alpha_n \end{pmatrix}$$

з дійсними елементами, а операції додавання векторів та множення числа на вектор визначаються аналогічно подібним операція над матрицями, то і доведення вище згаданих властивостей подібне до доведень аналогічних властивостей операцій над матрицями.

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором,

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$.

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається **нульовим вектором**, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. *Причому,* $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. *Причому,* $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. *Причому,* $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим,

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. *Причому,* $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. Причому, $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a$$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. Причому, $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \ldots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається **нульовим вектором**, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. *Причому,* $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \dots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1,$$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. *Причому,* $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \ldots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1, 0 + \alpha_2,$$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. *Причому,* $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \ldots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1, 0 + \alpha_2, \ \ldots, 0 + \alpha_n)$$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. Причому, $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \ldots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1, 0 + \alpha_2, \ \ldots, 0 + \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$*. Причому,* $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \ldots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1, 0 + \alpha_2, \ \ldots, 0 + \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = a.$$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. Причому, $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \dots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1, 0 + \alpha_2, \dots, 0 + \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = a.$$

Вектор $\bar{0}$ є єдиним нульовим вектором.

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. Причому, $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \ldots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1, 0 + \alpha_2, \ \ldots, 0 + \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = a.$$

Вектор $\bar{0}$ є єдиним нульовим вектором. У протилежному випадку,

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається **нульовим вектором**, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. Причому, $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \ldots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1, 0 + \alpha_2, \ \ldots, 0 + \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = a.$$

Вектор $\bar{0}$ є єдиним нульовим вектором. У протилежному випадку, якщо $\bar{0}'$ — деякий інший нульовий вектор,

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. Причому, $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \ldots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1, 0 + \alpha_2, \ \ldots, 0 + \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = a.$$

Вектор $\bar{0}$ є єдиним нульовим вектором. У протилежному випадку, якщо $\bar{0}'$ — деякий інший нульовий вектор, то з одного боку $\bar{0} + \bar{0}'$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. *Причому,* $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \ldots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1, 0 + \alpha_2, \ldots, 0 + \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = a.$$

Вектор $\bar{0}$ є єдиним нульовим вектором. У протилежному випадку, якщо $\bar{0}'$ — деякий інший нульовий вектор, то з одного боку $\bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}'$, а з іншого $\bar{0} + \bar{0}'$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. *Причому,* $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \dots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1, 0 + \alpha_2, \dots, 0 + \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = a.$$

Вектор $\bar{0}$ є єдиним нульовим вектором. У протилежному випадку, якщо $\bar{0}'$ — деякий інший нульовий вектор, то з одного боку $\bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}'$, а з іншого $\bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}' + \bar{0}$

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається **нульовим вектором**, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. *Причому,* $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \ldots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1, 0 + \alpha_2, \ldots, 0 + \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = a.$$

Вектор $\bar{0}$ є єдиним нульовим вектором. У протилежному випадку, якщо $\bar{0}'$ — деякий інший нульовий вектор, то з одного боку $\bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}'$, а з іншого $\bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}' + \bar{0} = \bar{0}$.

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається **нульовим вектором**, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. *Причому,* $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \ldots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1, 0 + \alpha_2, \ \ldots, 0 + \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = a.$$

Вектор $\bar{0}$ є єдиним нульовим вектором. У протилежному випадку, якщо $\bar{0}'$ — деякий інший нульовий вектор, то з одного боку $\bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}'$, а з іншого $\bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}' + \bar{0} = \bar{0}$. Тому $\bar{0}' = \bar{0}$.

Означення 5

Вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$ називається нульовим вектором, якщо для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ справджується рівність $\bar{0} + a = a$.

Теорема 2

Існує єдиний нульовий вектор $\bar{0} \in \mathbb{R}^n$. Причому, $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$.

Доведення.

Дійсно, вектор $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ є нульовим, бо для довільного вектора $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$

$$\bar{0} + a = (0, 0, \ldots, 0) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (0 + \alpha_1, 0 + \alpha_2, \ldots, 0 + \alpha_n) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = a.$$

Вектор $\bar{0}$ є єдиним нульовим вектором. У протилежному випадку, якщо $\bar{0}'$ — деякий інший нульовий вектор, то з одного боку $\bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}'$, а з іншого $\bar{0} + \bar{0}' = \bar{0}' + \bar{0} = \bar{0}$. Тому $\bar{0}' = \bar{0}$. Одержана суперечність завершує доведення теореми. $\square$

Означення 6

Вектор $-a$

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a,

Означення 6

Вектор $-a$ називається **протилежним** до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$.

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$,

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Доведення.

Нехай $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$.

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Доведення.

Нехай $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$. Розглянемо вектор $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$. Він є протилежним до a, бо

$$(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Доведення.

Нехай $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$. Розглянемо вектор $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$. Він є протилежним до a, бо

$$(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (-\alpha_1 + \alpha_1, -\alpha_2 + \alpha_2, \ldots, -\alpha_n + \alpha_n)$$

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Доведення.

Нехай $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$. Розглянемо вектор $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$. Він є протилежним до a, бо

$$(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (-\alpha_1 + \alpha_1, -\alpha_2 + \alpha_2, \ldots, -\alpha_n + \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \bar{0}.$$

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Доведення.

Нехай $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$. Розглянемо вектор $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$. Він є протилежним до a, бо

$$(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (-\alpha_1 + \alpha_1, -\alpha_2 + \alpha_2, \ldots, -\alpha_n + \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \bar{0}.$$

Якщо b також є деяким протилежним вектором до a,

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Доведення.

Нехай $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$. Розглянемо вектор $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$. Він є протилежним до a, бо

$$(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (-\alpha_1 + \alpha_1, -\alpha_2 + \alpha_2, \ldots, -\alpha_n + \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \bar{0}.$$

Якщо b також є деяким протилежним вектором до a, то $b + a = \bar{0}$.

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Доведення.

Нехай $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$. Розглянемо вектор $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$. Він є протилежним до a, бо

$$(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (-\alpha_1 + \alpha_1, -\alpha_2 + \alpha_2, \ldots, -\alpha_n + \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \bar{0}.$$

Якщо b також є деяким протилежним вектором до a, то $b + a = \bar{0}$. Тоді

$$b =$$

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a+a=\bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a\in\mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, то $-a=(-\alpha_1,-\alpha_2,\ldots,-\alpha_n)$.

Доведення.

Нехай $a=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$. Розглянемо вектор $(-\alpha_1,-\alpha_2,\ldots,-\alpha_n)$. Він є протилежним до a, бо

$$(-\alpha_1,-\alpha_2,\ldots,-\alpha_n)+(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)=$$
$$=(-\alpha_1+\alpha_1,-\alpha_2+\alpha_2,\ldots,-\alpha_n+\alpha_n)=(0,0,\ldots,0)=\bar{0}.$$

Якщо b також є деяким протилежним вектором до a, то $b+a=\bar{0}$. Тоді

$$b=b+\bar{0}$$

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Доведення.

Нехай $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$. Розглянемо вектор $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$. Він є протилежним до a, бо

$$(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (-\alpha_1 + \alpha_1, -\alpha_2 + \alpha_2, \ldots, -\alpha_n + \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \bar{0}.$$

Якщо b також є деяким протилежним вектором до a, то $b + a = \bar{0}$. Тоді

$$b = b + \bar{0} = b + (-a + a)$$

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Доведення.

Нехай $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$. Розглянемо вектор $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$. Він є протилежним до a, бо

$$(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (-\alpha_1 + \alpha_1, -\alpha_2 + \alpha_2, \ldots, -\alpha_n + \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \bar{0}.$$

Якщо b також є деяким протилежним вектором до a, то $b + a = \bar{0}$. Тоді

$$b = b + \bar{0} = b + (-a + a) =$$
$$= b + (a + -a)$$

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Доведення.

Нехай $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$. Розглянемо вектор $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$. Він є протилежним до a, бо

$$(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (-\alpha_1 + \alpha_1, -\alpha_2 + \alpha_2, \ldots, -\alpha_n + \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \bar{0}.$$

Якщо b також є деяким протилежним вектором до a, то $b + a = \bar{0}$. Тоді

$$b = b + \bar{0} = b + (-a + a) =$$
$$= b + (a + -a) = (b + a) + -a$$

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Доведення.

Нехай $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$. Розглянемо вектор $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$. Він є протилежним до a, бо

$$(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (-\alpha_1 + \alpha_1, -\alpha_2 + \alpha_2, \ldots, -\alpha_n + \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \bar{0}.$$

Якщо b також є деяким протилежним вектором до a, то $b + a = \bar{0}$. Тоді

$$b = b + \bar{0} = b + (-a + a) =$$
$$= b + (a + -a) = (b + a) + -a = \bar{0} + -a$$

Означення 6

Вектор $-a$ називається протилежним до вектора a, якщо $-a + a = \bar{0}$.

Теорема 3

Для довільного вектора $a \in \mathbb{R}^n$ існує єдиний протилежний вектор $-a$. Причому, якщо $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, то $-a = (-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$.

Доведення.

Нехай $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$. Розглянемо вектор $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n)$. Він є протилежним до a, бо

$$(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n) + (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) =$$
$$= (-\alpha_1 + \alpha_1, -\alpha_2 + \alpha_2, \ldots, -\alpha_n + \alpha_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \bar{0}.$$

Якщо b також є деяким протилежним вектором до a, то $b + a = \bar{0}$. Тоді

$$b = b + \bar{0} = b + (-a + a) =$$
$$= b + (a + -a) = (b + a) + -a = \bar{0} + -a = -a.$$

$\square$

Теорема 4

Нехай α *— деяке дійсне число,*

Теорема 4

Нехай α *— деяке дійсне число,* a *— деякий* n*-вимірний вектор.*

Теорема 4

Нехай α *— деяке дійсне число,* a *— деякий* n*-вимірний вектор. Рівність*

$$\alpha a = \bar{0}$$

Теорема 4

Нехай α *— деяке дійсне число,* a *— деякий* n*-вимірний вектор. Рівність*

$$\alpha a = \bar{0}$$

справджується тоді і тільки тоді,

Теорема 4

Нехай α *— деяке дійсне число,* a *— деякий* n*-вимірний вектор. Рівність*

$$\alpha a = \bar{0}$$

справджується тоді і тільки тоді, коли або $\alpha = 0$,

Теорема 4

Нехай α *— деяке дійсне число,* a *— деякий* n*-вимірний вектор. Рівність*

$$\alpha a = \bar{0}$$

справджується тоді і тільки тоді, коли або $\alpha = 0$*, або* $a = \bar{0}$.

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним.

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число,

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a$$

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$$

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n)$$

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$

$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$

$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$

$$\alpha \cdot \bar{0} =$$

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$

$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0)$$

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$

$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$

$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0)$$

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$

$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$

$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$

$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$
$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність.

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$

$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$

$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$

$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$

$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$

$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$

$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$

$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$

$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$

$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a рівність

$$\alpha a = \bar{0} \qquad (3)$$

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$
$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a рівність

$$\alpha a = \bar{0} \tag{3}$$

є правильна.

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$
$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a рівність

$$\alpha a = \bar{0} \tag{3}$$

є правильна. Якщо $\alpha \neq 0$,

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$
$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a рівність

$$\alpha a = \bar{0} \tag{3}$$

є правильна. Якщо $\alpha \neq 0$, то існує обернене число α^{-1} до числа α.

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots,0 \cdot \alpha_n) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$
$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a рівність

$$\alpha a = \bar{0} \qquad (3)$$

є правильна. Якщо $\alpha \neq 0$, то існує обернене число α^{-1} до числа α. Помножимо ліву і праві частини рівності (3) на α^{-1}.

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$
$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a рівність

$$\alpha a = \bar{0} \tag{3}$$

є правильна. Якщо $\alpha \neq 0$, то існує обернене число α^{-1} до числа α. Помножимо ліву і праві частини рівності (3) на α^{-1}. Одержимо $\alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1} \cdot \bar{0}$.

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$

$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$

$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$

$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a рівність

$$\alpha a = \bar{0} \tag{3}$$

є правильна. Якщо $\alpha \neq 0$, то існує обернене число α^{-1} до числа α. Помножимо ліву і праві частини рівності (3) на α^{-1}. Одержимо $\alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1} \cdot \bar{0}$. Оскільки із теореми 1 слідує, що $\alpha^{-1}(\alpha a)$

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$
$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a рівність

$$\alpha a = \bar{0} \tag{3}$$

є правильна. Якщо $\alpha \neq 0$, то існує обернене число α^{-1} до числа α. Помножимо ліву і праві частини рівності (3) на α^{-1}. Одержимо $\alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1} \cdot \bar{0}$. Оскільки із теореми 1 слідує, що $\alpha^{-1}(\alpha a) = (\alpha^{-1}\alpha)a$

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$
$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a рівність

$$\alpha a = \bar{0} \tag{3}$$

є правильна. Якщо $\alpha \neq 0$, то існує обернене число α^{-1} до числа α. Помножимо ліву і праві частини рівності (3) на α^{-1}. Одержимо $\alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1} \cdot \bar{0}$. Оскільки із теореми 1 слідує, що $\alpha^{-1}(\alpha a) = (\alpha^{-1}\alpha)a = 1 \cdot a$

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$
$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a рівність

$$\alpha a = \bar{0} \tag{3}$$

є правильна. Якщо $\alpha \neq 0$, то існує обернене число α^{-1} до числа α. Помножимо ліву і праві частини рівності (3) на α^{-1}. Одержимо $\alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1} \cdot \bar{0}$. Оскільки із теореми 1 слідує, що $\alpha^{-1}(\alpha a) = (\alpha^{-1}\alpha)a = 1 \cdot a = a$,

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$
$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a рівність

$$\alpha a = \bar{0} \tag{3}$$

є правильна. Якщо $\alpha \neq 0$, то існує обернене число α^{-1} до числа α. Помножимо ліву і праві частини рівності (3) на α^{-1}. Одержимо $\alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1} \cdot \bar{0}$. Оскільки із теореми 1 слідує, що $\alpha^{-1}(\alpha a) = (\alpha^{-1}\alpha)a = 1 \cdot a = a$, а $\alpha^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{0}$,

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$
$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a рівність

$$\alpha a = \bar{0} \tag{3}$$

є правильна. Якщо $\alpha \neq 0$, то існує обернене число α^{-1} до числа α. Помножимо ліву і праві частини рівності (3) на α^{-1}. Одержимо $\alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1} \cdot \bar{0}$. Оскільки із теореми 1 слідує, що $\alpha^{-1}(\alpha a) = (\alpha^{-1}\alpha)a = 1 \cdot a = a$, а $\alpha^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{0}$, то $a = \bar{0}$.

Доведення.

Твердження достатності теореми є очевидним. Дійсно, нехай α — будь-яке дійсне число, а $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n)$ — будь-який вектор із $\mathbb{R}^n$. За означенням добутку числа на n-вимірний вектор

$$0 \cdot a = 0 \cdot (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots, \alpha_n) = (0 \cdot \alpha_1,\ 0 \cdot \alpha_2,\ \ldots, 0 \cdot \alpha_n) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0},$$
$$\alpha \cdot \bar{0} = \alpha \cdot (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = (\alpha \cdot 0,\ \alpha \cdot 0,\ \ldots,\ \alpha \cdot 0) =$$
$$= (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) = \bar{0}.$$

Доведемо тепер необхідність. Нехай для деякого числа α і деякого n-вимірного вектора a рівність

$$\alpha a = \bar{0} \tag{3}$$

є правильна. Якщо $\alpha \neq 0$, то існує обернене число α^{-1} до числа α. Помножимо ліву і праві частини рівності (3) на α^{-1}. Одержимо $\alpha^{-1}(\alpha a) = \alpha^{-1} \cdot \bar{0}$. Оскільки із теореми 1 слідує, що $\alpha^{-1}(\alpha a) = (\alpha^{-1}\alpha)a = 1 \cdot a = a$, а $\alpha^{-1} \cdot \bar{0} = \bar{0}$, то $a = \bar{0}$. Таким чином, або $\alpha = 0$, або $a = \bar{0}$. □

Означення 7

Множина $\mathbb{R}^n$

Означення 7

Множина $\mathbb{R}^n$ всіх дійсних n-вимірних векторів,

Означення 7

Множина $\mathbb{R}^n$ всіх дійсних n-вимірних векторів, розглядувана із введеними на ній операціями

Означення 7

Множина $\mathbb{R}^n$ всіх дійсних n-вимірних векторів, розглядувана із введеними на ній операціями додавання векторів

Означення 7

Множина $\mathbb{R}^n$ всіх дійсних n-вимірних векторів, розглядувана із введеними на ній операціями додавання векторів та множення числа на вектор

Означення 7

Множина $\mathbb{R}^n$ всіх дійсних n-вимірних векторів, розглядувана із введеними на ній операціями додавання векторів та множення числа на вектор за формулами (1), (2)

Означення 7

Множина $\mathbb{R}^n$ всіх дійсних n-вимірних векторів, розглядувана із введеними на ній операціями додавання векторів та множення числа на вектор за формулами (1), (2) називається дійсним n-вимірним векторним простором.

Означення 7

Множина $\mathbb{R}^n$ всіх дійсних n-вимірних векторів, розглядувана із введеними на ній операціями додавання векторів та множення числа на вектор за формулами (1), (2) називається дійсним n-вимірним векторним простором.

Аналогічно визначається раціональний n-вимірний векторний простір $\mathbb{Q}^n$

Означення 7

Множина $\mathbb{R}^n$ всіх дійсних n-вимірних векторів, розглядувана із введеними на ній операціями додавання векторів та множення числа на вектор за формулами (1), (2) називається дійсним n-вимірним векторним простором.

Аналогічно визначається раціональний n-вимірний векторний простір $\mathbb{Q}^n$ та комплексний n-вимірний векторний простір $\mathbb{C}^n$.

Означення 8

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$

Означення 8

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається пропорційним вектору $a \in \mathbb{R}^n$,

Означення 8

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається **пропорційним** вектору $a \in \mathbb{R}^n$, якщо існує таке дійсне число γ,

Означення 8

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається **пропорційним** вектору $a \in \mathbb{R}^n$, якщо існує таке дійсне число γ, що $b = \gamma a$.

Означення 8

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається пропорційним вектору $a \in \mathbb{R}^n$, якщо існує таке дійсне число γ, що $b = \gamma a$.

Наприклад, вектор $(3,\ 2,\ -1)$ із $\mathbb{R}^3$

Означення 8

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається пропорційним вектору $a \in \mathbb{R}^n$, якщо існує таке дійсне число γ, що $b = \gamma a$.

Наприклад, вектор $(3,\ 2,\ -1)$ із $\mathbb{R}^3$ є пропорційним вектору $(6, 4, -2)$,

Означення 8

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається пропорційним вектору $a \in \mathbb{R}^n$, якщо існує таке дійсне число γ, що $b = \gamma a$.

Наприклад, вектор $(3,\ 2,\ -1)$ із $\mathbb{R}^3$ є пропорційним вектору $(6, 4, -2)$, бо

$$(3,\ 2,\ -1) = \frac{1}{2} \cdot (6,\ 4,\ -2).$$

Означення 8

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається **пропорційним** вектору $a \in \mathbb{R}^n$, якщо існує таке дійсне число γ, що $b = \gamma a$.

Наприклад, вектор $(3,\ 2,\ -1)$ із $\mathbb{R}^3$ є пропорційним вектору $(6, 4, -2)$, бо

$$(3,\ 2,\ -1) = \frac{1}{2} \cdot (6,\ 4,\ -2).$$

У свою чергу, вектор $(6,\ 4,\ -2)$

Означення 8

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається **пропорційним** вектору $a \in \mathbb{R}^n$, якщо існує таке дійсне число γ, що $b = \gamma a$.

Наприклад, вектор $(3,\ 2,\ -1)$ із $\mathbb{R}^3$ є пропорційним вектору $(6, 4, -2)$, бо

$$(3,\ 2,\ -1) = \frac{1}{2} \cdot (6,\ 4,\ -2).$$

У свою чергу, вектор $(6,\ 4,\ -2)$ — пропорційний вектору $(3,\ 2,\ -1)$,

Означення 8

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається **пропорційним** вектору $a \in \mathbb{R}^n$, якщо існує таке дійсне число γ, що $b = \gamma a$.

Наприклад, вектор $(3,\ 2,\ -1)$ із $\mathbb{R}^3$ є пропорційним вектору $(6, 4, -2)$, бо

$$(3,\ 2,\ -1) = \frac{1}{2} \cdot (6,\ 4,\ -2).$$

У свою чергу, вектор $(6,\ 4,\ -2)$ — пропорційний вектору $(3,\ 2,\ -1)$, бо

$$(6,\ 4,\ -2) = 2 \cdot (3,\ 2,\ -1).$$

Означення 9

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$

Означення 9

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається **лінійною комбінацією системи векторів** a_1, $a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$,

Означення 9

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, ..., $a_s \in \mathbb{R}^n$, якщо існують такі дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s,

Означення 9

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається лінійною комбінацією системи векторів a_1, $a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, що

$$b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s.$$

Означення 9

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається лінійною комбінацією системи векторів a_1, $a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, що

$$b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s.$$

Числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$

Означення 9

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, ..., $a_s \in \mathbb{R}^n$, якщо існують такі дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, що

$$b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s.$$

Числа γ_1, γ_2, ..., γ_s при цьому називають коефіцієнтами лінійної комбінації.

Означення 9

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається лінійною комбінацією системи векторів a_1, $a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, що

$$b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s.$$

Числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ при цьому називають коефіцієнтами лінійної комбінації.

Наприклад, вектор $(1,\ -2,\ 3,\ -4)$ із $\mathbb{R}^4$

Означення 9

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, ..., $a_s \in \mathbb{R}^n$, якщо існують такі дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, що

$$b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s.$$

Числа $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ при цьому називають коефіцієнтами лінійної комбінації.

Наприклад, вектор $(1,\ -2,\ 3,\ -4)$ із $\mathbb{R}^4$ є лінійною комбінацією векторів $(1,\ 0,\ 3, 0)$, $(0,\ 1,\ 0, 2)$,

Означення 9

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається лінійною комбінацією системи векторів a_1, $a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, що

$$b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s.$$

Числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ при цьому називають коефіцієнтами лінійної комбінації.

Наприклад, вектор $(1, \ -2, \ 3, \ -4)$ із $\mathbb{R}^4$ є лінійною комбінацією векторів $(1, \ 0, \ 3, 0)$, $(0, \ 1, \ 0, 2)$, бо

$$(1, \ -2, \ 3, \ -4) = 1 \cdot (1, \ 0, \ 3, 0) + (-2) \cdot (0, \ 1, \ 0, 2).$$

Означення 9

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, ..., $a_s \in \mathbb{R}^n$, якщо існують такі дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, що

$$b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s.$$

Числа γ_1, γ_2, ..., γ_s при цьому називають коефіцієнтами лінійної комбінації.

Наприклад, вектор $(1,\ -2,\ 3,\ -4)$ із $\mathbb{R}^4$ є лінійною комбінацією векторів $(1,\ 0,\ 3, 0)$, $(0,\ 1,\ 0, 2)$, бо

$$(1,\ -2,\ 3,\ -4) = 1 \cdot (1,\ 0,\ 3, 0) + (-2) \cdot (0,\ 1,\ 0, 2).$$

Нульовий вектор $(0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0)$ із $\mathbb{R}^4$ також є лінійною комбінацією векторів $(1,\ 0,\ 3, 0)$, $(0,\ 1,\ 0, 2)$,

Означення 9

Вектор $b \in \mathbb{R}^n$ називається лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, ..., $a_s \in \mathbb{R}^n$, якщо існують такі дійсні числа γ_1, γ_2, ..., γ_s, що

$$b = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s.$$

Числа γ_1, γ_2, ..., γ_s при цьому називають коефіцієнтами лінійної комбінації.

Наприклад, вектор $(1,\ -2,\ 3,\ -4)$ із $\mathbb{R}^4$ є лінійною комбінацією векторів $(1,\ 0,\ 3, 0)$, $(0,\ 1,\ 0, 2)$, бо

$$(1,\ -2,\ 3,\ -4) = 1 \cdot (1,\ 0,\ 3, 0) + (-2) \cdot (0,\ 1,\ 0, 2).$$

Нульовий вектор $(0,\ 0,\ 0,\ 0)$ із $\mathbb{R}^4$ також є лінійною комбінацією векторів $(1,\ 0,\ 3, 0)$, $(0,\ 1,\ 0, 2)$, бо

$$(0,\ 0,\ 0,\ 0) = 0 \cdot (1,\ 0,\ 3, 0) + 0 \cdot (0,\ 1,\ 0, 2).$$

Означення 10

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$

Означення 10

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною,

Означення 10

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$,

Означення 10

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, не всі рівні нулю,

Означення 10

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}. \tag{4}$$

Означення 10

Система векторів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_s$, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}. \tag{4}$$

Система векторів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s \in \mathbb{R}^n$

Означення 10

Система векторів $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1,\ \ldots,\ \gamma_s$, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}. \tag{4}$$

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно незалежною,

Означення 10

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}. \tag{4}$$

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно незалежною, якщо вона не є лінійно залежною.

Означення 10

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}. \tag{4}$$

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно незалежною, якщо вона не є лінійно залежною.

Система дійсних тривимірних векторів $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(2, 3, 5)$ є лінійно залежною,

Означення 10

Система векторів a_1, a_2, ..., $a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа γ_1, ..., γ_s, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}. \tag{4}$$

Система векторів a_1, a_2, ..., $a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно незалежною, якщо вона не є лінійно залежною.

Система дійсних тривимірних векторів $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(2, 3, 5)$ є лінійно залежною, бо

$$2 \cdot (1, 0, 1) + 3 \cdot (0, 1, 1) + (-1) \cdot (2, 3, 5) = (0, 0, 0).$$

Означення 10

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}. \tag{4}$$

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно незалежною, якщо вона не є лінійно залежною.

Система дійсних тривимірних векторів $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(2, 3, 5)$ є лінійно залежною, бо

$$2 \cdot (1, 0, 1) + 3 \cdot (0, 1, 1) + (-1) \cdot (2, 3, 5) = (0, 0, 0).$$

А от система дійсних тривимірних векторів $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ є лінійно незалежною,

Означення 10

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}. \tag{4}$$

Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно незалежною, якщо вона не є лінійно залежною.

Система дійсних тривимірних векторів $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(2,3,5)$ є лінійно залежною, бо

$$2 \cdot (1,0,1) + 3 \cdot (0,1,1) + (-1) \cdot (2,3,5) = (0,0,0).$$

А от система дійсних тривимірних векторів $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ є лінійно незалежною, бо для трійки дійсних чисел γ_1, γ_2, γ_3 лінійна комбінація

$$\gamma_1 \cdot (1,0,0) + \gamma_2 \cdot (0,1,0) + \gamma_3 \cdot (0,0,1)$$

Означення 10

Система векторів a_1, a_2, ..., $a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа γ_1, ..., γ_s, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}. \tag{4}$$

Система векторів a_1, a_2, ..., $a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно незалежною, якщо вона не є лінійно залежною.

Система дійсних тривимірних векторів $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(2, 3, 5)$ є лінійно залежною, бо

$$2 \cdot (1, 0, 1) + 3 \cdot (0, 1, 1) + (-1) \cdot (2, 3, 5) = (0, 0, 0).$$

А от система дійсних тривимірних векторів $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ є лінійно незалежною, бо для трійки дійсних чисел γ_1, γ_2, γ_3 лінійна комбінація

$$\gamma_1 \cdot (1, 0, 0) + \gamma_2 \cdot (0, 1, 0) + \gamma_3 \cdot (0, 0, 1) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

Означення 10

Система векторів a_1, a_2, ..., $a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа γ_1, ..., γ_s, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}. \tag{4}$$

Система векторів a_1, a_2, ..., $a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно незалежною, якщо вона не є лінійно залежною.

Система дійсних тривимірних векторів $(1, 0, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(2, 3, 5)$ є лінійно залежною, бо

$$2 \cdot (1, 0, 1) + 3 \cdot (0, 1, 1) + (-1) \cdot (2, 3, 5) = (0, 0, 0).$$

А от система дійсних тривимірних векторів $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ є лінійно незалежною, бо для трійки дійсних чисел γ_1, γ_2, γ_3 лінійна комбінація

$$\gamma_1 \cdot (1, 0, 0) + \gamma_2 \cdot (0, 1, 0) + \gamma_3 \cdot (0, 0, 1) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

дорівнює нульовому вектору $(0, 0, 0)$,

Означення 10

Система векторів a_1, a_2, ..., $a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно залежною, якщо існують такі дійсні числа γ_1, ..., γ_s, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}. \tag{4}$$

Система векторів a_1, a_2, ..., $a_s \in \mathbb{R}^n$ називається лінійно незалежною, якщо вона не є лінійно залежною.

Система дійсних тривимірних векторів $(1,0,1)$, $(0,1,1)$, $(2,3,5)$ є лінійно залежною, бо

$$2 \cdot (1,0,1) + 3 \cdot (0,1,1) + (-1) \cdot (2,3,5) = (0,0,0).$$

А от система дійсних тривимірних векторів $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$ є лінійно незалежною, бо для трійки дійсних чисел γ_1, γ_2, γ_3 лінійна комбінація

$$\gamma_1 \cdot (1,0,0) + \gamma_2 \cdot (0,1,0) + \gamma_3 \cdot (0,0,1) = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

дорівнює нульовому вектору $(0,0,0)$, лише у випадку, коли

$$\gamma_1 = 0, \qquad \gamma_2 = 0, \qquad \gamma_3 = 0.$$

Теорема 5

Система n-вимірних векторів є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли хоча б один із векторів цієї системи є лінійною комбінацією інших векторів системи.

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система $a_1, a_2, \ldots, a_s$ векторів із $\mathbb{R}^n$ є лінійно залежною.

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система a_1, a_2, $\ldots$, a_s векторів із $\mathbb{R}^n$ є лінійно залежною. Тоді існує система дійсних чисел γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_s, хоча б одне з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю,

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система a_1, a_2, ..., a_s векторів із $\mathbb{R}^n$ є лінійно залежною. Тоді існує система дійсних чисел γ_1, γ_2, ..., γ_s, хоча б одне з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_j a_j + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система a_1, a_2, ..., a_s векторів із $\mathbb{R}^n$ є лінійно залежною. Тоді існує система дійсних чисел γ_1, γ_2, ..., γ_s, хоча б одне з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_j a_j + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Тоді, очевидно,

$$-\gamma_j a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s. \tag{5}$$

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система a_1, a_2, $\dots$, a_s векторів із $\mathbb{R}^n$ є лінійно залежною. Тоді існує система дійсних чисел γ_1, γ_2, $\dots$, γ_s, хоча б одне з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_j a_j + \dots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Тоді, очевидно,

$$-\gamma_j a_j = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \dots + \gamma_s a_s. \qquad (5)$$

Оскільки $\gamma_j \neq 0$,

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система a_1, a_2, $\ldots$, a_s векторів із $\mathbb{R}^n$ є лінійно залежною. Тоді існує система дійсних чисел γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_s, хоча б одне з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_j a_j + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Тоді, очевидно,

$$-\gamma_j a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s. \qquad (5)$$

Оскільки $\gamma_j \neq 0$, то можна помножити ліву і праву частини рівності (5) на $-\frac{1}{\gamma_j}$.

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система a_1, a_2, ..., a_s векторів із $\mathbb{R}^n$ є лінійно залежною. Тоді існує система дійсних чисел γ_1, γ_2, ..., γ_s, хоча б одне з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_j a_j + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Тоді, очевидно,

$$-\gamma_j a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s. \tag{5}$$

Оскільки $\gamma_j \neq 0$, то можна помножити ліву і праву частини рівності (5) на $-\frac{1}{\gamma_j}$. У результаті одержимо

$$a_j = \left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_j}\right) a_1 + \cdots + \left(-\frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_j}\right) a_{j-1} + \left(-\frac{\gamma_{j+1}}{\gamma_j}\right) a_{j+1} + \cdots + \left(-\frac{\gamma_s}{\gamma_j}\right) a_s.$$

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система $a_1, a_2, \ldots, a_s$ векторів із $\mathbb{R}^n$ є лінійно залежною. Тоді існує система дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, хоча б одне з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_j a_j + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Тоді, очевидно,

$$-\gamma_j a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s. \qquad (5)$$

Оскільки $\gamma_j \neq 0$, то можна помножити ліву і праву частини рівності (5) на $-\frac{1}{\gamma_j}$. У результаті одержимо

$$a_j = \left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_j}\right) a_1 + \cdots + \left(-\frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_j}\right) a_{j-1} + \left(-\frac{\gamma_{j+1}}{\gamma_j}\right) a_{j+1} + \cdots + \left(-\frac{\gamma_s}{\gamma_j}\right) a_s.$$

Це означає, що вектор a_j є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, \ldots, a_{j-1}, a_{j+1}, \ldots, a_s$,

Доведення.

Справді, припустимо спочатку, що система a_1, a_2, ..., a_s векторів із $\mathbb{R}^n$ є лінійно залежною. Тоді існує система дійсних чисел γ_1, γ_2, ..., γ_s, хоча б одне з яких, скажімо γ_j, не дорівнює нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_j a_j + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Тоді, очевидно,

$$-\gamma_j a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s. \qquad (5)$$

Оскільки $\gamma_j \neq 0$, то можна помножити ліву і праву частини рівності (5) на $-\frac{1}{\gamma_j}$. У результаті одержимо

$$a_j = \left(-\frac{\gamma_1}{\gamma_j}\right) a_1 + \cdots + \left(-\frac{\gamma_{j-1}}{\gamma_j}\right) a_{j-1} + \left(-\frac{\gamma_{j+1}}{\gamma_j}\right) a_{j+1} + \cdots + \left(-\frac{\gamma_s}{\gamma_j}\right) a_s.$$

Це означає, що вектор a_j є лінійною комбінацією системи векторів a_1, ..., a_{j-1}, a_{j+1}, ..., a_s, а тому необхідність теореми доведена.

Доведення.

Доведемо тепер достатність.

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай один із векторів системи a_1, a_2, $\ldots$, a_s, наприклад a_j, є лінійною комбінацією інших її векторів.

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай один із векторів системи a_1, a_2, …, a_s, наприклад a_j, є лінійною комбінацією інших її векторів. Тоді

$$a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s,$$

для деяких дійсних чисел γ_1, …, γ_{j-1}, γ_{j+1}, …, γ_s.

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай один із векторів системи a_1, a_2, $\dots$, a_s, наприклад a_j, є лінійною комбінацією інших її векторів. Тоді

$$a_j = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \dots + \gamma_s a_s,$$

для деяких дійсних чисел γ_1, $\dots$, γ_{j-1}, γ_{j+1}, $\dots$, γ_s. З цієї рівності слідує наступна рівність

$$\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + (-1) \cdot a_j + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \dots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай один із векторів системи a_1, a_2, $\dots$, a_s, наприклад a_j, є лінійною комбінацією інших її векторів. Тоді

$$a_j = \gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \dots + \gamma_s a_s,$$

для деяких дійсних чисел γ_1, $\dots$, γ_{j-1}, γ_{j+1}, $\dots$, γ_s. З цієї рівності слідує наступна рівність

$$\gamma_1 a_1 + \dots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + (-1) \cdot a_j + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \dots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Очевидно, не всі із чисел системи γ_1, $\dots$, γ_{j-1}, -1, γ_{j+1}, $\dots$, γ_s дорівнюють нулю,

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай один із векторів системи a_1, a_2, $\ldots$, a_s, наприклад a_j, є лінійною комбінацією інших її векторів. Тоді

$$a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s,$$

для деяких дійсних чисел γ_1, $\ldots$, γ_{j-1}, γ_{j+1}, $\ldots$, γ_s. З цієї рівності слідує наступна рівність

$$\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + (-1) \cdot a_j + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Очевидно, не всі із чисел системи γ_1, $\ldots$, γ_{j-1}, -1, γ_{j+1}, $\ldots$, γ_s дорівнюють нулю, а тому за означенням система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s є лінійно залежною.

Доведення.

Доведемо тепер достатність. Нехай один із векторів системи a_1, a_2, $\ldots$, a_s, наприклад a_j, є лінійною комбінацією інших її векторів. Тоді

$$a_j = \gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s,$$

для деяких дійсних чисел γ_1, $\ldots$, γ_{j-1}, γ_{j+1}, $\ldots$, γ_s. З цієї рівності слідує наступна рівність

$$\gamma_1 a_1 + \cdots + \gamma_{j-1} a_{j-1} + (-1) \cdot a_j + \gamma_{j+1} a_{j+1} + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Очевидно, не всі із чисел системи γ_1, $\ldots$, γ_{j-1}, -1, γ_{j+1}, $\ldots$, γ_s дорівнюють нулю, а тому за означенням система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s є лінійно залежною. Теорема доведена.

Означення 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$

Означення 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів n-вимірного векторного простору.

Означення 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів n-вимірного векторного простору. Система векторів

$$a_{i_1}, \quad a_{i_2}, \quad \ldots, \quad a_{i_k},$$

Означення 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів n-вимірного векторного простору. Система векторів

$$a_{i_1}, \quad a_{i_2}, \quad \ldots, \quad a_{i_k},$$

де

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq s$$

Означення 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів n-вимірного векторного простору. Система векторів

$$a_{i_1}, \quad a_{i_2}, \quad \ldots, \quad a_{i_k},$$

де

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq s$$

називається **підсистемою** системи $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Означення 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів n-вимірного векторного простору. Система векторів

$$a_{i_1}, \quad a_{i_2}, \quad \ldots, \quad a_{i_k},$$

де

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq s$$

називається підсистемою системи $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Наприклад, система векторів $(3,\ 4)$, $(9,\ 10)$ є підсистемою системи дійсних двовимірних векторів

$$(1,\ 2), \quad (3,\ 4), \quad (5,\ 6), \quad (7,\ 8), \quad (9,\ 10), \quad (11,\ 12).$$

Означення 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система векторів n-вимірного векторного простору. Система векторів

$$a_{i_1}, \quad a_{i_2}, \quad \ldots, \quad a_{i_k},$$

де

$$1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq s$$

називається підсистемою системи $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Наприклад, система векторів $(3,\ 4)$, $(9,\ 10)$ є підсистемою системи дійсних двовимірних векторів

$$\begin{array}{cccccc} (1,\ 2), & (3,\ 4), & (5,\ 6), & (7,\ 8), & (9,\ 10), & (11,\ 12). \\ a_1, & a_2, & a_3, & a_4 & a_5, & a_6. \end{array}$$

Теорема 6

Якщо деяка підсистема системи n-вимірних векторів є лінійно залежною, тоді і сама система є лінійно залежною.

Доведення.

Припустимо, що деяка підсистема, системи n-векторів

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_s \in \mathbb{R}^n$$

є лінійно залежною.

Доведення.

Припустимо, що деяка підсистема, системи n-векторів

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_s \in \mathbb{R}^n$$

є лінійно залежною. Нехай ця підсистема складається з k векторів і,

Доведення.

Припустимо, що деяка підсистема, системи n-векторів

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_s \in \mathbb{R}^n$$

є лінійно залежною. Нехай ця підсистема складається з k векторів і, не зменшуючи загальності доведення теореми, припустимо, що підсистема

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_k$$

є лінійно залежною.

Доведення.

Припустимо, що деяка підсистема, системи n-векторів

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_s \in \mathbb{R}^n$$

є лінійно залежною. Нехай ця підсистема складається з k векторів і, не зменшуючи загальності доведення теореми, припустимо, що підсистема

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k$$

є лінійно залежною. За означенням тоді існує система дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, не всі з яких рівні нулю,

Доведення.

Припустимо, що деяка підсистема, системи n-векторів

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_s \in \mathbb{R}^n$$

є лінійно залежною. Нехай ця підсистема складається з k векторів і, не зменшуючи загальності доведення теореми, припустимо, що підсистема

$$a_1, \quad a_2, \quad \dots, \quad a_k$$

є лінійно залежною. За означенням тоді існує система дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$, не всі з яких рівні нулю, така, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_k a_k = \bar{0}.$$

Доведення.

Припустимо, що деяка підсистема, системи n-векторів

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_s \in \mathbb{R}^n$$

є лінійно залежною. Нехай ця підсистема складається з k векторів і, не зменшуючи загальності доведення теореми, припустимо, що підсистема

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k$$

є лінійно залежною. За означенням тоді існує система дійсних чисел γ_1, γ_2, ..., γ_k, не всі з яких рівні нулю, така, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k = \bar{0}.$$

Тоді, очевидно,

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \cdots + 0 \cdot a_s = \bar{0}.$$

Доведення.

Припустимо, що деяка підсистема, системи n-векторів

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_s \in \mathbb{R}^n$$

є лінійно залежною. Нехай ця підсистема складається з k векторів і, не зменшуючи загальності доведення теореми, припустимо, що підсистема

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_k$$

є лінійно залежною. За означенням тоді існує система дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$, не всі з яких рівні нулю, така, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k = \bar{0}.$$

Тоді, очевидно,

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k + 0 \cdot a_{k+1} + \cdots + 0 \cdot a_s = \bar{0}.$$

Тому система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною, що й потрібно було довести. $\square$

Як наслідок із попередньої теореми випливають наступні твердження:

Як наслідок із попередньої теореми випливають наступні твердження:

1) *якщо система n-вимірних векторів містить нульовий вектор, то вона є лінійно залежною*;

Як наслідок із попередньої теореми випливають наступні твердження:

1) *якщо система n-вимірних векторів містить нульовий вектор, то вона є лінійно залежною*;
2) *якщо система n-вимірних векторів містить пропорційні вектори, то вона є лінійно залежною*;

Як наслідок із попередньої теореми випливають наступні твердження:

1) *якщо система n-вимірних векторів містить нульовий вектор, то вона є лінійно залежною*;
2) *якщо система n-вимірних векторів містить пропорційні вектори, то вона є лінійно залежною*;
3) *якщо система n-вимірних векторів є лінійно незалежною, тоді будь-яка її підсистема є лінійно незалежною.*

Теорема 7

Якщо система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ із $\mathbb{R}^n$ є лінійно незалежною, а система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s, b$ є лінійно залежною, то n-вимірний вектор b є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді за означенням лінійно залежної системи векторів існує система дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s, \delta$, не всі з яких рівні нулю,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді за означенням лінійно залежної системи векторів існує система дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s, \delta$, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s + \delta b = \bar{0}. \tag{6}$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді за означенням лінійно залежної системи векторів існує система дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s, \delta$, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s + \delta b = \bar{0}. \tag{6}$$

Коефіцієнт δ не дорівнює нулю,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді за означенням лінійно залежної системи векторів існує система дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s, \delta$, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s + \delta b = \bar{0}. \tag{6}$$

Коефіцієнт δ не дорівнює нулю, оскільки у протилежному випадку була б правильною рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0},$$

де серед коефіцієнтів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ хоча б один не дорівнює нулю.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді за означенням лінійно залежної системи векторів існує система дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s, \delta$, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s + \delta b = \bar{0}. \tag{6}$$

Коефіцієнт δ не дорівнює нулю, оскільки у протилежному випадку була б правильною рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0},$$

де серед коефіцієнтів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ хоча б один не дорівнює нулю. Це в свою чергу означало б, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді за означенням лінійно залежної системи векторів існує система дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s, \delta$, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s + \delta b = \bar{0}. \tag{6}$$

Коефіцієнт δ не дорівнює нулю, оскільки у протилежному випадку була б правильною рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0},$$

де серед коефіцієнтів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ хоча б один не дорівнює нулю. Це в свою чергу означало б, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною, а це суперечить умові теореми.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді за означенням лінійно залежної системи векторів існує система дійсних чисел γ_1, γ_2, ..., γ_s, δ, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s + \delta b = \bar{0}. \tag{6}$$

Коефіцієнт δ не дорівнює нулю, оскільки у протилежному випадку була б правильною рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0},$$

де серед коефіцієнтів γ_1, γ_2, ..., γ_s хоча б один не дорівнює нулю. Це в свою чергу означало б, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною, а це суперечить умові теореми.
Тепер, оскільки $\delta \neq 0$,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді за означенням лінійно залежної системи векторів існує система дійсних чисел γ_1, γ_2, ..., γ_s, δ, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s + \delta b = \bar{0}. \qquad (6)$$

Коефіцієнт δ не дорівнює нулю, оскільки у протилежному випадку була б правильною рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0},$$

де серед коефіцієнтів γ_1, γ_2, ..., γ_s хоча б один не дорівнює нулю. Це в свою чергу означало б, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною, а це суперечить умові теореми.
Тепер, оскільки $\delta \neq 0$, то із рівності (6) випливає, що

$$b = \left(-\tfrac{\gamma_1}{\delta}\right) a_1 + \left(-\tfrac{\gamma_2}{\delta}\right) a_2 + \cdots + \left(-\tfrac{\gamma_s}{\delta}\right) a_s,$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді за означенням лінійно залежної системи векторів існує система дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s, \delta$, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s + \delta b = \bar{0}. \tag{6}$$

Коефіцієнт δ не дорівнює нулю, оскільки у протилежному випадку була б правильною рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0},$$

де серед коефіцієнтів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ хоча б один не дорівнює нулю. Це в свою чергу означало б, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною, а це суперечить умові теореми.
Тепер, оскільки $\delta \neq 0$, то із рівності (6) випливає, що

$$b = \left(-\tfrac{\gamma_1}{\delta}\right) a_1 + \left(-\tfrac{\gamma_2}{\delta}\right) a_2 + \cdots + \left(-\tfrac{\gamma_s}{\delta}\right) a_s,$$

тобто вектор b є лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Тоді за означенням лінійно залежної системи векторів існує система дійсних чисел $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s, \delta$, не всі з яких рівні нулю, для яких справджується рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s + \delta b = \bar{0}. \tag{6}$$

Коефіцієнт δ не дорівнює нулю, оскільки у протилежному випадку була б правильною рівність

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0},$$

де серед коефіцієнтів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ хоча б один не дорівнює нулю. Це в свою чергу означало б, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною, а це суперечить умові теореми.
Тепер, оскільки $\delta \neq 0$, то із рівності (6) випливає, що

$$b = \left(-\tfrac{\gamma_1}{\delta}\right) a_1 + \left(-\tfrac{\gamma_2}{\delta}\right) a_2 + \cdots + \left(-\tfrac{\gamma_s}{\delta}\right) a_s,$$

тобто вектор b є лінійною комбінацією векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Теорема доведена. $\square$

Теорема 8

Будь-яка система із s n-вимірних векторів при $s > n$ є лінійно залежною.

Доведення.

Нехай задано систему векторів

$$a_1 = (\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \ldots,\ \alpha_{1n}),$$

Доведення.

Нехай задано систему векторів

$$\begin{aligned} a_1 &= (\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \ldots,\ \alpha_{1n}), \\ a_2 &= (\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \ldots,\ \alpha_{2n}), \end{aligned}$$

Доведення.

Нехай задано систему векторів

$$\begin{gathered} a_1 = (\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \ldots,\ \alpha_{1n}), \\ a_2 = (\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \ldots,\ \alpha_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{gathered}$$

Доведення.

Нехай задано систему векторів

$$\begin{gathered} a_1 = (\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \ldots,\ \alpha_{1n}), \\ a_2 = (\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \ldots,\ \alpha_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_s = (\alpha_{s1},\ \alpha_{s2},\ \ldots,\ \alpha_{sn}) \end{gathered}$$

Доведення.

Нехай задано систему векторів

$$
\begin{array}{c}
a_1 = (\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \ldots,\ \alpha_{1n}),\\
a_2 = (\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \ldots,\ \alpha_{2n}),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
a_s = (\alpha_{s1},\ \alpha_{s2},\ \ldots,\ \alpha_{sn})
\end{array}
$$

із n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Нехай задано систему векторів

$$\begin{gathered} a_1 = (\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \ldots,\ \alpha_{1n}), \\ a_2 = (\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \ldots,\ \alpha_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_s = (\alpha_{s1},\ \alpha_{s2},\ \ldots,\ \alpha_{sn}) \end{gathered}$$

із n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь з s невідомими $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_s$:

$$\begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \cdots + \alpha_{s1}x_s = 0, \\ \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{s2}x_s = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2 + \cdots + \alpha_{sn}x_s = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Доведення.

Нехай задано систему векторів

$$\begin{gathered} a_1 = (\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \ldots,\ \alpha_{1n}), \\ a_2 = (\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \ldots,\ \alpha_{2n}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_s = (\alpha_{s1},\ \alpha_{s2},\ \ldots,\ \alpha_{sn}) \end{gathered}$$

із n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь з s невідомими $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_s$:

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \cdots + \alpha_{s1}x_s = 0, \\ \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \cdots + \alpha_{s2}x_s = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}x_1 + \alpha_{2n}x_2 + \cdots + \alpha_{sn}x_s = 0. \end{array} \right. \tag{7}$$

Система лінійних однорідних рівнянь (7) є сумісною, оскільки, очевидно, s-вимірний нульовий вектор є її розв'язком.

Доведення.

Припустимо, що $s > n$.

Доведення.

Припустимо, що $s > n$. Тоді кількість рівнянь системи (7) менша, ніж кількість невідомих.

Доведення.

Припустимо, що $s > n$. Тоді кількість рівнянь системи (7) менша, ніж кількість невідомих. Із доведення теореми Ґаусса випливає, що така система лінійних рівнянь еквівалентна системі лінійних рівнянь східчастого вигляду,

Доведення.

Припустимо, що $s > n$. Тоді кількість рівнянь системи (7) менша, ніж кількість невідомих. Із доведення теореми Ґаусса випливає, що така система лінійних рівнянь еквівалентна системі лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій також кількість рівнянь менша, ніж кількість невідомих.

Доведення.

Припустимо, що $s > n$. Тоді кількість рівнянь системи (7) менша, ніж кількість невідомих. Із доведення теореми Ґаусса випливає, що така система лінійних рівнянь еквівалентна системі лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій також кількість рівнянь менша, ніж кількість невідомих. У свою чергу із це означає, що така система лінійних рівнянь є невизначеною,

Доведення.

Припустимо, що $s > n$. Тоді кількість рівнянь системи (7) менша, ніж кількість невідомих. Із доведення теореми Ґаусса випливає, що така система лінійних рівнянь еквівалентна системі лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій також кількість рівнянь менша, ніж кількість невідомих. У свою чергу із це означає, що така система лінійних рівнянь є невизначеною, тобто крім нульового розв'язку існує ще хоча б один, відмінний від нульового, розв'язок $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$.

Доведення.

Припустимо, що $s > n$. Тоді кількість рівнянь системи (7) менша, ніж кількість невідомих. Із доведення теореми Ґаусса випливає, що така система лінійних рівнянь еквівалентна системі лінійних рівнянь східчастого вигляду, в якій також кількість рівнянь менша, ніж кількість невідомих. У свою чергу із це означає, що така система лінійних рівнянь є невизначеною, тобто крім нульового розв'язку існує ще хоча б один, відмінний від нульового, розв'язок $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$. Тоді

$$\begin{cases} \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{21}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{s1}\gamma_s = 0, \\ \alpha_{12}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{s2}\gamma_s = 0, \\ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n}\gamma_1 + \alpha_{2n}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{sn}\gamma_s = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \dots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$:

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$

$$\gamma_1 \cdot (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n})$$

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$
$$\gamma_1 \cdot (\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \ldots,\ \alpha_{1n}) + \gamma_2 \cdot (\alpha_{21},\ \alpha_{22},\ \ldots,\ \alpha_{2n})$$

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$
$$\gamma_1 \cdot (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) + \gamma_2 \cdot (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) +$$
$$+ \cdots +$$

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$
$$\gamma_1 \cdot (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) + \gamma_2 \cdot (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) +$$
$$+ \cdots + \gamma_s \cdot (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn})$$

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$
$$\gamma_1 \cdot (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) + \gamma_2 \cdot (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) +$$
$$+ \cdots + \gamma_s \cdot (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}) =$$
$$= (\gamma_1 \alpha_{11} + \gamma_2 \alpha_{21} + \cdots + \gamma_s \alpha_{s1},$$

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$
$$\gamma_1 \cdot (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) + \gamma_2 \cdot (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) +$$
$$+ \cdots + \gamma_s \cdot (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}) =$$
$$= (\gamma_1 \alpha_{11} + \gamma_2 \alpha_{21} + \cdots + \gamma_s \alpha_{s1}, \ldots,$$

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$
$$\gamma_1 \cdot (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) + \gamma_2 \cdot (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) +$$
$$+ \cdots + \gamma_s \cdot (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}) =$$
$$= (\gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{21} + \cdots + \gamma_s\alpha_{s1}, \ldots, \gamma_1\alpha_{1n} + \gamma_2\alpha_{2n} + \cdots + \gamma_s\alpha_{sn})$$

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$
$$\gamma_1 \cdot (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) + \gamma_2 \cdot (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) +$$
$$+ \cdots + \gamma_s \cdot (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}) =$$
$$= (\gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{21} + \cdots + \gamma_s\alpha_{s1}, \ldots, \gamma_1\alpha_{1n} + \gamma_2\alpha_{2n} + \cdots + \gamma_s\alpha_{sn}) =$$
$$= (\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{21}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{s1}\gamma_s,$$

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ \ldots, \ a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \ \gamma_2, \ \ldots, \ \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$
$$\gamma_1 \cdot (\alpha_{11}, \ \alpha_{12}, \ \ldots, \ \alpha_{1n}) + \gamma_2 \cdot (\alpha_{21}, \ \alpha_{22}, \ \ldots, \ \alpha_{2n}) +$$
$$+ \cdots + \gamma_s \cdot (\alpha_{s1}, \ \alpha_{s2}, \ \ldots, \ \alpha_{sn}) =$$
$$= (\gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{21} + \cdots + \gamma_s\alpha_{s1}, \ldots, \gamma_1\alpha_{1n} + \gamma_2\alpha_{2n} + \cdots + \gamma_s\alpha_{sn}) =$$
$$= (\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{21}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{s1}\gamma_s, \ldots, \alpha_{1n}\gamma_1 + \alpha_{2n}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{sn}\gamma_s)$$

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$
$$\gamma_1 \cdot (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) + \gamma_2 \cdot (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) +$$
$$+ \cdots + \gamma_s \cdot (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}) =$$
$$= (\gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{21} + \cdots + \gamma_s\alpha_{s1}, \ldots, \gamma_1\alpha_{1n} + \gamma_2\alpha_{2n} + \cdots + \gamma_s\alpha_{sn}) =$$
$$= (\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{21}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{s1}\gamma_s, \ldots, \alpha_{1n}\gamma_1 + \alpha_{2n}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{sn}\gamma_s) =$$
$$= (0, \ldots, 0) = \bar{0}.$$

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$
$$\gamma_1 \cdot (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) + \gamma_2 \cdot (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) +$$
$$+ \cdots + \gamma_s \cdot (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}) =$$
$$= (\gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{21} + \cdots + \gamma_s\alpha_{s1}, \ldots, \gamma_1\alpha_{1n} + \gamma_2\alpha_{2n} + \cdots + \gamma_s\alpha_{sn}) =$$
$$= (\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{21}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{s1}\gamma_s, \ldots, \alpha_{1n}\gamma_1 + \alpha_{2n}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{sn}\gamma_s) =$$
$$= (0, \ldots, 0) = \bar{0}.$$

Таким чином нами показано, що існують числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, не всі з яких дорівнюють нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}$$

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ \ldots, \ a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ \ldots, \ \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$
$$\gamma_1 \cdot (\alpha_{11}, \ \alpha_{12}, \ \ldots, \ \alpha_{1n}) + \gamma_2 \cdot (\alpha_{21}, \ \alpha_{22}, \ \ldots, \ \alpha_{2n}) +$$
$$+ \cdots + \gamma_s \cdot (\alpha_{s1}, \ \alpha_{s2}, \ \ldots, \ \alpha_{sn}) =$$
$$= (\gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{21} + \cdots + \gamma_s\alpha_{s1}, \ldots, \gamma_1\alpha_{1n} + \gamma_2\alpha_{2n} + \cdots + \gamma_s\alpha_{sn}) =$$
$$= (\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{21}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{s1}\gamma_s, \ldots, \alpha_{1n}\gamma_1 + \alpha_{2n}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{sn}\gamma_s) =$$
$$= (0, \ \ldots, \ 0) = \bar{0}.$$

Таким чином нами показано, що існують числа $\gamma_1, \gamma_2, \ \ldots, \ \gamma_s$, не всі з яких дорівнюють нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}$$

і, отже, система векторів $a_1, \ a_2, \ \ldots, \ a_s$ є лінійно залежною.

Доведення.

Далі, розглянемо лінійну комбінацію системи векторів $a_1, \ldots, a_s$ з коефіцієнтами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$:

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s =$$
$$\gamma_1 \cdot (\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1n}) + \gamma_2 \cdot (\alpha_{21}, \alpha_{22}, \ldots, \alpha_{2n}) +$$
$$+ \cdots + \gamma_s \cdot (\alpha_{s1}, \alpha_{s2}, \ldots, \alpha_{sn}) =$$
$$= (\gamma_1\alpha_{11} + \gamma_2\alpha_{21} + \cdots + \gamma_s\alpha_{s1}, \ldots, \gamma_1\alpha_{1n} + \gamma_2\alpha_{2n} + \cdots + \gamma_s\alpha_{sn}) =$$
$$= (\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{21}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{s1}\gamma_s, \ldots, \alpha_{1n}\gamma_1 + \alpha_{2n}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{sn}\gamma_s) =$$
$$= (0, \ldots, 0) = \bar{0}.$$

Таким чином нами показано, що існують числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$, не всі з яких дорівнюють нулю, такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}$$

і, отже, система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною. Теорема доведена. □

Означення 12

Система n-вимірних векторів називається **базисом n-вимірного векторного простору**,

Означення 12

Система n-вимірних векторів називається базисом n-вимірного векторного простору, якщо, по-перше, вона є лінійно незалежною,

Означення 12

Система n-вимірних векторів називається **базисом n-вимірного векторного простору**, якщо, по-перше, вона є лінійно незалежною, а по-друге, будь-який n-вимірний вектор є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

Означення 12

Система n-вимірних векторів називається базисом n-вимірного векторного простору, якщо, по-перше, вона є лінійно незалежною, а по-друге, будь-який n-вимірний вектор є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

Приклад. Система векторів

$$(0,\ 0,\ 1), \quad (1,\ 0,\ 0), \quad (0,\ 2,\ 0)$$

Означення 12

Система n-вимірних векторів називається **базисом n-вимірного векторного простору**, якщо, по-перше, вона є лінійно незалежною, а по-друге, будь-який n-вимірний вектор є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

Приклад. Система векторів

$$(0,\ 0,\ 1),\quad (1,\ 0,\ 0),\quad (0,\ 2,\ 0)$$

є базисом дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$.

Означення 12

Система n-вимірних векторів називається **базисом n-вимірного векторного простору**, якщо, по-перше, вона є лінійно незалежною, а по-друге, будь-який n-вимірний вектор є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

Приклад. Система векторів

$$(0,\ 0,\ 1), \quad (1,\ 0,\ 0), \quad (0,\ 2,\ 0)$$

є базисом дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Це так, через те, що

$$\gamma_1 \cdot (0,\ 0,\ 1) + \gamma_2 \cdot (1,\ 0,\ 0) + \gamma_3 \cdot (0,\ 2,\ 0)$$

Означення 12

Система n-вимірних векторів називається базисом n-вимірного векторного простору, якщо, по-перше, вона є лінійно незалежною, а по-друге, будь-який n-вимірний вектор є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

Приклад. Система векторів

$$(0,\ 0,\ 1), \quad (1,\ 0,\ 0), \quad (0,\ 2,\ 0)$$

є базисом дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Це так, через те, що

$$\gamma_1 \cdot (0,\ 0,\ 1) + \gamma_2 \cdot (1,\ 0,\ 0) + \gamma_3 \cdot (0,\ 2,\ 0) =$$
$$= (\gamma_2,\ 2\gamma_3,\ \gamma_1)$$

Означення 12

Система n-вимірних векторів називається **базисом n-вимірного векторного простору**, якщо, по-перше, вона є лінійно незалежною, а по-друге, будь-який n-вимірний вектор є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

Приклад. Система векторів

$$(0,\ 0,\ 1),\quad (1,\ 0,\ 0),\quad (0,\ 2,\ 0)$$

є базисом дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Це так, через те, що

$$\gamma_1 \cdot (0,\ 0,\ 1) + \gamma_2 \cdot (1,\ 0,\ 0) + \gamma_3 \cdot (0,\ 2,\ 0) =$$
$$= (\gamma_2,\ 2\gamma_3,\ \gamma_1) = (0,\ 0,\ 0),$$

Означення 12

Система n-вимірних векторів називається **базисом n-вимірного векторного простору**, якщо, по-перше, вона є лінійно незалежною, а по-друге, будь-який n-вимірний вектор є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

Приклад. Система векторів

$$(0,\ 0,\ 1),\quad (1,\ 0,\ 0),\quad (0,\ 2,\ 0)$$

є базисом дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Це так, через те, що

$$\gamma_1 \cdot (0,\ 0,\ 1) + \gamma_2 \cdot (1,\ 0,\ 0) + \gamma_3 \cdot (0,\ 2,\ 0) =$$
$$= (\gamma_2,\ 2\gamma_3,\ \gamma_1) = (0,\ 0,\ 0),$$

тільки якщо $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$.

Означення 12

Система n-вимірних векторів називається **базисом n-вимірного векторного простору**, якщо, по-перше, вона є лінійно незалежною, а по-друге, будь-який n-вимірний вектор є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

Приклад. Система векторів

$$(0,\ 0,\ 1),\quad (1,\ 0,\ 0),\quad (0,\ 2,\ 0)$$

є базисом дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Це так, через те, що

$$\gamma_1 \cdot (0,\ 0,\ 1) + \gamma_2 \cdot (1,\ 0,\ 0) + \gamma_3 \cdot (0,\ 2,\ 0) = \\ = (\gamma_2,\ 2\gamma_3,\ \gamma_1) = (0,\ 0,\ 0),$$

тільки якщо $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$.
Далі, будь-який вектор $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ із $\mathbb{R}^3$

Означення 12

Система n-вимірних векторів називається базисом n-вимірного векторного простору, якщо, по-перше, вона є лінійно незалежною, а по-друге, будь-який n-вимірний вектор є лінійною комбінацією векторів цієї системи.

Приклад. Система векторів

$$(0,\ 0,\ 1), \quad (1,\ 0,\ 0), \quad (0,\ 2,\ 0)$$

є базисом дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Це так, через те, що

$$\gamma_1 \cdot (0,\ 0,\ 1) + \gamma_2 \cdot (1,\ 0,\ 0) + \gamma_3 \cdot (0,\ 2,\ 0) = \\ = (\gamma_2,\ 2\gamma_3,\ \gamma_1) = (0,\ 0,\ 0),$$

тільки якщо $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 0$.
Далі, будь-який вектор $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ із $\mathbb{R}^3$ можна представити у вигляді лінійної комбінації

$$\gamma \cdot (0,\ 0,\ 1) + \alpha \cdot (1,\ 0,\ 0) + \tfrac{\beta}{2} \cdot (0,\ 2,\ 0).$$

Лема 1

Система n-вимірних векторів

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Справді, легко видно, що лінійною комбінацією системи векторів e_1, e_2, ..., e_n з коефіцієнтами α_1, α_2, ..., α_n є наступний вектор

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n).$$

Доведення.

Справді, легко видно, що лінійною комбінацією системи векторів e_1, e_2, ..., e_n з коефіцієнтами α_1, α_2, ..., α_n є наступний вектор

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n).$$

Тому

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \bar{0}$$

Доведення.

Справді, легко видно, що лінійною комбінацією системи векторів e_1, e_2, ..., e_n з коефіцієнтами α_1, α_2, ..., α_n є наступний вектор

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n).$$

Тому

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \bar{0}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_n = 0.$$

Доведення.

Справді, легко видно, що лінійною комбінацією системи векторів e_1, e_2, ..., e_n з коефіцієнтами α_1, α_2, ..., α_n є наступний вектор

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \ \alpha_2, \ \dots, \ \alpha_n).$$

Тому

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n = \bar{0}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \dots, \quad \alpha_n = 0.$$

Отже, система векторів e_1, e_2, ..., e_n є лінійно незалежною.

Доведення.

Справді, легко видно, що лінійною комбінацією системи векторів e_1, e_2, ..., e_n з коефіцієнтами α_1, α_2, ..., α_n є наступний вектор

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n).$$

Тому

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \bar{0}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n = 0.$$

Отже, система векторів e_1, e_2, ..., e_n є лінійно незалежною.
Якщо ж $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$,

Доведення.

Справді, легко видно, що лінійною комбінацією системи векторів e_1, e_2, ..., e_n з коефіцієнтами α_1, α_2, ..., α_n є наступний вектор

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n).$$

Тому

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \bar{0}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n = 0.$$

Отже, система векторів e_1, e_2, ..., e_n є лінійно незалежною. Якщо ж $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$, то

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

Доведення.

Справді, легко видно, що лінійною комбінацією системи векторів e_1, $e_2, \ldots, e_n$ з коефіцієнтами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ є наступний вектор

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).$$

Тому

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \bar{0}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n = 0.$$

Отже, система векторів $e_1, e_2, \ldots, e_n$ є лінійно незалежною.
Якщо ж $a = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$, то

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

тобто a є лінійною комбінацією системи векторів $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

Доведення.

Справді, легко видно, що лінійною комбінацією системи векторів e_1, e_2, …, e_n з коефіцієнтами α_1, α_2, …, α_n є наступний вектор

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n).$$

Тому

$$\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = \bar{0}$$

тоді і тільки тоді, коли

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 0, \quad \ldots, \quad \alpha_n = 0.$$

Отже, система векторів e_1, e_2, …, e_n є лінійно незалежною.
Якщо ж $a = (\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n)$ — довільний вектор із $\mathbb{R}^n$, то

$$a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n,$$

тобто a є лінійною комбінацією системи векторів e_1, e_2, …, e_n.
З усього вище сказаного тепер слідує, що система n-вимірних векторів e_1, e_2, …, e_n є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. □

Означення 13

Базис

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називається канонічним базисом.

Означення 13

Базис

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називається канонічним базисом.

Теорема 9

Для довільної системи n-вимірних векторів $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ справджується лише одне із наступних тверджень:

Означення 13

Базис

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, \dots, 0, 0),\ \dots,\ e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$$

n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називається канонічним базисом.

Теорема 9

Для довільної системи n-вимірних векторів a_1, a_2, a_3, $\dots$, a_s справджується лише одне із наступних тверджень:

1) *система векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s є лінійно залежною;*

Означення 13

Базис

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називається канонічним базисом.

Теорема 9

Для довільної системи n-вимірних векторів $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ справджується лише одне із наступних тверджень:

1) *система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною;*
2) *система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$;*

Означення 13

Базис

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0, 0),\ e_2 = (0, 1, \ldots, 0, 0),\ \ldots,\ e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називається канонічним базисом.

Теорема 9

Для довільної системи n-вимірних векторів $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$ справджується лише одне із наступних тверджень:

1) *система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною;*
2) *система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$;*
3) *існує n-вимірний вектор b такий, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s, b$ є лінійно незалежною.*

Доведення.

Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_s — деяка система n-вимірних векторів.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система n-вимірних векторів. Для доведення теореми нам досить показати, що якщо не виконуються перші два твердження теореми для цієї системи векторів, то для системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ справджується третє твердження теореми.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деяка система n-вимірних векторів. Для доведення теореми нам досить показати, що якщо не виконуються перші два твердження теореми для цієї системи векторів, то для системи векторів a_1, a_2, ..., a_s справджується третє твердження теореми.

Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно незалежною

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — деяка система n-вимірних векторів. Для доведення теореми нам досить показати, що якщо не виконуються перші два твердження теореми для цієї системи векторів, то для системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ справджується третє твердження теореми.

Припустимо, що система векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ є лінійно незалежною і не є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система n-вимірних векторів. Для доведення теореми нам досить показати, що якщо не виконуються перші два твердження теореми для цієї системи векторів, то для системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ справджується третє твердження теореми.

Припустимо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно незалежною і не є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. Тоді існує n-вимірний вектор b,

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — деяка система n-вимірних векторів. Для доведення теореми нам досить показати, що якщо не виконуються перші два твердження теореми для цієї системи векторів, то для системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ справджується третє твердження теореми.

Припустимо, що система векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ є лінійно незалежною і не є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. Тоді існує n-вимірний вектор b, який не є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система n-вимірних векторів. Для доведення теореми нам досить показати, що якщо не виконуються перші два твердження теореми для цієї системи векторів, то для системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ справджується третє твердження теореми.

Припустимо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно незалежною і не є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. Тоді існує n-вимірний вектор b, який не є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Розглянемо систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s, b$.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_s — деяка система n-вимірних векторів. Для доведення теореми нам досить показати, що якщо не виконуються перші два твердження теореми для цієї системи векторів, то для системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s справджується третє твердження теореми.
Припустимо, що система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s є лінійно незалежною і не є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. Тоді існує n-вимірний вектор b, який не є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s.
Розглянемо систему векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s, b. Якщо ця система була б лінійно залежною,

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система n-вимірних векторів. Для доведення теореми нам досить показати, що якщо не виконуються перші два твердження теореми для цієї системи векторів, то для системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ справджується третє твердження теореми.

Припустимо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно незалежною і не є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. Тоді існує n-вимірний вектор b, який не є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Розглянемо систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s, b$. Якщо ця система була б лінійно залежною, то за теоремою 7 вектор b повинен бути лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Доведення.

Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деяка система n-вимірних векторів. Для доведення теореми нам досить показати, що якщо не виконуються перші два твердження теореми для цієї системи векторів, то для системи векторів a_1, a_2, ..., a_s справджується третє твердження теореми.

Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно незалежною і не є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. Тоді існує n-вимірний вектор b, який не є лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, ..., a_s.

Розглянемо систему векторів a_1, a_2, ..., a_s, b. Якщо ця система була б лінійно залежною, то за теоремою 7 вектор b повинен бути лінійною комбінацією системи векторів a_1, a_2, ..., a_s. Оскільки останнє неможливо,

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деяка система n-вимірних векторів. Для доведення теореми нам досить показати, що якщо не виконуються перші два твердження теореми для цієї системи векторів, то для системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ справджується третє твердження теореми.

Припустимо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно незалежною і не є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. Тоді існує n-вимірний вектор b, який не є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$.

Розглянемо систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s, b$. Якщо ця система була б лінійно залежною, то за теоремою 7 вектор b повинен бути лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Оскільки останнє неможливо, то це означає, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s, b$ є лінійно незалежною.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — деяка система n-вимірних векторів. Для доведення теореми нам досить показати, що якщо не виконуються перші два твердження теореми для цієї системи векторів, то для системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ справджується третє твердження теореми.

Припустимо, що система векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ є лінійно незалежною і не є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. Тоді існує n-вимірний вектор b, який не є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$.

Розглянемо систему векторів $a_1, a_2, \dots, a_s, b$. Якщо ця система була б лінійно залежною, то за теоремою 7 вектор b повинен бути лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$. Оскільки останнє неможливо, то це означає, що система векторів $a_1, a_2, \dots, a_s, b$ є лінійно незалежною. Теорема доведена. $\square$

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система,

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Доведення цього наслідку одразу випливає із теорем 7

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Доведення цього наслідку одразу випливає із теорем 7 і 9.

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Доведення цього наслідку одразу випливає із теорем 7 і 9. Якщо a_1, a_2, ..., a_n — лінійно незалежна система n-вимірних векторів,

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Доведення цього наслідку одразу випливає із теорем 7 і 9. Якщо a_1, a_2, ..., a_n — лінійно незалежна система n-вимірних векторів, то за теоремою 7

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Доведення цього наслідку одразу випливає із теорем 7 і 9. Якщо a_1, a_2, ..., a_n — лінійно незалежна система n-вимірних векторів, то за теоремою 7 для довільного n-вимірного вектора b

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Доведення цього наслідку одразу випливає із теорем 7 і 9. Якщо a_1, a_2, ..., a_n — лінійно незалежна система n-вимірних векторів, то за теоремою 7 для довільного n-вимірного вектора b система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Доведення цього наслідку одразу випливає із теорем 7 і 9. Якщо a_1, a_2, ..., a_n — лінійно незалежна система n-вимірних векторів, то за теоремою 7 для довільного n-вимірного вектора b система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ є лінійно залежною

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Доведення цього наслідку одразу випливає із теорем 7 і 9. Якщо a_1, a_2, ..., a_n — лінійно незалежна система n-вимірних векторів, то за теоремою 7 для довільного n-вимірного вектора b система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ є лінійно залежною (оскільки складається з $n+1$ векторів).

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Доведення цього наслідку одразу випливає із теорем 7 і 9. Якщо a_1, a_2, ..., a_n — лінійно незалежна система n-вимірних векторів, то за теоремою 7 для довільного n-вимірного вектора b система векторів a_1, a_2, ..., a_n, b є лінійно залежною (оскільки складається з $n+1$ векторів). Нарешті, за теоремою 9

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Доведення цього наслідку одразу випливає із теорем 7 і 9. Якщо a_1, a_2, ..., a_n — лінійно незалежна система n-вимірних векторів, то за теоремою 7 для довільного n-вимірного вектора b система векторів a_1, a_2, ..., a_n, b є лінійно залежною (оскільки складається з $n+1$ векторів). Нарешті, за теоремою 9 для системи векторів a_1, a_2, ..., a_n

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Доведення цього наслідку одразу випливає із теорем 7 і 9. Якщо a_1, a_2, ..., a_n — лінійно незалежна система n-вимірних векторів, то за теоремою 7 для довільного n-вимірного вектора b система векторів a_1, a_2, ..., a_n, b є лінійно залежною (оскільки складається з $n+1$ векторів). Нарешті, за теоремою 9 для системи векторів a_1, a_2, ..., a_n справджується тільки друге її твердження,

Наслідок 1

Будь-яка лінійно незалежна система, що складається із n векторів із $\mathbb{R}^n$ є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Доведення цього наслідку одразу випливає із теорем 7 і 9. Якщо a_1, a_2, ..., a_n — лінійно незалежна система n-вимірних векторів, то за теоремою 7 для довільного n-вимірного вектора b система векторів a_1, a_2, ..., a_n, b є лінійно залежною (оскільки складається з $n+1$ векторів). Нарешті, за теоремою 9 для системи векторів a_1, a_2, ..., a_n справджується тільки друге її твердження, тобто a_1, a_2, ..., a_n є базисом n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$. $\square$

Означення 14

Кажуть, що система векторів $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_r \in \mathbb{R}^n$

Означення 14

Кажуть, що система векторів $a_1,\ a_2, \ldots,\ a_r \in \mathbb{R}^n$ лінійно виражається через систему векторів

Означення 14

Кажуть, що система векторів $a_1,\ a_2,\dots,\ a_r \in \mathbb{R}^n$ **лінійно виражається через систему векторів** $b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_s \in \mathbb{R}^n$,

Означення 14

Кажуть, що система векторів a_1, a_2,..., $a_r \in \mathbb{R}^n$ лінійно виражається через систему векторів b_1, b_2, ..., $b_s \in \mathbb{R}^n$, якщо кожен із векторів першої системи

Означення 14

Кажуть, що система векторів a_1, a_2,..., $a_r \in \mathbb{R}^n$ лінійно виражається через систему векторів b_1, b_2, ..., $b_s \in \mathbb{R}^n$, якщо кожен із векторів першої системи є лінійною комбінацією векторів другої системи.

Означення 14

Кажуть, що система векторів a_1, a_2,..., $a_r \in \mathbb{R}^n$ лінійно виражається через систему векторів b_1, b_2, ..., $b_s \in \mathbb{R}^n$, якщо кожен із векторів першої системи є лінійною комбінацією векторів другої системи.

Тобто існують дійсні числа γ_{11}, γ_{12}, ..., γ_{1s},

Означення 14

Кажуть, що система векторів a_1, a_2,..., $a_r \in \mathbb{R}^n$ **лінійно виражається через систему векторів** b_1, b_2, ..., $b_s \in \mathbb{R}^n$, якщо кожен із векторів першої системи є лінійною комбінацією векторів другої системи.

Тобто існують дійсні числа $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1s}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{rs}$,

Означення 14

Кажуть, що система векторів a_1, a_2,..., $a_r \in \mathbb{R}^n$ лінійно виражається через систему векторів b_1, b_2, ..., $b_s \in \mathbb{R}^n$, якщо кожен із векторів першої системи є лінійною комбінацією векторів другої системи.

Тобто існують дійсні числа γ_{11}, γ_{12}, ..., γ_{1s}, γ_{21}, γ_{22}, ..., γ_{rs}, що

$$a_1 = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s,$$

Означення 14

Кажуть, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R}^n$ **лінійно виражається через систему векторів** $b_1, b_2, \ldots, b_s \in \mathbb{R}^n$, якщо кожен із векторів першої системи є лінійною комбінацією векторів другої системи.

Тобто існують дійсні числа $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1s}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{rs}$, що

$$a_1 = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s,$$
$$a_2 = \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s,$$

Означення 14

Кажуть, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R}^n$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s \in \mathbb{R}^n$, якщо кожен із векторів першої системи є лінійною комбінацією векторів другої системи.

Тобто існують дійсні числа $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1s}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{rs}$, що

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s, \\ a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s. \end{aligned}$$

Означення 14

Кажуть, що система векторів a_1, a_2,..., $a_r \in \mathbb{R}^n$ **лінійно виражається через систему векторів** b_1, b_2, ..., $b_s \in \mathbb{R}^n$, якщо кожен із векторів першої системи є лінійною комбінацією векторів другої системи.

Тобто існують дійсні числа γ_{11}, γ_{12}, ..., γ_{1s}, γ_{21}, γ_{22}, ..., γ_{rs}, що

$$\begin{aligned}
a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s,\\
a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s.
\end{aligned}$$

Означення 15

Дві системи векторів

Означення 14

Кажуть, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R}^n$ лінійно виражається через систему векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s \in \mathbb{R}^n$, якщо кожен із векторів першої системи є лінійною комбінацією векторів другої системи.

Тобто існують дійсні числа $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1s}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{rs}$, що

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s, \\ a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s. \end{aligned}$$

Означення 15

Дві системи векторів n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$

Означення 14

Кажуть, що система векторів a_1, a_2,..., $a_r \in \mathbb{R}^n$ лінійно виражається через систему векторів b_1, b_2, ..., $b_s \in \mathbb{R}^n$, якщо кожен із векторів першої системи є лінійною комбінацією векторів другої системи.

Тобто існують дійсні числа γ_{11}, γ_{12}, ..., γ_{1s}, γ_{21}, γ_{22}, ..., γ_{rs}, що

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \dots + \gamma_{1s}b_s, \\ a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \dots + \gamma_{2s}b_s, \\ &\dots\dots\dots \\ a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \dots + \gamma_{rs}b_s. \end{aligned}$$

Означення 15

Дві системи векторів n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називаються еквівалентними,

Означення 14

Кажуть, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r \in \mathbb{R}^n$ **лінійно виражається через систему векторів** $b_1, b_2, \ldots, b_s \in \mathbb{R}^n$, якщо кожен із векторів першої системи є лінійною комбінацією векторів другої системи.

Тобто існують дійсні числа $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1s}, \gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{rs}$, що

$$\begin{aligned}
a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s, \\
a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s.
\end{aligned}$$

Означення 15

Дві системи векторів n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ називаються **еквівалентними**, якщо кожна з них лінійно виражається через іншу.

Теорема 10

Якщо система векторів a_1, $a_2, \ldots,$ a_r *із* $\mathbb{R}^n$

Теорема 10

Якщо система векторів a_1, $a_2, \ldots$, a_r *із* $\mathbb{R}^n$ *лінійно виражається через систему векторів* b_1, b_2, $\ldots$, b_s *із* $\mathbb{R}^n$,

Теорема 10

Якщо система векторів a_1, a_2,..., a_r *із* $\mathbb{R}^n$ *лінійно виражається через систему векторів* b_1, b_2, ..., b_s *із* $\mathbb{R}^n$, *яка в свою чергу лінійно виражається через систему векторів* c_1, c_2, ..., c_t *із* $\mathbb{R}^n$,

Теорема 10

Якщо система векторів a_1, $a_2, \ldots$, a_r *із* $\mathbb{R}^n$ *лінійно виражається через систему векторів* b_1, b_2, $\ldots$, b_s *із* $\mathbb{R}^n$, *яка в свою чергу лінійно виражається через систему векторів* c_1, c_2, $\ldots$, c_t *із* $\mathbb{R}^n$, *тоді система векторів* a_1, $a_2, \ldots$, a_r

Теорема 10

Якщо система векторів a_1, $a_2, \ldots$, a_r *із* $\mathbb{R}^n$ *лінійно виражається через систему векторів* b_1, b_2, $\ldots$, b_s *із* $\mathbb{R}^n$, *яка в свою чергу лінійно виражається через систему векторів* c_1, c_2, $\ldots$, c_t *із* $\mathbb{R}^n$, *тоді система векторів* a_1, $a_2, \ldots$, a_r *лінійно виражається через систему векторів* c_1, c_2, $\ldots$, c_t.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \cdots + \alpha_{is}b_s$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1} b_1 + \alpha_{i2} b_2 + \cdots + \alpha_{is} b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} b_k,$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \cdots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik},

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \cdots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$;

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \cdots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \dots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \dots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \dots, r\}$; $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ \dots, \ s\}$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \cdots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ \ldots, \ s\}$

$$b_j = \beta_{j1}c_1 + \beta_{j2}c_2 + \cdots + \beta_{jt}c_t$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \dots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \cdots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \dots, r\}$; $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ \dots, \ s\}$

$$b_j = \beta_{j1}c_1 + \beta_{j2}c_2 + \cdots + \beta_{jt}c_t = \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl}c_l$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1} b_1 + \alpha_{i2} b_2 + \cdots + \alpha_{is} b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ \ldots, \ s\}$

$$b_j = \beta_{j1} c_1 + \beta_{j2} c_2 + \cdots + \beta_{jt} c_t = \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl} c_l$$

для деяких дійсних чисел β_{jl},

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \cdots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ і для кожного $j \in \{1, 2,\ \ldots,\ s\}$

$$b_j = \beta_{j1}c_1 + \beta_{j2}c_2 + \cdots + \beta_{jt}c_t = \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl}c_l$$

для деяких дійсних чисел β_{jl}, де $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \cdots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ \ldots, \ s\}$

$$b_j = \beta_{j1}c_1 + \beta_{j2}c_2 + \cdots + \beta_{jt}c_t = \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl}c_l$$

для деяких дійсних чисел β_{jl}, де $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \cdots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ \ldots, \ s\}$

$$b_j = \beta_{j1}c_1 + \beta_{j2}c_2 + \cdots + \beta_{jt}c_t = \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl}c_l$$

для деяких дійсних чисел β_{jl}, де $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ справджуються наступні рівності

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \dots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \dots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \dots, r\}$; $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ \dots, \ s\}$

$$b_j = \beta_{j1}c_1 + \beta_{j2}c_2 + \dots + \beta_{jt}c_t = \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl}c_l$$

для деяких дійсних чисел β_{jl}, де $j \in \{1, 2, \dots, s\}$; $l \in \{1, 2, \dots, t\}$. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ справджуються наступні рівності

$$a_i = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} \sum_{l=1}^{t} \beta_{kl}c_l$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \cdots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ \ldots, \ s\}$

$$b_j = \beta_{j1}c_1 + \beta_{j2}c_2 + \cdots + \beta_{jt}c_t = \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl}c_l$$

для деяких дійсних чисел β_{jl}, де $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ справджуються наступні рівності

$$a_i = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} \sum_{l=1}^{t} \beta_{kl}c_l = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{t} \alpha_{ik}\beta_{kl}c_l$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \dots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1} b_1 + \alpha_{i2} b_2 + \cdots + \alpha_{is} b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \dots, r\}$; $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ \dots, \ s\}$

$$b_j = \beta_{j1} c_1 + \beta_{j2} c_2 + \cdots + \beta_{jt} c_t = \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl} c_l$$

для деяких дійсних чисел β_{jl}, де $j \in \{1, 2, \dots, s\}$; $l \in \{1, 2, \dots, t\}$. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ справджуються наступні рівності

$$a_i = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} \sum_{l=1}^{t} \beta_{kl} c_l = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{t} \alpha_{ik} \beta_{kl} c_l = \sum_{l=1}^{t} \left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} \beta_{kl} \right) c_l. \qquad (9)$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \cdots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ \ldots, \ s\}$

$$b_j = \beta_{j1}c_1 + \beta_{j2}c_2 + \cdots + \beta_{jt}c_t = \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl}c_l$$

для деяких дійсних чисел β_{jl}, де $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ справджуються наступні рівності

$$a_i = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} \sum_{l=1}^{t} \beta_{kl}c_l = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{t} \alpha_{ik}\beta_{kl}c_l = \sum_{l=1}^{t} \left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kl} \right) c_l. \qquad (9)$$

Позначимо $\sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kl}$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \cdots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ \ldots, \ s\}$

$$b_j = \beta_{j1}c_1 + \beta_{j2}c_2 + \cdots + \beta_{jt}c_t = \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl}c_l$$

для деяких дійсних чисел β_{jl}, де $j \in \{1, 2, \ldots, s\}$; $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ справджуються наступні рівності

$$a_i = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} \sum_{l=1}^{t} \beta_{kl}c_l = \sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{t} \alpha_{ik}\beta_{kl}c_l = \sum_{l=1}^{t}\left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kl}\right) c_l. \qquad (9)$$

Позначимо $\sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kl}$ через γ_{il},

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми, тобто для кожного $i \in \{1, 2, \dots, r\}$

$$a_i = \alpha_{i1}b_1 + \alpha_{i2}b_2 + \dots + \alpha_{is}b_s = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}b_k,$$

для деяких дійсних чисел α_{ik}, де $i \in \{1, 2, \dots, r\}$; $k \in \{1, 2, \dots, s\}$ і для кожного $j \in \{1, 2, \ \dots, \ s\}$

$$b_j = \beta_{j1}c_1 + \beta_{j2}c_2 + \dots + \beta_{jt}c_t = \sum_{l=1}^{t} \beta_{jl}c_l$$

для деяких дійсних чисел β_{jl}, де $j \in \{1, 2, \dots, s\}$; $l \in \{1, 2, \dots, t\}$. Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ справджуються наступні рівності

$$a_i = \sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik} \sum_{l=1}^{t} \beta_{kl}c_l = \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{t} \alpha_{ik}\beta_{kl}c_l = \sum_{l=1}^{t} \left(\sum_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kl} \right) c_l. \qquad (9)$$

Позначимо $\sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_{ik}\beta_{kl}$ через γ_{il}, де $i \in \{1, 2, \dots, r\}$; $l \in \{1, 2, \dots, t\}$.

Доведення.

Тоді із (9) випливає,

Доведення.

Тоді із (9) випливає, що для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$

Доведення.

Тоді із (9) випливає, що для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ справджується рівність

$$a_i = \sum_{l=1}^{t} \gamma_{il} c_l,$$

Доведення.

Тоді із (9) випливає, що для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ справджується рівність

$$a_i = \sum_{l=1}^{t} \gamma_{il} c_l,$$

де, підкреслимо,

Доведення.

Тоді із (9) випливає, що для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ справджується рівність

$$a_i = \sum_{l=1}^{t} \gamma_{il} c_l,$$

де, підкреслимо, γ_{il} є деяким дійсним числом

Доведення.

Тоді із (9) випливає, що для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ справджується рівність

$$a_i = \sum_{l=1}^{t} \gamma_{il} c_l,$$

де, підкреслимо, γ_{il} є деяким дійсним числом для будь-яких $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$;

Доведення.

Тоді із (9) випливає, що для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ справджується рівність

$$a_i = \sum_{l=1}^{t} \gamma_{il} c_l,$$

де, підкреслимо, γ_{il} є деяким дійсним числом для будь-яких $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$.

Доведення.

Тоді із (9) випливає, що для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ справджується рівність

$$a_i = \sum_{l=1}^{t} \gamma_{il} c_l,$$

де, підкреслимо, γ_{il} є деяким дійсним числом для будь-яких $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Це у свою чергу означає, що система векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_r

Доведення.

Тоді із (9) випливає, що для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ справджується рівність

$$a_i = \sum_{l=1}^{t} \gamma_{il} c_l,$$

де, підкреслимо, γ_{il} є деяким дійсним числом для будь-яких $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Це у свою чергу означає, що система векторів a_1, a_2, ..., a_r лінійно виражається через систему векторів c_1, c_2, ..., c_t.

Доведення.

Тоді із (9) випливає, що для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$ справджується рівність

$$a_i = \sum_{l=1}^{t} \gamma_{il} c_l,$$

де, підкреслимо, γ_{il} є деяким дійсним числом для будь-яких $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $l \in \{1, 2, \ldots, t\}$. Це у свою чергу означає, що система векторів a_1, a_2, ..., a_r лінійно виражається через систему векторів c_1, c_2, ..., c_t. Теорема доведена. □

Зауваження для рівності (9)

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$

Зауваження для рівності (9)

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$ та $y_1, y_2, \ldots, y_s$

Зауваження для рівності (9)

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$ та $y_1, y_2, \ldots, y_s$ — деякі дійсні числа.

Зауваження для рівності (9)

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$ та $y_1, y_2, \ldots, y_s$ — деякі дійсні числа. Тоді

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} x_k y_l$$

Зауваження для рівності (9)

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$ та $y_1, y_2, \ldots, y_s$ — деякі дійсні числа. Тоді

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} x_k y_l = (x_1 y_1 + x_1 y_2 + \cdots + x_1 y_s)$$

Зауваження для рівності (9)

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$ та $y_1, y_2, \ldots, y_s$ — деякі дійсні числа. Тоді

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} x_k y_l = (x_1y_1 + x_1y_2 + \cdots + x_1y_s) +$$
$$+(x_2y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_2y_s)$$

Зауваження для рівності (9)

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$ та $y_1, y_2, \ldots, y_s$ — деякі дійсні числа. Тоді

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} x_k y_l = (x_1y_1 + x_1y_2 + \cdots + x_1y_s) +$$

$$+(x_2y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_2y_s) + \cdots + (x_ry_1 + x_ry_2 + \cdots + x_ry_s)$$

Зауваження для рівності (9)

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_r$ та $y_1, y_2, \dots, y_s$ — деякі дійсні числа. Тоді

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} x_k y_l = (x_1y_1 + x_1y_2 + \dots + x_1y_s) +$$

$$+(x_2y_1 + x_2y_2 + \dots + x_2y_s) + \dots + (x_ry_1 + x_ry_2 + \dots + x_ry_s) =$$

$$= x_1y_1 + x_1y_2 + \dots + x_1y_s +$$

$$+ x_2y_1 + x_2y_2 + \dots + x_2y_s + \dots + x_ry_1 + x_ry_2 + \dots + x_ry_s$$

Зауваження для рівності (9)

Нехай $x_1, x_2, \dots, x_r$ та $y_1, y_2, \dots, y_s$ — деякі дійсні числа. Тоді

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} x_k y_l = (x_1y_1 + x_1y_2 + \dots + x_1y_s) +$$
$$+(x_2y_1 + x_2y_2 + \dots + x_2y_s) + \dots + (x_ry_1 + x_ry_2 + \dots + x_ry_s) =$$
$$= x_1y_1 + x_1y_2 + \dots + x_1y_s +$$
$$+ x_2y_1 + x_2y_2 + \dots + x_2y_s + \dots + x_ry_1 + x_ry_2 + \dots + x_ry_s =$$
$$= x_1y_1 + x_2y_1 + \dots + x_ry_1$$

Зауваження для рівності (9)

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$ та $y_1, y_2, \ldots, y_s$ — деякі дійсні числа. Тоді

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} x_k y_l = (x_1y_1 + x_1y_2 + \cdots + x_1y_s) +$$

$$+(x_2y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_2y_s) + \cdots + (x_ry_1 + x_ry_2 + \cdots + x_ry_s) =$$

$$= x_1y_1 + x_1y_2 + \cdots + x_1y_s +$$

$$+ x_2y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_2y_s + \cdots + x_ry_1 + x_ry_2 + \cdots + x_ry_s =$$

$$= x_1y_1 + x_2y_1 + \cdots + x_ry_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + \cdots + x_ry_2$$

Зауваження для рівності (9)

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$ та $y_1, y_2, \ldots, y_s$ — деякі дійсні числа. Тоді

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} x_k y_l = (x_1y_1 + x_1y_2 + \cdots + x_1y_s) +$$

$$+(x_2y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_2y_s) + \cdots + (x_ry_1 + x_ry_2 + \cdots + x_ry_s) =$$

$$= x_1y_1 + x_1y_2 + \cdots + x_1y_s +$$

$$+ x_2y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_2y_s + \cdots + x_ry_1 + x_ry_2 + \cdots + x_ry_s =$$

$$= x_1y_1 + x_2y_1 + \cdots + x_ry_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + \cdots + x_ry_2 + \cdots$$

$$\cdots + x_1y_s + x_2y_s + \cdots + x_ry_s$$

Зауваження для рівності (9)

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$ та $y_1, y_2, \ldots, y_s$ — деякі дійсні числа. Тоді

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} x_k y_l = (x_1y_1 + x_1y_2 + \cdots + x_1y_s) +$$
$$+(x_2y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_2y_s) + \cdots + (x_ry_1 + x_ry_2 + \cdots + x_ry_s) =$$
$$= x_1y_1 + x_1y_2 + \cdots + x_1y_s +$$
$$+ x_2y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_2y_s + \cdots + x_ry_1 + x_ry_2 + \cdots + x_ry_s =$$
$$= x_1y_1 + x_2y_1 + \cdots + x_ry_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + \cdots + x_ry_2 + \cdots$$
$$\cdots + x_1y_s + x_2y_s + \cdots + x_ry_s =$$
$$= (x_1y_1 + x_2y_1 + \cdots + x_ry_1) + (x_1y_2 + x_2y_2 + \cdots + x_ry_2) + \cdots$$
$$\cdots + (x_1y_s + x_2y_s + \cdots + x_ry_s)$$

Зауваження для рівності (9)

Нехай $x_1, x_2, \ldots, x_r$ та $y_1, y_2, \ldots, y_s$ — деякі дійсні числа. Тоді

$$\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{s} x_k y_l = (x_1y_1 + x_1y_2 + \cdots + x_1y_s) +$$

$$+(x_2y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_2y_s) + \cdots + (x_ry_1 + x_ry_2 + \cdots + x_ry_s) =$$

$$= x_1y_1 + x_1y_2 + \cdots + x_1y_s +$$

$$+ x_2y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_2y_s + \cdots + x_ry_1 + x_ry_2 + \cdots + x_ry_s =$$

$$= x_1y_1 + x_2y_1 + \cdots + x_ry_1 + x_1y_2 + x_2y_2 + \cdots + x_ry_2 + \cdots$$

$$\cdots + x_1y_s + x_2y_s + \cdots + x_ry_s =$$

$$= (x_1y_1 + x_2y_1 + \cdots + x_ry_1) + (x_1y_2 + x_2y_2 + \cdots + x_ry_2) + \cdots$$

$$\cdots + (x_1y_s + x_2y_s + \cdots + x_ry_s) = \sum_{l=1}^{s}\sum_{k=1}^{r} x_k y_l.$$

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів*

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною*

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему.*

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи*

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи,*

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто* $r \leq s$.

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто* $r \leq s$.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто* $r \leq s$.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$a_1 = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s,$$

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \dots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто* $r \leq s$.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s, \\ a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s, \end{aligned}$$

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто* $r \leq s$.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s, \\ a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s, \\ & \quad \ldots\ldots\ldots \\ a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s \end{aligned}$$

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто* $r \leq s$.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} a_1 = &\quad \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s, \\ a_2 = &\quad \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ a_r = &\quad \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s \end{aligned}$$

для деяких дійсних чисел γ_{ik},

Теорема 11

Нехай a_1, a_2, ..., a_r *та* b_1, b_2, ..., b_s *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто* $r \leq s$*.*

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s, \\ a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s, \\ & \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s \end{aligned}$$

для деяких дійсних чисел γ_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$;

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто* $r \leq s$*.*

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned}
a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s,\\
a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s
\end{aligned}$$

для деяких дійсних чисел γ_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$.

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто* $r \leq s$.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s, \\ a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s \end{aligned}$$

для деяких дійсних чисел γ_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$.
Покажемо від протилежного,

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \dots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто* $r \leq s$.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \dots + \gamma_{1s}b_s, \\ a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \dots + \gamma_{2s}b_s, \\ &\quad \dots\dots\dots \\ a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \dots + \gamma_{rs}b_s \end{aligned}$$

для деяких дійсних чисел γ_{ik}, де $i \in \{1, 2, \dots, r\}$; $k \in \{1, 2, \dots, s\}$. Покажемо від протилежного, що $r \leq s$.

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_r$ та $b_1, b_2, \dots, b_s$ — дві системи n-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто $r \leq s$.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s, \\ a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s, \\ & \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s \end{aligned}$$

для деяких дійсних чисел γ_{ik}, де $i \in \{1, 2, \dots, r\}$; $k \in \{1, 2, \dots, s\}$. Покажемо від протилежного, що $r \leq s$. Для цього припустимо, що $r > s$.

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто* $r \leq s$.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s, \\ a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s, \\ & \ldots\ldots\ldots \\ a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s \end{aligned}$$

для деяких дійсних чисел γ_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Покажемо від протилежного, що $r \leq s$. Для цього припустимо, що $r > s$. Введемо в розгляд наступні s-вимірні вектори:

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \dots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто* $r \le s$.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s,\\
a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s,\\
&\quad \cdots\cdots\\
a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s
\end{aligned}
$$

для деяких дійсних чисел γ_{ik}, де $i \in \{1, 2, \dots, r\}$; $k \in \{1, 2, \dots, s\}$. Покажемо від протилежного, що $r \le s$. Для цього припустимо, що $r > s$. Введемо в розгляд наступні s-вимірні вектори:

$$u_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \dots, \gamma_{1s}),$$

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто* $r \leq s$.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s, \\ a_2 &= \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_r &= \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s \end{aligned}$$

для деяких дійсних чисел γ_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Покажемо від протилежного, що $r \leq s$. Для цього припустимо, що $r > s$. Введемо в розгляд наступні s-вимірні вектори:

$$u_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1s}), \quad u_2 = (\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2s}),$$

Теорема 11

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — дві системи n-вимірних векторів такі, що перша з них є лінійно незалежною і лінійно виражається через другу систему. Тоді число векторів першої системи не перевищує числа векторів другої системи, тобто $r \leq s$.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і припустимо, що

$$\begin{aligned} a_1 = &\quad \gamma_{11}b_1 + \gamma_{12}b_2 + \cdots + \gamma_{1s}b_s, \\ a_2 = &\quad \gamma_{21}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{2s}b_s, \\ &\quad \cdots\cdots\cdots \\ a_r = &\quad \gamma_{r1}b_1 + \gamma_{r2}b_2 + \cdots + \gamma_{rs}b_s \end{aligned}$$

для деяких дійсних чисел γ_{ik}, де $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$; $k \in \{1, 2, \ldots, s\}$. Покажемо від протилежного, що $r \leq s$. Для цього припустимо, що $r > s$. Введемо в розгляд наступні s-вимірні вектори:

$$u_1 = (\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1s}), \quad u_2 = (\gamma_{21}, \gamma_{22}, \ldots, \gamma_{2s}), \\ \ldots, \quad u_r = (\gamma_{r1}, \gamma_{r2}, \ldots, \gamma_{rs}).$$

Доведення.

Тоді за теоремою 8

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною,

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \dots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів,

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує,

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \dots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$,

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не всі з яких рівні нулю

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не всі з яких рівні нулю і для яких справджується рівність

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не всі з яких рівні нулю і для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = (0, \ 0, \ \ldots, \ 0)$$

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не всі з яких рівні нулю і для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^s. \qquad (10)$$

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не всі з яких рівні нулю і для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^s. \tag{10}$$

Обчислимо компоненти вектора,

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не всі з яких рівні нулю і для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^s. \tag{10}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r$$

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не всі з яких рівні нулю і для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^s. \tag{10}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r =$$
$$= \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \ldots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{2s}) +$$
$$+ \cdots + \lambda_r \cdot (\gamma_{r1},\ \gamma_{r2},\ \ldots,\ \gamma_{rs})$$

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \dots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$, не всі з яких рівні нулю і для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r = (0,\ 0,\ \dots,\ 0) \in \mathbb{R}^s. \qquad (10)$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_r u_r =$$
$$= \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \dots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \dots,\ \gamma_{2s}) +$$
$$+ \dots + \lambda_r \cdot (\gamma_{r1},\ \gamma_{r2},\ \dots,\ \gamma_{rs}) =$$
$$= (\lambda_1 \gamma_{11} + \lambda_2 \gamma_{21} + \dots + \lambda_r \gamma_{r1},$$

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не всі з яких рівні нулю і для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^s. \tag{10}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\begin{gathered}\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = \\ = \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \ldots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{2s}) + \\ + \cdots + \lambda_r \cdot (\gamma_{r1},\ \gamma_{r2},\ \ldots,\ \gamma_{rs}) = \\ = (\lambda_1\gamma_{11} + \lambda_2\gamma_{21} + \cdots + \lambda_r\gamma_{r1},\ \ldots,\end{gathered}$$

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не всі з яких рівні нулю і для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^s. \tag{10}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\begin{gathered}
\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = \\
= \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \ldots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{2s}) + \\
+ \cdots + \lambda_r \cdot (\gamma_{r1},\ \gamma_{r2},\ \ldots,\ \gamma_{rs}) = \\
= (\lambda_1 \gamma_{11} + \lambda_2 \gamma_{21} + \cdots + \lambda_r \gamma_{r1},\ \ldots, \\
\ldots,\ \lambda_1 \gamma_{1s} + \lambda_2 \gamma_{2s} + \cdots + \lambda_r \gamma_{rs}).
\end{gathered}$$

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не всі з яких рівні нулю і для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^s. \tag{10}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\begin{gathered}\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = \\ = \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \ldots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{2s}) + \\ + \cdots + \lambda_r \cdot (\gamma_{r1},\ \gamma_{r2},\ \ldots,\ \gamma_{rs}) = \\ = (\lambda_1\gamma_{11} + \lambda_2\gamma_{21} + \cdots + \lambda_r\gamma_{r1},\ \ldots, \\ \ldots,\ \lambda_1\gamma_{1s} + \lambda_2\gamma_{2s} + \cdots + \lambda_r\gamma_{rs}).\end{gathered}$$

Тому із рівності (10) одержимо

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{k1} = 0,$$

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не всі з яких рівні нулю і для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^s. \tag{10}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\begin{gathered}\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = \\ = \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \ldots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{2s}) + \\ + \cdots + \lambda_r \cdot (\gamma_{r1},\ \gamma_{r2},\ \ldots,\ \gamma_{rs}) = \\ = (\lambda_1\gamma_{11} + \lambda_2\gamma_{21} + \cdots + \lambda_r\gamma_{r1},\ \ldots, \\ \ldots,\ \lambda_1\gamma_{1s} + \lambda_2\gamma_{2s} + \cdots + \lambda_r\gamma_{rs}).\end{gathered}$$

Тому із рівності (10) одержимо

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{k2} = 0,$$

Доведення.

Тоді за теоремою 8 система векторів $u_1, u_2, \ldots, u_r$ є лінійно залежною, тому що це система із r s-вимірних векторів, а $r > s$.
Звідси слідує, що існують дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, не всі з яких рівні нулю і для яких справджується рівність

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0) \in \mathbb{R}^s. \tag{10}$$

Обчислимо компоненти вектора, що є лінійною комбінацією

$$\begin{gathered}
\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_r u_r = \\
= \lambda_1 \cdot (\gamma_{11},\ \gamma_{12},\ \ldots,\ \gamma_{1s}) + \lambda_2 \cdot (\gamma_{21},\ \gamma_{22},\ \ldots,\ \gamma_{2s}) + \\
+ \cdots + \lambda_r \cdot (\gamma_{r1},\ \gamma_{r2},\ \ldots,\ \gamma_{rs}) = \\
= (\lambda_1\gamma_{11} + \lambda_2\gamma_{21} + \cdots + \lambda_r\gamma_{r1},\ \ldots, \\
\ldots,\ \lambda_1\gamma_{1s} + \lambda_2\gamma_{2s} + \cdots + \lambda_r\gamma_{rs}).
\end{gathered}$$

Тому із рівності (10) одержимо

$$\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{k1} = 0, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{k2} = 0, \quad \ldots, \quad \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{ks} = 0. \tag{11}$$

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11),

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r$$

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k$$

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} b_l$$

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} b_l = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} b_l$$

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} b_l = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} b_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} b_l$$

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} b_l = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} b_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} b_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} \right) b_l$$

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} b_l = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} b_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} b_l =$$
$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} \right) b_l = \sum_{l=1}^{s} 0 \cdot b_l =$$

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} b_l = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} b_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} b_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} \right) b_l = \sum_{l=1}^{s} 0 \cdot b_l = \bar{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} b_l = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} b_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} b_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} \right) b_l = \sum_{l=1}^{s} 0 \cdot b_l = \bar{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Таким чином, припустивши, що $r > s$,

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} b_l = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} b_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} b_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} \right) b_l = \sum_{l=1}^{s} 0 \cdot b_l = \bar{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Таким чином, припустивши, що $r > s$, ми показали, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k =$$
$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} b_l = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} b_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} b_l =$$
$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} \right) b_l = \sum_{l=1}^{s} 0 \cdot b_l = \bar{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Таким чином, припустивши, що $r > s$, ми показали, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$ є лінійно залежною.

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} b_l = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} b_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} b_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} \right) b_l = \sum_{l=1}^{s} 0 \cdot b_l = \bar{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Таким чином, припустивши, що $r > s$, ми показали, що система векторів a_1, a_2, ..., a_r є лінійно залежною. Це суперечить умові теореми,

Доведення.

Обчислимо, врахувавши рівності (11), лінійну комбінацію

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_r a_r = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k a_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \sum_{l=1}^{s} \gamma_{kl} b_l = \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} \lambda_k \gamma_{kl} b_l = \sum_{l=1}^{s} \sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} b_l =$$

$$= \sum_{l=1}^{s} \left(\sum_{k=1}^{r} \lambda_k \gamma_{kl} \right) b_l = \sum_{l=1}^{s} 0 \cdot b_l = \bar{0} \in \mathbb{R}^n.$$

Таким чином, припустивши, що $r > s$, ми показали, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$ є лінійно залежною. Це суперечить умові теореми, а тому $r \leq s$, що завершує доведення теореми. $\square$

Із теореми 11 одразу випливають наступні дві теореми.

Із теореми 11 одразу випливають наступні дві теореми.

Теорема 12

Будь-які дві еквівалентні

Із теореми 11 одразу випливають наступні дві теореми.

Теорема 12

Будь-які дві еквівалентні лінійно незалежні

Із теореми 11 одразу випливають наступні дві теореми.

Теорема 12

Будь-які дві еквівалентні лінійно незалежні системи n-вимірних векторів складаються із однакового числа векторів.

Із теореми 11 одразу випливають наступні дві теореми.

Теорема 12

Будь-які дві еквівалентні лінійно незалежні системи n-вимірних векторів складаються із однакового числа векторів.

Теорема 13

Будь-який базис n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$

Із теореми 11 одразу випливають наступні дві теореми.

Теорема 12

Будь-які дві еквівалентні лінійно незалежні системи n-вимірних векторів складаються із однакового числа векторів.

Теорема 13

Будь-який базис n-вимірного векторного простору $\mathbb{R}^n$ складається з n векторів.

Означення 16

Базисом системи n-вимірних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$

Означення 16

Базисом системи n-вимірних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ називається така її лінійно незалежна підсистема,

Означення 16

Базисом системи n-вимірних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ називається така її лінійно незалежна підсистема, що кожен вектор системи $a_1, a_2, \ldots, a_s$

Означення 16

Базисом системи n-вимірних векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ називається така її лінійно незалежна підсистема, що кожен вектор системи $a_1, a_2, \dots, a_s$ є лінійною комбінацією векторів цієї підсистеми.

Означення 16

Базисом системи n-вимірних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ називається така її лінійно незалежна підсистема, що кожен вектор системи $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійною комбінацією векторів цієї підсистеми.

Означення 17

Число векторів базису системи векторів

Означення 16

Базисом системи n-вимірних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ називається така її лінійно незалежна підсистема, що кожен вектор системи $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійною комбінацією векторів цієї підсистеми.

Означення 17

Число векторів базису системи векторів називається рангом цієї системи.

Означення 16

Базисом системи n-вимірних векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$ називається така її лінійно незалежна підсистема, що кожен вектор системи $a_1, a_2, \dots, a_s$ є лінійною комбінацією векторів цієї підсистеми.

Означення 17

Число векторів базису системи векторів називається рангом цієї системи.

Теорема 14

Будь-які два базиси системи n-вимірних векторів

Означення 16

Базисом системи n-вимірних векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ називається така її лінійно незалежна підсистема, що кожен вектор системи $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійною комбінацією векторів цієї підсистеми.

Означення 17

Число векторів базису системи векторів називається рангом цієї системи.

Теорема 14

Будь-які два базиси системи n-вимірних векторів складаються із однакового числа векторів.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — довільна система n-вимірних векторів,

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — довільна система n-вимірних векторів, а

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_r} \quad \text{та} \quad a_{j_1}, a_{j_2}, \dots, a_{j_q}$$

— деякі два базиси цієї системи векторів.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — довільна система n-вимірних векторів, а

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \quad \text{та} \quad a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$$

— деякі два базиси цієї системи векторів. За означенням базису системи векторів будь-який вектор першого базису є лінійною комбінацією векторів другого базису,

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — довільна система n-вимірних векторів, а

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \quad \text{та} \quad a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$$

— деякі два базиси цієї системи векторів. За означенням базису системи векторів будь-який вектор першого базису є лінійною комбінацією векторів другого базису, а, отже, перший базис лінійно виражається через вектори другого базису.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — довільна система n-вимірних векторів, а

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \quad \text{та} \quad a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$$

— деякі два базиси цієї системи векторів. За означенням базису системи векторів будь-який вектор першого базису є лінійною комбінацією векторів другого базису, а, отже, перший базис лінійно виражається через вектори другого базису. Оскільки система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, як базис, є лінійно незалежною системою,

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — довільна система n-вимірних векторів, а

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \quad \text{та} \quad a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$$

— деякі два базиси цієї системи векторів. За означенням базису системи векторів будь-який вектор першого базису є лінійною комбінацією векторів другого базису, а, отже, перший базис лінійно виражається через вектори другого базису. Оскільки система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, як базис, є лінійно незалежною системою, то за теоремою 11 кількість векторів у системі $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ не перевищує кількості векторів у системі $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$,

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — довільна система n-вимірних векторів, а

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \quad \text{та} \quad a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$$

— деякі два базиси цієї системи векторів. За означенням базису системи векторів будь-який вектор першого базису є лінійною комбінацією векторів другого базису, а, отже, перший базис лінійно виражається через вектори другого базису. Оскільки система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, як базис, є лінійно незалежною системою, то за теоремою 11 кількість векторів у системі $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ не перевищує кількості векторів у системі $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$, тобто $r \leq q$.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — довільна система n-вимірних векторів, а

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \quad \text{та} \quad a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$$

— деякі два базиси цієї системи векторів. За означенням базису системи векторів будь-який вектор першого базису є лінійною комбінацією векторів другого базису, а, отже, перший базис лінійно виражається через вектори другого базису. Оскільки система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, як базис, є лінійно незалежною системою, то за теоремою 11 кількість векторів у системі $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ не перевищує кількості векторів у системі $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$, тобто $r \leq q$.
Аналогічно доводиться, що $q \leq r$.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — довільна система n-вимірних векторів, а

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \quad \text{та} \quad a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$$

— деякі два базиси цієї системи векторів. За означенням базису системи векторів будь-який вектор першого базису є лінійною комбінацією векторів другого базису, а, отже, перший базис лінійно виражається через вектори другого базису. Оскільки система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, як базис, є лінійно незалежною системою, то за теоремою 11 кількість векторів у системі $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ не перевищує кількості векторів у системі $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$, тобто $r \leq q$.
Аналогічно доводиться, що $q \leq r$. Очевидно, таке можливе лише при умові, що $q = r$.

Доведення.

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — довільна система n-вимірних векторів, а

$$a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r} \quad \text{та} \quad a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$$

— деякі два базиси цієї системи векторів. За означенням базису системи векторів будь-який вектор першого базису є лінійною комбінацією векторів другого базису, а, отже, перший базис лінійно виражається через вектори другого базису. Оскільки система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$, як базис, є лінійно незалежною системою, то за теоремою 11 кількість векторів у системі $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_r}$ не перевищує кількості векторів у системі $a_{j_1}, a_{j_2}, \ldots, a_{j_q}$, тобто $r \leq q$.
Аналогічно доводиться, що $q \leq r$. Очевидно, таке можливе лише при умові, що $q = r$. Теорема доведена. □

Теорема 15

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу* k*, а другої — числу* l*.*

Теорема 15

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу* k*, а другої — числу* l*. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу,*

Теорема 15

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу* k*, а другої — числу* l*. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу, то* $k \leq l$*.*

Теорема 15

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу* k*, а другої — числу* l*. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу, то* $k \leq l$*. Якщо ж ці системи еквівалентні, тоді* $k = l$*.*

Теорема 15

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу* k*, а другої — числу* l*. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу, то* $k \le l$*. Якщо ж ці системи еквівалентні, тоді* $k = l$*.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

Теорема 15

Нехай $a_1, a_2, \dots, a_r$ та $b_1, b_2, \dots, b_s$ — дві системи n-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу k, а другої — числу l. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу, то $k \leq l$. Якщо ж ці системи еквівалентні, тоді $k = l$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.Розглянемо довільні базиси a_{i_1}, $a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ та $b_{j_1}, b_{j_2}, \dots, b_{j_l}$ відповідно систем векторів $a_1, a_2, \dots, a_r$ та $b_1, b_2, \dots, b_s$.

Теорема 15

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу* k*, а другої — числу* l*. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу, то* $k \leq l$*. Якщо ж ці системи еквівалентні, тоді* $k = l$*.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.Розглянемо довільні базиси a_{i_1}, $a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ та $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_l}$ відповідно систем векторів $a_1, a_2, \ldots,$ a_r та $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Очевидно, система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ лінійно виражається через систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$,

Теорема 15

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу* k*, а другої — числу* l*. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу, то* $k \leq l$*. Якщо ж ці системи еквівалентні, тоді* $k = l$*.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.Розглянемо довільні базиси a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k} та b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{j_l} відповідно систем векторів a_1, $a_2, \ldots$, a_r та b_1, b_2, ..., b_s. Очевидно, система векторів a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k} лінійно виражається через систему векторів a_1, $a_2, \ldots$, a_r, а система векторів b_1, b_2, ..., b_s — через систему векторів b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{l_l}.

Теорема 15

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу* k*, а другої — числу* l*. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу, то* $k \leq l$*. Якщо ж ці системи еквівалентні, тоді* $k = l$*.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.Розглянемо довільні базиси a_{i_1}, $a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ та $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_l}$ відповідно систем векторів $a_1, a_2, \ldots,$ a_r та $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Очевидно, система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ лінійно виражається через систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$, а система векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — через систему векторів $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{l_l}$. Оскільки система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$ лінійно виражається через систему b_1, $b_2, \ldots, b_s$,

Теорема 15

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу* k*, а другої — числу* l*. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу, то* $k \leq l$*. Якщо ж ці системи еквівалентні, тоді* $k = l$*.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.Розглянемо довільні базиси a_{i_1}, a_{i_2}, $\ldots$, a_{i_k} та b_{j_1}, b_{j_2}, $\ldots$, b_{j_l} відповідно систем векторів a_1, $a_2, \ldots$, a_r та b_1, b_2, $\ldots$, b_s. Очевидно, система векторів a_{i_1}, a_{i_2}, $\ldots$, a_{i_k} лінійно виражається через систему векторів a_1, $a_2, \ldots$, a_r, а система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_s — через систему векторів b_{j_1}, b_{j_2}, $\ldots$, b_{l_l}. Оскільки система векторів a_1, $a_2, \ldots$, a_r лінійно виражається через систему b_1, b_2, $\ldots$, b_s,то за теоремою 10 система векторів a_{i_1}, a_{i_2}, $\ldots$, a_{i_k} лінійно виражається через систему векторів b_{j_1}, b_{j_2}, $\ldots$, b_{j_l}.

Теорема 15

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу* k*, а другої — числу* l*. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу, то* $k \leq l$*. Якщо ж ці системи еквівалентні, тоді* $k = l$*.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.Розглянемо довільні базиси a_{i_1}, $a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ та $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_l}$ відповідно систем векторів $a_1, a_2, \ldots,$ a_r та $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Очевидно, система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ лінійно виражається через систему векторів a_1, $a_2, \ldots, a_r$, а система векторів b_1, $b_2, \ldots, b_s$ — через систему векторів $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{l_l}$. Оскільки система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$ лінійно виражається через систему b_1, $b_2, \ldots, b_s$,то за теоремою 10 система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ лінійно виражається через систему векторів $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_l}$. Враховуючи тепер, що система $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, як базис, є лінійно незалежною системою,

Теорема 15

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу* k*, а другої — числу* l*. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу, то* $k \leq l$*. Якщо ж ці системи еквівалентні, тоді* $k = l$*.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.Розглянемо довільні базиси a_{i_1}, $a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ та $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_l}$ відповідно систем векторів $a_1, a_2, \ldots,$ a_r та $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Очевидно, система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ лінійно виражається через систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$, а система векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — через систему векторів $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{l_l}$. Оскільки система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$ лінійно виражається через систему b_1, $b_2, \ldots, b_s$,то за теоремою 10 система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ лінійно виражається через систему векторів $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_l}$. Враховуючи тепер, що система $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, як базис, є лінійно незалежною системою, одержимо, що $k \leq l$.

Теорема 15

Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_r$ *та* $b_1, b_2, \ldots, b_s$ *— дві системи* n*-вимірних векторів, причому ранг першої системи дорівнює числу* k*, а другої — числу* l*. Якщо перша система векторів лінійно виражається через другу, то* $k \leq l$*. Якщо ж ці системи еквівалентні, тоді* $k = l$*.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.Розглянемо довільні базиси a_{i_1}, $a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ та $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_l}$ відповідно систем векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$ та $b_1, b_2, \ldots, b_s$. Очевидно, система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ лінійно виражається через систему векторів a_1, $a_2, \ldots, a_r$, а система векторів $b_1, b_2, \ldots, b_s$ — через систему векторів $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{l_l}$. Оскільки система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_r$ лінійно виражається через систему b_1, $b_2, \ldots, b_s$,то за теоремою 10 система векторів $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ лінійно виражається через систему векторів $b_{j_1}, b_{j_2}, \ldots, b_{j_l}$. Враховуючи тепер, що система $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$, як базис, є лінійно незалежною системою, одержимо, що $k \leq l$.

Друге твердження теореми є очевидним наслідком вже доведеної першої частини цієї теореми. □

Приклад 1

Визначити, чи є лінійно залежною система векторів:

$$a_1 = (2,\ -3,\ 1), \quad a_2 = (3,\ -1,\ 5), \quad a_3 = (1,\ -4,\ 3).$$

Приклад 1

Визначити, чи є лінійно залежною система векторів:

$$a_1 = (2,\ -3,\ 1), \quad a_2 = (3,\ -1,\ 5), \quad a_3 = (1,\ -4,\ 3).$$

Розв'язання. Нехай γ_1, γ_2, γ_3 — деякі дійсні числа. Розглянемо лінійну комбінацію

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3$$

Приклад 1

Визначити, чи є лінійно залежною система векторів:

$$a_1 = (2,\ -3,\ 1), \quad a_2 = (3,\ -1,\ 5), \quad a_3 = (1,\ -4,\ 3).$$

Розв'язання. Нехай $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3$ — деякі дійсні числа. Розглянемо лінійну комбінацію

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 =$$
$$= \gamma_1 \cdot (2,\ -3,\ 1) + \gamma_2 \cdot (3,\ -1,\ 5) + \gamma_3 \cdot (1,\ -4,\ 3)$$

Приклад 1

Визначити, чи є лінійно залежною система векторів:

$$a_1 = (2,\ -3,\ 1), \quad a_2 = (3,\ -1,\ 5), \quad a_3 = (1,\ -4,\ 3).$$

Розв'язання. Нехай γ_1, γ_2, γ_3 — деякі дійсні числа. Розглянемо лінійну комбінацію

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 =$$
$$= \gamma_1 \cdot (2,\ -3,\ 1) + \gamma_2 \cdot (3,\ -1,\ 5) + \gamma_3 \cdot (1,\ -4,\ 3) =$$
$$= (2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3,$$

Приклад 1

Визначити, чи є лінійно залежною система векторів:

$$a_1 = (2,\ -3,\ 1), \quad a_2 = (3,\ -1,\ 5), \quad a_3 = (1,\ -4,\ 3).$$

Розв'язання. Нехай γ_1, γ_2, γ_3 — деякі дійсні числа. Розглянемо лінійну комбінацію

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 =$$
$$= \gamma_1 \cdot (2,\ -3,\ 1) + \gamma_2 \cdot (3,\ -1,\ 5) + \gamma_3 \cdot (1,\ -4,\ 3) =$$
$$= (2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3,\ \ -3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3,$$

Приклад 1

Визначити, чи є лінійно залежною система векторів:

$$a_1 = (2,\ -3,\ 1), \quad a_2 = (3,\ -1,\ 5), \quad a_3 = (1,\ -4,\ 3).$$

Розв'язання. Нехай γ_1, γ_2, γ_3 — деякі дійсні числа. Розглянемо лінійну комбінацію

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 =$$
$$= \gamma_1 \cdot (2,\ -3,\ 1) + \gamma_2 \cdot (3,\ -1,\ 5) + \gamma_3 \cdot (1,\ -4,\ 3) =$$
$$= (2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3,\ \ -3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3,\ \gamma_1 + 5\gamma_2 + 3\gamma_3).$$

Приклад 1

Визначити, чи є лінійно залежною система векторів:

$$a_1 = (2,\ -3,\ 1), \quad a_2 = (3,\ -1,\ 5), \quad a_3 = (1,\ -4,\ 3).$$

Розв'язання. Нехай γ_1, γ_2, γ_3 — деякі дійсні числа. Розглянемо лінійну комбінацію

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 =$$
$$= \gamma_1 \cdot (2,\ -3,\ 1) + \gamma_2 \cdot (3,\ -1,\ 5) + \gamma_3 \cdot (1,\ -4,\ 3) =$$
$$= (2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3,\ \ -3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3,\ \gamma_1 + 5\gamma_2 + 3\gamma_3).$$

Ця лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді,

Приклад 1

Визначити, чи є лінійно залежною система векторів:

$$a_1 = (2,\ -3,\ 1),\quad a_2 = (3,\ -1,\ 5),\quad a_3 = (1,\ -4,\ 3).$$

Розв'язання. Нехай γ_1, γ_2, γ_3 — деякі дійсні числа. Розглянемо лінійну комбінацію

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 =$$
$$= \gamma_1 \cdot (2,\ -3,\ 1) + \gamma_2 \cdot (3,\ -1,\ 5) + \gamma_3 \cdot (1,\ -4,\ 3) =$$
$$= (2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3,\ -3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3,\ \gamma_1 + 5\gamma_2 + 3\gamma_3).$$

Ця лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли справджуються рівності

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\gamma_1 & + & 3\gamma_2 & + & \gamma_3 & = & 0, \\ -3\gamma_1 & - & \gamma_2 & - & 4\gamma_3 & = & 0, \\ \gamma_1 & + & 5\gamma_2 & + & 3\gamma_3 & = & 0, \end{array}$$

Приклад 1

Визначити, чи є лінійно залежною система векторів:

$$a_1 = (2,\ -3,\ 1), \quad a_2 = (3,\ -1,\ 5), \quad a_3 = (1,\ -4,\ 3).$$

Розв'язання. Нехай γ_1, γ_2, γ_3 — деякі дійсні числа. Розглянемо лінійну комбінацію

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 =$$
$$= \gamma_1 \cdot (2,\ -3,\ 1) + \gamma_2 \cdot (3,\ -1,\ 5) + \gamma_3 \cdot (1,\ -4,\ 3) =$$
$$= (2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3,\ -3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3,\ \gamma_1 + 5\gamma_2 + 3\gamma_3).$$

Ця лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли справджуються рівності

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\gamma_1 & + & 3\gamma_2 & + & \gamma_3 & = & 0, \\ -3\gamma_1 & - & \gamma_2 & - & 4\gamma_3 & = & 0, \\ \gamma_1 & + & 5\gamma_2 & + & 3\gamma_3 & = & 0, \end{array}$$

тобто система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною тоді і тільки тоді,

Приклад 1

Визначити, чи є лінійно залежною система векторів:

$$a_1 = (2,\ -3,\ 1), \quad a_2 = (3,\ -1,\ 5), \quad a_3 = (1,\ -4,\ 3).$$

Розв'язання. Нехай γ_1, γ_2, γ_3 — деякі дійсні числа. Розглянемо лінійну комбінацію

$$\begin{gathered}\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \gamma_3 a_3 = \\ = \gamma_1 \cdot (2,\ -3,\ 1) + \gamma_2 \cdot (3,\ -1,\ 5) + \gamma_3 \cdot (1,\ -4,\ 3) = \\ = (2\gamma_1 + 3\gamma_2 + \gamma_3,\ -3\gamma_1 - \gamma_2 - 4\gamma_3,\ \gamma_1 + 5\gamma_2 + 3\gamma_3).\end{gathered}$$

Ця лінійна комбінація дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли справджуються рівності

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\gamma_1 & + & 3\gamma_2 & + & \gamma_3 & = & 0, \\ -3\gamma_1 & - & \gamma_2 & - & 4\gamma_3 & = & 0, \\ \gamma_1 & + & 5\gamma_2 & + & 3\gamma_3 & = & 0, \end{array}$$

тобто система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли система лінійних однорідних рівнянь з матрицею, стовпці якої співпадають відповідно з векторами a_1, a_2, a_3, має ненульовий розв'язок.

Приклад 1

Розв'яжемо цю систему лінійних рівнянь:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

Приклад 1

Розв'яжемо цю систему лінійних рівнянь:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 14 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

Приклад 1

Розв'яжемо цю систему лінійних рівнянь:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 14 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Приклад 1

Розв'яжемо цю систему лінійних рівнянь:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & -4 & 0 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 14 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & -7 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{array}\right).$$

Таким чином, ця система лінійних однорідних рівнянь має лише нульовий розв'язок, а тому задана в умові система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно незалежною.

Приклад 2

Довести, що система n-вимірних векторів, що містить два однакових вектора є лінійно залежною.

Розв'язання. Нехай задано деяку систему n-вимірних векторів, що містить два однакові вектори

$$\ldots, \quad a, \quad \ldots, \quad a, \quad \ldots$$

Розглянемо підсистему, вказаної в умові системи векторів, яка складається із цих двох однакових векторів: a, a.

Приклад 2

Довести, що система n-вимірних векторів, що містить два однакових вектора є лінійно залежною.

Розв'язання. Нехай задано деяку систему n-вимірних векторів, що містить два однакові вектори

$$\ldots,\quad a,\quad \ldots,\quad a,\quad \ldots$$

Розглянемо підсистему, вказаної в умові системи векторів, яка складається із цих двох однакових векторів: a, a. Ця підсистема є лінійно залежною,

Приклад 2

Довести, що система n-вимірних векторів, що містить два однакових вектора є лінійно залежною.

Розв'язання. Нехай задано деяку систему n-вимірних векторів, що містить два однакові вектори

$$\ldots, \quad {\color{red}a}, \quad \ldots, \quad {\color{red}a}, \quad \ldots$$

Розглянемо підсистему, вказаної в умові системи векторів, яка складається із цих двох однакових векторів: a, a. Ця підсистема є лінійно залежною, оскільки для ненульових чисел 1, -1 лінійна комбінація векторів a, a дорівнює нульовому вектору,

Приклад 2

Довести, що система n-вимірних векторів, що містить два однакових вектора є лінійно залежною.

Розв'язання. Нехай задано деяку систему n-вимірних векторів, що містить два однакові вектори

$$\ldots, \quad a, \quad \ldots, \quad a, \quad \ldots$$

Розглянемо підсистему, вказаної в умові системи векторів, яка складається із цих двох однакових векторів: a, a. Ця підсистема є лінійно залежною, оскільки для ненульових чисел 1, -1 лінійна комбінація векторів a, a дорівнює нульовому вектору, тобто $1 \cdot a + (-1) \cdot a = \bar{0}$.

Приклад 2

Довести, що система n-вимірних векторів, що містить два однакових вектора є лінійно залежною.

Розв'язання. Нехай задано деяку систему n-вимірних векторів, що містить два однакові вектори

$$\dots, \quad a, \quad \dots, \quad a, \quad \dots$$

Розглянемо підсистему, вказаної в умові системи векторів, яка складається із цих двох однакових векторів: a, a. Ця підсистема є лінійно залежною, оскільки для ненульових чисел 1, -1 лінійна комбінація векторів a, a дорівнює нульовому вектору, тобто $1 \cdot a + (-1) \cdot a = \bar{0}$. Тоді із теореми 6 випливає, що і вся, вказана в умові система векторів, є лінійно залежною.

Приклад 3

Знайти всі базиси системи векторів:

$$a_1 = (1, 2, 0, 0), \quad a_2 = (1, 2, 3, 4), \quad a_3 = (3, 6, 0, 0).$$

Приклад 3

Знайти всі базиси системи векторів:

$$a_1 = (1, 2, 0, 0), \quad a_2 = (1, 2, 3, 4), \quad a_3 = (3, 6, 0, 0).$$

Розв'язання. Вектор a_3 пропорційний вектору a_1, бо $a_3 = 3a_1$.

Приклад 3

Знайти всі базиси системи векторів:

$$a_1 = (1, 2, 0, 0), \quad a_2 = (1, 2, 3, 4), \quad a_3 = (3, 6, 0, 0).$$

Розв'язання. Вектор a_3 пропорційний вектору a_1, бо $a_3 = 3a_1$. Тому система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною.

Приклад 3

Знайти всі базиси системи векторів:

$$a_1 = (1, 2, 0, 0), \quad a_2 = (1, 2, 3, 4), \quad a_3 = (3, 6, 0, 0).$$

Розв'язання. Вектор a_3 пропорційний вектору a_1, бо $a_3 = 3a_1$. Тому система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною. Отже ранг цієї системи менше трьох.

Приклад 3

Знайти всі базиси системи векторів:

$$a_1 = (1, 2, 0, 0), \quad a_2 = (1, 2, 3, 4), \quad a_3 = (3, 6, 0, 0).$$

Розв'язання. Вектор a_3 пропорційний вектору a_1, бо $a_3 = 3a_1$. Тому система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною. Отже ранг цієї системи менше трьох.

Розглянемо підсистему векторів a_1, a_2. Очевидно, лінійна комбінація цих векторів

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 = (\gamma_1 + \gamma_2, 2\gamma_1 + 2\gamma_2, 3\gamma_2, 4\gamma_2)$$

Приклад 3

Знайти всі базиси системи векторів:

$$a_1 = (1, 2, 0, 0), \quad a_2 = (1, 2, 3, 4), \quad a_3 = (3, 6, 0, 0).$$

Розв'язання. Вектор a_3 пропорційний вектору a_1, бо $a_3 = 3a_1$. Тому система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною. Отже ранг цієї системи менше трьох.

Розглянемо підсистему векторів a_1, a_2. Очевидно, лінійна комбінація цих векторів

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 = (\gamma_1 + \gamma_2, 2\gamma_1 + 2\gamma_2, 3\gamma_2, 4\gamma_2)$$

дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Приклад 3

Знайти всі базиси системи векторів:

$$a_1 = (1, 2, 0, 0), \quad a_2 = (1, 2, 3, 4), \quad a_3 = (3, 6, 0, 0).$$

Розв'язання. Вектор a_3 пропорційний вектору a_1, бо $a_3 = 3a_1$. Тому система векторів a_1, a_2, a_3 є лінійно залежною. Отже ранг цієї системи менше трьох.
Розглянемо підсистему векторів a_1, a_2. Очевидно, лінійна комбінація цих векторів

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 = (\gamma_1 + \gamma_2, 2\gamma_1 + 2\gamma_2, 3\gamma_2, 4\gamma_2)$$

дорівнює нульовому вектору тоді і тільки тоді, коли $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$. Отже, підсистема векторів a_1, a_2 є лінійно незалежною.

Приклад 3

Причому кожен із векторів a_1, a_2, a_3 лінійно виражається через вектори цієї підсистеми:

Приклад 3

Причому кожен із векторів a_1, a_2, a_3 лінійно виражається через вектори цієї підсистеми:

$$a_1 = \quad 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2,$$

Приклад 3

Причому кожен із векторів a_1, a_2, a_3 лінійно виражається через вектори цієї підсистеми:

$$
\begin{aligned}
a_1 = &\quad 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2, \\
a_2 = &\quad 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2,
\end{aligned}
$$

Приклад 3

Причому кожен із векторів a_1, a_2, a_3 лінійно виражається через вектори цієї підсистеми:

$$\begin{aligned} a_1 &= \quad 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2, \\ a_2 &= \quad 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2, \\ a_3 &= \quad 3 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2. \end{aligned}$$

Приклад 3

Причому кожен із векторів a_1, a_2, a_3 лінійно виражається через вектори цієї підсистеми:

$$\begin{aligned} a_1 &= \quad 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2, \\ a_2 &= \quad 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2, \\ a_3 &= \quad 3 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що підсистема a_1, a_2 є базисом системи a_1, a_2, a_3.

Приклад 3

Причому кожен із векторів a_1, a_2, a_3 лінійно виражається через вектори цієї підсистеми:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2, \\ a_2 &= 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2, \\ a_3 &= 3 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що підсистема a_1, a_2 є базисом системи a_1, a_2, a_3. Отже, ранг цієї системи дорівнює двом.

Приклад 3

Причому кожен із векторів a_1, a_2, a_3 лінійно виражається через вектори цієї підсистеми:

$$\begin{aligned} a_1 &= \quad 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2, \\ a_2 &= \quad 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2, \\ a_3 &= \quad 3 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що підсистема a_1, a_2 є базисом системи a_1, a_2, a_3. Отже, ранг цієї системи дорівнює двом.
Тому для знаходження всіх базисів системи a_1, a_2, a_3 залишилось перевірити чи будуть базисами наступні дві її підсистеми:

Приклад 3

Причому кожен із векторів a_1, a_2, a_3 лінійно виражається через вектори цієї підсистеми:

$$\begin{aligned} a_1 &= \quad 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2, \\ a_2 &= \quad 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2, \\ a_3 &= \quad 3 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що підсистема a_1, a_2 є базисом системи a_1, a_2, a_3. Отже, ранг цієї системи дорівнює двом.
Тому для знаходження всіх базисів системи a_1, a_2, a_3 залишилось перевірити чи будуть базисами наступні дві її підсистеми: a_1, a_3

Приклад 3

Причому кожен із векторів a_1, a_2, a_3 лінійно виражається через вектори цієї підсистеми:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2, \\ a_2 &= 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2, \\ a_3 &= 3 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що підсистема a_1, a_2 є базисом системи a_1, a_2, a_3. Отже, ранг цієї системи дорівнює двом.
Тому для знаходження всіх базисів системи a_1, a_2, a_3 залишилось перевірити чи будуть базисами наступні дві її підсистеми: a_1, a_3 та a_2, a_3.

Приклад 3

Причому кожен із векторів a_1, a_2, a_3 лінійно виражається через вектори цієї підсистеми:

$$
\begin{aligned}
a_1 &= \quad 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2, \\
a_2 &= \quad 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2, \\
a_3 &= \quad 3 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2.
\end{aligned}
$$

Звідси випливає, що підсистема a_1, a_2 є базисом системи a_1, a_2, a_3. Отже, ранг цієї системи дорівнює двом.
Тому для знаходження всіх базисів системи a_1, a_2, a_3 залишилось перевірити чи будуть базисами наступні дві її підсистеми: a_1, a_3 та a_2, a_3. Перша, очевидно, є лінійно залежною.

Приклад 3

Причому кожен із векторів a_1, a_2, a_3 лінійно виражається через вектори цієї підсистеми:

$$\begin{aligned} a_1 &= \quad 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2, \\ a_2 &= \quad 0 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2, \\ a_3 &= \quad 3 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що підсистема a_1, a_2 є базисом системи a_1, a_2, a_3.
Отже, ранг цієї системи дорівнює двом.
Тому для знаходження всіх базисів системи a_1, a_2, a_3 залишилось перевірити чи будуть базисами наступні дві її підсистеми: a_1, a_3 та a_2, a_3. Перша, очевидно, є лінійно залежною. А друга, як неважко показати, є базисом.