УДК 681.32:519.92

**Ф. Э. ГЕЧЕ, А. В. АНУФРИЕВ**

# ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ В ПОРОГОВОМ БАЗИСЕ

Разработка приемлемых методов обработки и решения задачи $Z$ [1] для дискретных двумерных изображений является актуальной и практически важной задачей. Как известно [2—4], выбор базиса представления изображений — весьма важный этап при их обработке и формировании признаков для задачи $Z$. В данной работе предложен метод представления двумерных дискретных изображений в пороговом базисе (пороговое представление), допускающий эффективное кодирование фрагментов изображений, и решается задача классификации в этом базисе. Описаны инварианты порогового представления дискретных двумерных изображений, размеров $2^r \times 2^s$, относительно преобразований, порожденных симметрической группой $S_n$ $(n = r + s)$ и абелевой группой типа $(2) \times \ldots \times (2)$ — $n$ раз. Построены функционалы $\mu^*$ — «сходства», $\mu_*$ — «различия» $p$-фрагментов изображений, и с учетом их свойств принимается решение о принадлежности предъявленного изображения $S$ к одному из классов эталонов $K_1, \ldots, K_l$.

## 1. НЕКОТОРЫЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть $Z_2 = \{0, 1\}$ и $Z_2^n$ — $n$-я декартова степень множества $Z_2$. Определим на $Z_2^n$ отношение толерантности $\tau$:

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\, \tau\, (\beta_1, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow \exists i\, (\alpha_i = \beta_i).$$

Максимальное подмножество $N \subset Z_2^n$, элементы которого попарно толерантны, называется классом толерантности. Множество, состоящее из всех классов толерантности относительно $\tau$, обозначим $M_\tau$. Составим всевозможные матрицы, строками которых будут $n$-мерные булевы векторы, являющиеся элементами класса толерантности $N \in M_\tau$, т. е. $N \to N_\xi$ — матрица, нумерация строк в которой определяется элементом $\xi$ симметрической группы $S_m$, $m = |N|$ — мощность класса $N$. Пусть

$$S(N) = \bigcup_{\xi \in S_m} N_\xi, \qquad M = \bigcup_{N \in M_\tau} S(N)$$

и $\Omega_n$ — множество всех $n$-мерных вещественных векторов $\mathbf{w}$ таких, что для всех различных $X_1$, $X_2 \in Z_2^n X_1 \cdot \mathbf{w}^T \neq X_2 \cdot \mathbf{w}^T$, $T$, $\cdot$ — соответственно символы транспонирования матриц и матричного умножения. В [5] показано, что если $N = (\alpha_{ij}) \in M$, $N^* = (\alpha_{sj})$, $s = 2^{n-1} - i + 1$, $\alpha_{sj} = \bar{\alpha}_{ij}$, — булево отрицание $\alpha_{ij}$ ($|N| = 2^{n-1}$), то для любого $\mathbf{w} \in \Omega_n$ можно указать такую матрицу $L_\mathbf{w} \in M$, котор[ая] удовлетворяет условию

$$\begin{pmatrix} L_\mathbf{w} \\ L_\mathbf{w}^* \end{pmatrix} \cdot \mathbf{w}^T = \mathbf{c}_\mathbf{w}^T, \qquad (1.$$

где $\mathbf{c}_\mathbf{w} = (c_1, \ldots, c_t)$, $t = 2^n$, $c_1 > c_2 > \ldots > c_t$. Вв[е]дем обозначение $E_n = \bigcup_{\mathbf{w} \in \Omega_n} L_\mathbf{w} \subset M$, где матриц[а] $L_\mathbf{w}$ удовлетворяет (1.1).

Предматрицей толерантности $L'$ называется мат[]рица, строками которой являются первые по порядку $q$ строк матрицы толерантности $L \in M$, [и] пишем $L' = L(q)$ или $L' \lhd L$. Множество всех предматриц матрицы толерантности $L \in M$ обозначим $\langle L \rangle$ и $\langle E_n \rangle = \bigcup_{L \in E_n} \langle L \rangle$.

Определим действия элементов $\mathbf{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \in Z_2^n$ и $\sigma \in S_n$ на множество $A \subseteq Z_2^n$ и на $n+1$-мерный действительный вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$ так:

$$\mathbf{b}A = \{(\beta_1 \oplus \alpha_1, \ldots, \beta_n \oplus \alpha_n) \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A\},$$

$$A^\sigma = \{(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}) \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A\},$$

$$\mathbf{bw} = ((-1)^{\beta_1}\omega_1, \ldots, (-1)^{\beta_n}\omega_n; \omega_0^\mathbf{b}),$$

$$\mathbf{w}^\sigma = (\omega_{\sigma(1)}, \ldots, \omega_{\sigma(n)}; \omega_0),$$

где $\oplus$ — сумма по $\bmod 2$, $\omega_0^\mathbf{b} = \omega_0 - \sum_{i \in I(\mathbf{b})} \omega_i$, $I(\mathbf{b}) = \{i \mid \beta_i = 1\}$. Всюду в дальнейшем примем, что если $A \subseteq Z_2^n$, то $(A)$ — матрица, строками которой являются элементы $A$ и $(\mathbf{b}A) = \mathbf{b}(A)$, $(A^\sigma) = (A)^\sigma$. Если $\Omega_n' = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n \mid 0 > \omega_1 > \ldots > \omega_n\}$, $L_\mathbf{w}$ — матрица, удовлетворяющая условию (1.1), и $E_n' = \bigcup_{\mathbf{w} \in \Omega_n'} \{L_\mathbf{w}\}$, то в [5] показано, что

$$E_n = \{(\mathbf{g}L)^\sigma \mid L \in E_n', \ \mathbf{g} \in Z_2^n, \ \sigma \in S_n\},$$

а это влечет

$$\langle E_n \rangle = \{(\mathbf{g}L)^\sigma \mid L \in \langle E_n' \rangle, \ \mathbf{g} \in Z_2^n, \ \sigma \in S_n\}.$$

Рассмотрим множество матриц толерантности

$$L_1 = (0_1), \quad L_2 = \begin{pmatrix} L_1 & 0_1 \\ L_1^* & 0_1 \end{pmatrix}, \ldots, L_n = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0_{n-1} \\ L_{n-1}^* & 0_{n-1} \end{pmatrix},$$

где $0_t$ — нулевой столбец длины $2^{t-1}$. Определим над предматрицами толерантности $(L_i^*(q_i)\underbrace{0 \ldots 0}_{n-i})$,

$(L_i^* (q_i) \underbrace{0 \dots 0}_{n-i})$ операцию $\square$ так:

$$(L_i^* (q_i) 0 \dots 0) \square (L_j^* (q_j) 0 \dots 0) = \begin{pmatrix} (L_i^* (q_i) 0 \dots 0) \\ (L_j^* (q_j) 0 \dots 0) \end{pmatrix}.$$

Здесь нулевой столбец 0 в предматрице толерантности $(L_i^* (q_i) 0 \dots 0)$ имеет длину $q_t$.

Пусть $A \subseteq Z_2^n$ и $\mathbf{a} \in A$. Максимальное подмножество $p\{\mathbf{a}A\} \subseteq \mathbf{a}A$, которое удовлетворяет условию

$$(p\{\mathbf{a}A\})^\sigma = (L_j 0_j \dots 0_j) \square (\mathop{\square}_{r=0}^{n-j} (L_{j+r}^* (q_r) \underbrace{0 \dots 0}_{n-(j+r)})), \quad (1.2)$$

будем называть $p$-множеством $A$ относительно $\mathbf{a}$' с индексом $j$ и параметром $\sigma \in S_n$, если $q_0 \geqslant q_1 \geqslant \dots \geqslant q_{n-j}$. Элемент $\sigma \in S_n$ в (1.2) может определяться неоднозначно. Чтобы устранить неоднозначность выбора $\sigma \in S_n$, введем в рассмотрение функцию $s_i : A \to \{0, 1, 2, \dots\}$, определенную так: $\forall \mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in A$, $s_i(\mathbf{a}) = \alpha_i$, $s_i(A) = \sum_{\mathbf{a} \in A} s_i(\mathbf{a})$ и множества $I_\mathbf{a} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$, удовлетворяющего условию:

$$\forall i \in I_\mathbf{a} \quad \mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \dots, 0) \in \mathbf{a}A,$$

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus I_\mathbf{a} \quad \mathbf{e}_i \notin \mathbf{a}A.$$

Элемент $\sigma$ всюду в дальнейшем будем выбирать следующим образом:

$$\begin{cases} \forall i, j \in I_\mathbf{a} \;\; s_i(\mathbf{a}A) > s_j(\mathbf{a}A) \Rightarrow s_i((\mathbf{a}A)^\sigma) > s_j((\mathbf{a}A)^\sigma), \\ \forall i, j \in I_\mathbf{a} \;\; s_i(\mathbf{a}A) = s_j(\mathbf{a}A) \text{ и } i < j \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(j), \\ \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus I_\mathbf{a} \;\; i < j \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(j) \end{cases} \quad (1.3)$$

и назовем его подходящим параметром $p$-множества $p\{\mathbf{a}A\}$.

**Теорема 1.** Пусть $A \subseteq Z_2^n$ и $\mathbf{a} \in A$. Тогда в $\langle E_n' \rangle$ найдутся такие элементы $L, N$, что

1) $L = (p\{\mathbf{a}A\})^\sigma$, если $|p\{\mathbf{a}A\}| \leqslant 2^{n-1}$;

2) $(p\{\mathbf{a}A\})^\sigma \lhd \begin{pmatrix} N \\ N^* \end{pmatrix}$, когда $|p\{\mathbf{a}A\}| > 2^{n-1}$.

**Доказательство**. Рассмотрим случай $|p\{\mathbf{a}A\}| \leqslant 2^{n-1}$. Покажем, что существует вектор $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \Omega_n'$, удовлетворяющий условию

$$\forall X \in p\{\mathbf{a}A\}, \forall Y \in Z_2^n \setminus p\{\mathbf{a}A\} \;\; X \cdot \mathbf{u}^T > Y \cdot \mathbf{u}^T. \quad (1.4)$$

Согласно (1.2) и теореме 5 [6] вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n)$:

а) $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = \omega_1 - 1, \dots, \omega_j = \sum_{i=1}^{j-1} \omega_i - 1$;

б) компоненты $\omega_{j+s}$, $s = 1, 2, \dots, t$, $t$ — такое наименьшее целое положительное число, что $q_t \neq 0$ и $q_{t+1} = \dots = q_{n-j} = 0$, последовательно находим из равенств

$$\mathbf{a}_{q_s}^{j+s} (\omega_1, \dots, \omega_{j+s})^T = \mathbf{a}_{q_{s-1}}^{j+s-1} (\omega_1, \dots, \omega_{j+s-1})^T,$$

где $\mathbf{a}_{q_s}^{j+s}$ — $q_s$-я строка матрицы $L_{j+s}^*$;

в) $\omega_{j+t+1} = \dots = \omega_n = \mathbf{a}_{q_t}^{j+t} (\omega_1, \dots, \omega_{j+t})^T - 1$, удовлетворяет условию (1.4), но $\mathbf{w} \notin \Omega_n'$.

Положим $u_i = \omega_i$, $i = 1, 2, \dots, j$, и $u_{j+k} = \omega_{j+k} - 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots, n - j$. Тогда $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n) \in \Omega_n'$ и удовлетворяет (1.4). Значит, если $q = |p\{\mathbf{a}A\}|$ — мощность $p$-множества и $L_\mathbf{u}$ удовлетворяет условию (1.1), то $(p\{\mathbf{a}A\})^\sigma = L_\mathbf{u}(q) \in \langle E_n' \rangle$.

В случае $|p\{\mathbf{a}A\}| > 2^{n-1}$ вектор $\mathbf{u}$ построим аналогично и положим $N = L_\mathbf{u} \in \langle E_n' \rangle$. Тогда в силу (1.4) и по лемме 3 [5] имеем $(p\{\mathbf{a}A\})^\sigma \lhd (N \square \square N^*)$, что и требовалось доказать.

## 2. ПОРОГОВОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ БИНАРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Пусть рецепторное поле, размеров $2^r \times 2^s$, содержит нормализованное [4] бинарное изображение $A'$ и $n = r + s$. По некоторому взаимно однозначному закону $\varphi$ каждому рецептору сопоставим $n$-мерный булевый вектор $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Z_2^n$ и $A$ обозначим множество всех тех булевых векторов, которые соответствуют рецепторам, занятым изображением $A'$, т. е. $\varphi(A') = A \subseteq Z_2^n$. Пусть $\mathbf{a} \in A$ и $p\{\mathbf{a}A\}$ — $p$-множество $A$ относительно $\mathbf{a}$. Рассмотрим отображение $P_\mathbf{a}^\sigma : A \to (P_\mathbf{a}^\sigma \{A\}) \in \langle \hat{E}_n \rangle$, которое задается так:

$$\forall \mathbf{b} \in A \quad P_\mathbf{a}^\sigma : \mathbf{b} \to \mathbf{b}, \text{ если } (\mathbf{ab})^\sigma \in p\{\mathbf{a}^\sigma A^\sigma\},$$

$$\forall \mathbf{b} \in A \quad P_\mathbf{a}^\sigma : \mathbf{b} \to \mathbf{a}, \text{ если } (\mathbf{ab})^\sigma \notin p\{\mathbf{a}^\sigma A^\sigma\},$$

и номер строки $\mathbf{b}$ в матрице $(P_\mathbf{a}^\sigma \{A\})$ совпадает с номером строки $(\mathbf{ab})^\sigma$ матрицы $(p\{\mathbf{a}^\sigma A^\sigma\}) = (p\{\mathbf{a}A\})^\sigma$, когда $(\mathbf{ab})^\sigma \in p\{\mathbf{a}^\sigma A^\sigma\}$, а в противном случае равен 1. Здесь $\langle \hat{E}_n \rangle = \bigcup_{L \in E_n} \langle L \square L^* \rangle$.

**Определение**. Точки $\mathbf{a}_1, \dots, a_t \in A$ назовем точками разложений бинарного изображения $A'$ в пороговом базисе, если

$$\forall i \in \{1, 2, \dots, t\} \quad P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i} \{A\} \not\subseteq \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{t} P_{\mathbf{a}_j}^{\sigma_j} \{A\}. \quad (2.1)$$

Если точки $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t \in A$ такие, что удовлетворяют (2.1) и

$$A = \bigcup_{i=1}^{t} P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i} \{A\}, \quad (2.2)$$

то будем говорить, что эти точки образуют полную систему точек разложений двумерного бинарного изображения $A'$. Множество $A$ однозначно представляется в виде (2.2) относительно полной системы точек разложений $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t$, так как $\sigma_1, \dots, \sigma_t$ — соответствующие подходящие параметры $p$-множеств $p\{\mathbf{a}_i A\}$, $i = 1, 2, \dots, t$. В силу построения отображения $P_\mathbf{a}^\sigma$ для множества $P_\mathbf{a}^\sigma \{A\}$

по теореме 5 [6] можно построить такой $n+1$-мерный целочисленный вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$, что

$$\mathbf{b} = (\beta_1, \ldots \beta_n) \in P_{\mathbf{a}}^{\sigma}\{A\} \Leftrightarrow \mathbf{w}(\mathbf{b}) \geqslant 0, \qquad (2.3)$$

где $\mathbf{w}(\mathbf{b}) = \omega_1\beta_1 + \ldots + \omega_n\beta_n - \omega_0$. Алгоритм, реализующий отображение $P_{\mathbf{a}}^{\sigma}\{A\} \to \mathbf{w}$ (согласно теореме 5 [6]) обозначим $F$. Примем

$$P_{\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_t}^{\sigma_1 \ldots \sigma_t} : A \to \bigcup_{i=1}^{t} P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\},$$

$$F \circ P_{\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_t}^{\sigma_1 \ldots \sigma_t} : A \to (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_t), \qquad (2.4)$$

где $F : P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\} \to \mathbf{w}_i$.

**Определение**. Пороговым представлением двумерного бинарного изображения $A'$ относительно точек разложений $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in A$ назовем отображение (2.4).

Пороговое представление называется точным относительно $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in A$, если эти точки образуют полную систему точек разложений изображения $A'$.

**Теорема 2**. Нормализованные двумерные бинарные изображения $A_1'$ и $A_2'$ идентичны тогда и только тогда, когда существуют такие точки разложений $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in A_1 \cap A_2$ в пороговом базисе, что совпадают их точные пороговые представления.

**Доказательство. Необходимость**. Если нормализованные двумерные изображения $A_1'$ и $A_2'$ идентичны, то $A_1 = A_2$, а это непосредственно влечет

$$\forall \mathbf{a}_i \in A_1 \cap A_2 \quad P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A_1\} = P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A_2\}. \qquad (2.5)$$

Следовательно, если $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in A_1$ такие, что

$$A_1 = \bigcup_{i=1}^{t} P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A_1\}, \text{ то } A_2 = \bigcup_{i=1}^{t} P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A_2\}.$$

В силу теоремы 5 [6] и (2.5) алгоритм $F$ каждому множеству $P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A_j\}$ $(j = 1, 2)$ однозначно ставит в соответствие один и тот же вектор $\mathbf{w}_i$. Отсюда

$$F \circ P_{\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_t}^{\sigma_1 \ldots \sigma_t}\{A_1\} = F \circ P_{\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_t}^{\sigma_1 \ldots \sigma_t}\{A_2\} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_t), \qquad (2.6)$$

и тем самым необходимость доказана.

**Достаточность**. Из того, что $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_t)$ — точное пороговое представление двумерных бинарных изображений $A_1'$, $A_2'$, следует, что равенство (2.6) влечет

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, t\} \quad F \circ P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A_1\} = F \circ P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A_2\} = \mathbf{w}_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A_1\} = \{\mathbf{a} \in Z_2^n \mid \mathbf{w}_i(\mathbf{a}) \geqslant 0\}, \\ P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A_2\} = \{\mathbf{a} \in Z_2^n \mid \mathbf{w}_i(\mathbf{a}) \geqslant 0\}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A_1\} = P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A_2\} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{t} P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A_1\} = \bigcup_{i=1}^{t} P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1 = A_2.$$

Значит, $A_1'$ и $A_2'$ — идентичные бинарные изображения.

Теорема доказана.

Пусть $F : P_{\mathbf{a}}^{\sigma}\{A\} \to \mathbf{w}$ и $F_k : P_{\mathbf{a}}^{\sigma}\{A\} \to (\mathbf{a}\mathbf{w})^{\sigma}$.

**Определение**. Каноническим пороговым представлением двумерного бинарного изображения $A'$ относительно точек разложений $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in A$ назовем отображение $F_k \circ P_{\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_t}^{\sigma_1 \ldots \sigma_t}$, определенное так:

$$F_k \circ P_{\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_t}^{\sigma_1 \ldots \sigma_t} : A \to F_k : \bigcup_{i=1}^{t} P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\} \to ((\mathbf{a}_1\mathbf{w}_1)^{\sigma_1}, \ldots$$

$$\ldots, (\mathbf{a}_t\mathbf{w}_t)^{\sigma_t}).$$

Каноническое пороговое представление бинарного изображения называется точным относительно $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t$, если эти точки образуют полную систему точек разложений $A'$.

Преобразование $\mathbf{w}_i \to \mathbf{a}_i (\mathbf{w}_i^{\sigma_i^{-1}})$ осуществляет однозначный переход от канонического порогового представления к пороговому представлению двумерных изображений. Это влечет следующий результат.

**Теорема 3**. Нормализованные двумерные бинарные изображения $A_1'$ и $A_2'$ идентичны тогда и только тогда, когда существуют такие точки разложений $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in A_1 \cap A_2$ в пороговом базисе, что совпадают их точные канонические пороговые представления.

Пусть $p$-множество $p\{\mathbf{a}_i A\}$ множества $A$ имеет индекс $j_i$, т. е.

$$(p\{\mathbf{a}_i A\})^{\sigma_i} = (L_{j_i} 0_{j_i} \ldots 0_{j_i}) \square (\mathop{\square}_{r=0}^{n-j_i} (L_{j_i}^{\bullet} + r(q_r) \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j_i+r)})).$$

Нетрудно заметить, что

$$F : p\{\mathbf{a}_i^{\sigma_i} A^{\sigma_i}\} \to \mathbf{w}_i^k = (\omega_1^{ik}, \ldots, \omega_{j_i}^{ik}, \ldots, \omega_n^{ik}; \omega_0^{ik}),$$

$$F_k : P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\} \to \mathbf{w}_i^k = (\omega_1^{ik}, \ldots, \omega_{j_i}^{ik}, \ldots, \omega_n^{ik}; \omega_0^{ik}).$$

Каждому $\mathbf{w}_i^k$ однозначно сопоставим $n - j_i + 1$-мерный вектор так:

1) если $j_i \neq 0$, то $v_r^i = \omega_{j_i+r-1}^{ik} - \omega_0^{ik}$, $r = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n - j_i + 1$,

2) если $j_i = 0$, то положим $\mathbf{v}_i = (-1, -1, \ldots$ $\ldots, -1)$ — $n+1$-мерный вектор.

Вектор $\mathbf{v}_i$ назовем информационным вектором $p\{\mathbf{a}_i A\}$ и $\lambda(\mathbf{v}_i)$ обозначим его размерность.

Пусть $A_1'$, $A_2'$ — двумерные бинарные изображения, размеров $2^r \times 2^s$ $(n = r + s)$, $p\{\mathbf{a}A_1\}$, $p\{\mathbf{a}A_2\}$ — $p$-множества соответствующих множеств $A_1$, $A_2$ относительно точки $\mathbf{a}$ с индексами $j_1$, $j_2$ и $\mathbf{v}_1 =$

$= (v_1^1, \dots, v_{n-j_1+1}^1)$, $\mathbf{v}_2 = (v_1^2, \dots, v_{n-j_2+1}^2)$ — соответствующие им информационные векторы. Будем говорить, что информационный вектор $\mathbf{v}_1$ $p$-множества $p\{\mathrm{a}A_1\}$ предшествует информационному вектору $\mathbf{v}_2$ $p$-множества $p\{\mathrm{a}A_2\}$ ($\mathbf{v}_1 \leqslant \mathbf{v}_2$), если

1) $\lambda(\mathbf{v}_1) \geqslant \lambda(\mathbf{v}_2)$,

2) $v_{m+i}^1 \leqslant v_i^2$, $i = 1, 2, \dots, \lambda(\mathbf{v}_2)$, где $m = \lambda(\mathbf{v}_1) - \lambda(\mathbf{v}_2)$.

**Теорема 4**. Пусть подходящие параметры $\sigma_1, \sigma_2$ $p$-множеств $H_1 = p\{\mathrm{a}A_1\}$, $H_2 = p\{\mathrm{a}A_2\}$ равны и $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — соответствующие им информационные векторы, тогда $\mathbf{v}_1 \leqslant \mathbf{v}_2 \Rightarrow H_1 \subseteq H_2$.

**Доказательство**. По определению $p$-множеств $H_i$:

$$(H_i)^{\sigma_i} = (L_{j_i}0_{j_i}\dots 0_{j_i}) \,\square\, (\mathop{\square}_{r=0}^{n-j_i}(L^*_{j_i+r}(q_r^i)\underbrace{0\dots0}_{n-(j_i+r)})), \quad (2.7)$$

$i = 1, 2$. Число строк $q_t^i$ предматрицы толерантности $L^*_{j_i+t}(q_t^i)$ и $t$-я координата $v_t^i$ информационного вектора $\mathbf{v}_i$ $p$-множества $H_i$ связаны равенством $q_t^i = v_t^i + 1$. Значит,

$$\mathbf{v}_1 \leqslant \mathbf{v}_2 \Rightarrow v^1_{m+t} \leqslant v_t^2 \Rightarrow q^1_{m+t} \leqslant q_t^2 \Rightarrow (L^*_{j_1+m+t}(q^1_{m+t})\,0\dots0) \lhd (L^*_{j_2+t}(q_t^2)\,0\dots0),$$

где $m = \lambda(\mathbf{v}_1) - \lambda(\mathbf{v}_2)$. Отсюда, с учетом (2.7), $\sigma_1 = \sigma_2$ и

$$(L^*_{j_1+m-t}(q^1_{m-t})\,0\dots0) \lhd (L^*_{j_2-t}0_t\dots0_t),$$

$t = 1, 2, \dots, m$, заключаем, что $H_1 \subseteq H_2$.

На множестве действительных чисел $R$ зададим функции $g: R \to Z_2$, $h: R \to Z_2$ так:

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

и на паре информационных векторов $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ соответствующих $p$-множеств $H_1 = p\{\mathrm{a}A_1\}$, $H_2 = p\{\mathrm{a}A_2\}$ определим функционалы $\mu, \nu$: пусть $\lambda(\mathbf{v}_1) \geqslant \lambda(\mathbf{v}_2)$ и $m = \lambda(\mathbf{v}_1) - \lambda(\mathbf{v}_2)$, тогда

$$\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sum_{t=1}^{\lambda(\mathbf{v}_2)} |g(v^1_{m+t})(v^1_{m+t} + 1) - g(v_t^2)(v_t^2 + 1)| + \sum_{t=1}^{m}(2^{n-\lambda(\mathbf{v}_2)-t} - v^1_{m-t+1} - 1),$$

$$\nu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = h(n - \lambda(\mathbf{v}_1) + 1)\,2^{n-\lambda(\mathbf{v}_1)} + \sum_{t=1}^{\lambda(\mathbf{v}_2)}(\min\{v^1_{m+t}, v_t^2\} + 1) + \sum_{t=1}^{m}(v^1_{m-t+1} + 1),$$

где $|c|$ — модуль действительного числа $c$, $\sum_{t=1}^{0}(\dots) = 0$.

**Теорема 5**. Пусть подходящие параметры $\sigma_1, \sigma_2$ $p$-множеств $H_1 = p\{\mathrm{a}A_1\}$, $H_2 = p\{\mathrm{a}A_2\}$ равны, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — соответствующие им информационные векторы и

$$\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\nu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \nu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}.$$

Тогда $|H_1 \cap H_2| = |H_1 \cup H_2|\,\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

**Доказательство**. Для определенности положим $\lambda(\mathbf{v}_1) \geqslant \lambda(\mathbf{v}_2)$, $\lambda(\mathbf{v}_i) = n - j_i + 1$ и $m = \lambda(\mathbf{v}_1) - \lambda(\mathbf{v}_2)$. Из построения $p$-множеств $H_i$ $(i = 1, 2)$ следует

$$(H_1)^{\sigma_1} = (L_{j_1}0_{j_1}\dots0_{j_1}) \,\square\, (L^*_{j_1}(q_0^1)\,0\dots0) \,\square\, \dots$$
$$\dots \,\square\, (L^*_{j_1+m-1}(q^1_{m-1})\,0\dots0) \,\square\, (\mathop{\square}_{r=m}^{n-j_1}(L^*_{j_1+r}(q_r^1)\,0\dots0)), \quad (2.8)$$

$$(H_2)^{\sigma_2} = (L_{j_1}0_{j_1}\dots0_{j_1}) \,\square\, (L^*_{j_1}0_{j_1}\dots0_{j_1}) \,\square\, \dots$$
$$\dots \,\square\, (L^*_{j_2-1}0_{j_2-1}\dots0_{j_2-1}) \,\square\, (\mathop{\square}_{r=0}^{n-j_2}(L^*_{j_2+r}(q_r^2)\,0\dots0)). \quad (2.9)$$

Пусть $[(L_j0_j\dots0_j)]$ — множество, элементами которого являются строки матрицы $(L_j0_j\dots0_j)$. Тогда из того, что $q^1_{m+t} \leqslant q_t^2$ или $q^1_{m+t} > q_t^2$ и $q_t^i = v_t^i + 1$, имеем

$$|g(v^1_{m+t})(v^1_{m+t} + 1) - g(v_t^2)(v_t^2 + 1)| = |[(L^*_{j_2+t}(q_t^2)\,0\dots0)] \setminus [(L^*_{j_1+m+t}(q^1_{m+t})\,0\dots0)]|$$

либо

$$|g(v^1_{m+t})(v^1_{m+t} + 1) - g(v_t^2)(v_t^2 + 1)| = |[(L^*_{j_1+m+t}(q^1_{m+t})\,0\dots0)] \setminus [(L^*_{j_2+t}(q_t^2)\,0\dots0)]|.$$

Отсюда

$$|g(v^1_{m+t})(v^1_{m+t} + 1) - g(v_t^2)(v_t^2 + 1)| = |[L^*_{j_1+m+t}(q^1_{m+t})\,0\dots0)]\,\Delta\,[(L^*_{j_2+t}(q_t^2)\,0\dots0)]|, \quad (2.10)$$

где $\Delta$ — симметрическая разность множеств. Из (2.8) следует $q_s^1 < 2^{j_1+s-1}$, $s = 1, 2, \dots, m-1$. Значит, $\forall s \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}$

$$[(L^*_{j_1+s}(q_s^1)\,0\dots0)] \subset [(L^*_{j_1+s}0_{j_1+s}\dots0_{j_1+s})]$$

и

$$|[(L^*_{j_1+s}0_{j_1+s}\dots0_{j_1+s})]\,\Delta\,[(L^*_{j_1+s}(q_s^1)\,0\dots0)]| = 2^{j_1+s-1} - (v_s^1 + 1). \quad (2.11)$$

На основании (2.8)—(2.11) и $\sigma_1 = \sigma_2$ заключаем, что

$$|H_1 \Delta H_2| = \sum_{t=1}^{m}(2^{n-\lambda(\mathbf{v}_2)-t} - v^1_{m-t+1} - 1) + \sum_{t=1}^{\lambda(\mathbf{v}_2)}|g(v^1_{m+t})(v^1_{m+t} + 1) - g(v_t^2)(v_t^2 + 1)| = \mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \quad (2.12)$$

Предматрицы толерантности $(L_r^*(q_r)\,0\dots0)$, $(L_s^*(q_s)\,0\dots0)$ удовлетворяют условию

$$r \neq s \Rightarrow [(L_r^*(q_r)\,0\dots0)] \cap [(L_s^*(q_s)\,0\dots0)] = \varnothing,$$

откуда в силу (2.8), (2.9) и $\sigma_1 = \sigma_2$ имеем

$$|H_1 \cap H_2| = |[(L_{j_1} 0_{j_1} \dots 0_{j_1})]| + \sum_{t=1}^{m} |[(L^*_{j_1+m+t}$$

$$(q^1_{m+t})\, 0 \dots 0)]| + \sum_{t=1}^{\lambda(\mathbf{v}_2)} |[(L^*_{j_1+m+t+1}\,(q^1_{m+t-1})\, 0 \dots 0)] \cap$$

$$\cap [(L^*_{j_2+t-1}\,(q^2_{t-1})\, 0 \dots 0)]| = h\,(j_1)\, 2^{j_1-1} +$$

$$+ \sum_{t=1}^{m} (v^1_{m-t+1} + 1) + \sum_{t=1}^{\lambda(\mathbf{v}_2)} (\min\{v^1_{m+t}, v^2_t\} + 1) = \nu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \tag{2.13}$$

Из равенств (2.12) и (2.13) непосредственно следует

$$|H_1 \cap H_2| = |H_1 \cup H_2| \frac{|H_1 \cap H_2|}{|H_1 \cup H_2|} = H_1 \cup H_2| \times$$

$$\times \frac{|H_1 \cap H_2|}{|H_1 \Delta H_2| + |H_1 \cap H_2|} = |H_1 \cup H_2|\, \mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Итак, теорема доказана.

Определим функционал $\mu_*$ на паре $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ информационных векторов $p$-множеств $H_1$, $H_2$ так:

$$\mu_*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \nu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}.$$

Нетрудно заметить, что если $\sigma_1, \sigma_2$ — подходящие параметры соответствующих $p$-множеств $H_1, H_2$, $\sigma = \sigma_2 \sigma_1^{-1}$, то

$$\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = |H_1 \Delta H_2^{\sigma}|, \quad \nu(v_1, v_2) = |H_1 \cap H_2^{\sigma}|$$

и 1) на любой паре информационных векторов $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ соответствующих $p$-множеств $H_1, H_2$

$$\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2),\ \mu_*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1) \in [0, 1],$$

2) $\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \mu_*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1$, 3) если $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1$, то $H_1 = H_2$, 4) если $\sigma_1 = \sigma_2$ и $\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$, то $H_1 \cap H_2 = \varnothing$.

Исходя из свойств (2)—(4) функционал $\mu^*$ естественно назвать мерой «сходства», а $\mu_*$ — мерой «различия» $p$-множеств ($p$-фрагментов $\varphi^{-1}(H_i)$).

С использованием свойств функционала $\mu_*$ можно предложить следующий алгоритм классификации двумерных бинарных изображений.

**Шаг 1.** Пусть $A'_1, \dots, A'_r$-различные нормализованные двумерные эталонные бинарные изображения и $A_i = \varphi(A'_i)$. В силу теоремы 3 можно указать такие точки разложений $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$, что информационные векторы $\mathbf{v}^i_t$ $p$-множеств $H^i_t = p\{\mathbf{a}_t A_i\}$ удовлетворяют условию $\mu_*(\mathbf{v}^i_t, \mathbf{v}^j_t) \neq 0$, когда $i \neq j$. Число точек разложений $s$ является параметром решающего правила, и в основном $s$ выбирается так, чтобы максимизировать некоторый функционал качества классификации на заданной экзаменационной выборке, минимизировать число операций, необходимое для принятия решения, и объем памяти отведенных для представления эталонов. После определения $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_s$ переходим к шагу 2.

**Шаг 2.** Нормализуем предъявленное двумерное бинарное изображение $B'$ и найдем информационные векторы $\mathbf{u}_t$ $p$-множеств $p\{\mathbf{a}_t B\}$, $B = \varphi(B')$, $t = 1, 2, \dots, s$. Вычислим $F_{ji} = \mu_*(\mathbf{v}^j_i, \mathbf{u}_i)$, $i = 1, 2, \dots, s$; $j = 1, 2, \dots, r$. Определим подмножества $J_1, \dots, J_s \subseteq J = \{1, 2, \dots, r\}$ так:

$$J_i = \{j \in J \mid F_{ji} = \min\{F_{ti} \mid t \in J\}\}, \quad i = 1, 2, \dots, s.$$

Положим $F^*_{ji} = 1$, если $j \in J_i$, и $F^*_{ji} = 0$, когда $j \notin J_i$. Найдем

$$F_j = \sum_{i=1}^{s} F^*_{ji}, \quad j = 1, 2, \dots, r.$$

Если $F = \max\{F_j \mid j \in J\}$ — единственный элемент множества $\{F_j \mid j \in J\}$ и $F = F_{j_0}$, то предъявленное изображение отнесем к $A'_{j_0}$. Если же $F$ — не единственный элемент этого множества, то определим $J^* = \{j \in J \mid F_j = F\}$ и вычислим

$$F^*_j = \sum_{i=1} F_{ji} F^*_{ji}, \quad j \in J.$$

Ищем $F^* = \min\{F^*_j \mid j \in J^*\}$. Если $F^* = F_{j_0}$ — единственный минимальный элемент этого множества, то $B'$ отнесем к $A'_{j_0}$, а в противном случае решения не примем. Процесс закончен.

Следует отметить, что представление $p$-фрагментов двумерных бинарных изображений в пространстве информационных векторов является весьма эффективным с точки зрения сжатия информации. Действительно, если $H'$ — $p$-фрагмент двумерного бинарного изображения $A'$ рецепторного поля $2^r \times 2^s$ $(n = r - s)$ относительно точки $\mathbf{a} \in Z_2^n$ и $t$ — такое наименьшее неотрицательное число, что для $H = p\{\mathbf{a}A\}$ имеем

$$(H) = (L_j 0_j \dots 0_j) \,\square\, (\mathop{\square}_{r=0}^{t} (L^*_{j+r}(q_r) \underbrace{0 \dots 0}_{n-(j+r)})),$$

то из $2^{j-1} > q_0 \geqslant q_1 \dots \geqslant q_t$ и из построения информационного вектора $\mathbf{v}_H$ непосредственно следует, что коэффициент сжатия $\varkappa_H$ $p$-фрагмента $H'$ в битах удовлетворяет неравенствам:

1) если $\mathbf{a} \in A$, то $\varkappa_H \geqslant 2^n/(j(t+1) + 2[n - (j + t)])$,

2) если $\mathbf{a} \notin A$, то $\varkappa_H = 2^{n-1}/(n+1)$.

## 3. ИНВАРИАНТЫ ДВУМЕРНЫХ БИНАРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ГРУППОВЫХ И ЛОГИЧЕСКИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В задачах обработки и классификации двумерных дискретных изображений важное значение имеет нахождение инвариантов относительно допустимых преобразований. Ниже рассмотрим следующие допустимые преобразования двумерных бинарных изображений.

I. Пусть $A'$ — исходное двумерное бинарное изображение рецепторного поля, размеров $2^r \times 2^s$ $(n = r + s)$, и $A = \varphi(A')$. Через $A'_{\mathrm{I}}(\sigma)$ обозначим изображение $\varphi^{-1}(A^{\sigma})$, где $\sigma \in S_n$.

II. $A'_{\mathrm{II}}(\mathbf{b}) = \varphi^{-1}(\mathbf{b}A)$, где $\mathbf{b} \in Z_2^n$.

III. Пусть $A_{\mathrm{III}} = \{\mathbf{a} \mid \mathbf{a} \in Z_2^n \setminus A\}$ и $A'_{\mathrm{III}} = \varphi^{-1}(A_{\mathrm{III}})$.

IV. Пусть $\delta[A'(\mathbf{a})]$ — значение изображения $A'$ в рецепторе, которому по закону $\varphi$ ставится в соответствие булевый вектор

$$\mathbf{a} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in Z_2^n, \quad j(\mathbf{a}) = \alpha_j$$

и

$$\delta[A'^{j}_{\mathrm{IV}}(\mathbf{a})] = \overline{j(\mathbf{a}) \oplus \delta[A'(\overline{1(\mathbf{a}) \oplus j(\mathbf{a})}, \dots, \overline{(j-1)(\mathbf{a}) \oplus j(\mathbf{a})}, j(\mathbf{a}), \overline{(j+1)(\mathbf{a}) \oplus j(\mathbf{a})}, \dots, \overline{n(\mathbf{a}) \oplus j(\mathbf{a})})]},$$

где черта над символом означает булево отрицание, $\oplus$ — сумма по mod 2 и $\mathbf{a} \in Z_2^n$. Определим

$$A^{j}_{\mathrm{IV}} = \{\mathbf{a} \in Z_2^n \mid \delta[A'^{j}_{\mathrm{IV}}(\mathbf{a})] = 1\} \text{ и } A'^{j} = \varphi^{-1}(A^{j}_{\mathrm{IV}}).$$

Пусть $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t)$ — точное пороговое представление двумерного бинарного изображения $A'$ относительно точек $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t$ и $\|\mathbf{w}_i\| = |\omega_1^i| + |\omega_2^i| + \dots + |\omega_n^i|$, где $\mathbf{w}_i = (\omega_1^i, \dots, \omega_n^i; \omega_0^i)$. Под нормой $\|A'\|$ порогового представления $A'$ понимаем $\|A'\| = \|\mathbf{w}_1\| + \dots + \|\mathbf{w}_t\|$.

**Теорема 6**. Норма $\|A'\|$ порогового представления двумерного бинарного изображения $A'$ является инвариантной величиной относительно преобразований, порожденных симметрической группой $S_n$ и абелевой группой $Z_2^n$.

**Доказательство**. Пусть $(\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_t)$ — точное пороговое представление двумерного бинарного изображения $A'$ относительно точек разложений $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_t \in A$, т. е.

$$A = \bigcup_{i=1}^{t} P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\}. \tag{3.1}$$

В силу (3.1)

$$\forall \sigma \in S_n \quad A^{\sigma} = \bigcup_{i=1}^{t} [(P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\})^{\sigma}], \tag{3.2}$$

$$\forall \mathbf{b} \in Z_2^n \quad \mathbf{b}A = \bigcup_{i=1}^{t} \mathbf{b}P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\}, \tag{3.3}$$

где $[(P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\})^{\sigma}]$ — множество, элементами которого являются строки матрицы $(P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\})^{\sigma}$. Применив к правым частям (3.2) и (3.3) отображение $F$, получим

$$F: \bigcup_{i=1}^{t} [(P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\})^{\sigma}] \to (\mathbf{w}_1^{\sigma}, \dots, \mathbf{w}_t^{\sigma}), \tag{3.4}$$

$$F: \bigcup_{i=1}^{t} \mathbf{b}P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\} \to (\mathbf{b}\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{b}\mathbf{w}_t). \tag{3.5}$$

Отсюда с учетом $\|\mathbf{w}_i\| = \|\mathbf{w}_i^{\sigma}\| = \|\mathbf{b}\mathbf{w}\|$ имеем $\|A'\| = \|A'_{\mathrm{I}}(\sigma)\| = \|A'_{\mathrm{II}}(\mathbf{b})\|$.

Итак, теорема доказана.

**Замечание**. Соотношения (3.4), (3.5) задают точные пороговые представления изображений $A'_{\mathrm{I}}(\sigma)$, $A'_{\mathrm{II}}(\mathbf{b})$ относительно соответствующих точек разложений $\mathbf{a}_1^{\sigma}, \dots, \mathbf{a}_t^{\sigma}$; $\mathbf{b}\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{b}\mathbf{a}_t$.

Пусть $\mathbf{b} = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in Z_2^n$, $\tilde{\mathbf{b}} = ((-1)^{\beta_1}, \dots, (-1)^{\beta_n})$, $\tilde{Z}_2^n = \{\tilde{\mathbf{b}} \mid b \in Z_2^n\}$, $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n; \omega_0)$ — $n+1$-мерный вещественный вектор и $\mathbf{w}(\tilde{\mathbf{b}}) = (-1)^{\beta_1}\omega_1 + \dots + (-1)^{\beta_n}\omega_n - \omega_0$.

**Определение**. Оптимальным пороговым представлением $p$-множества $p\{\mathbf{a}A\}$ $(A \subseteq Z_2^n)$ называется отображение

$$F^*: p\{\mathbf{a}A\} \to \mathbf{w}^* = (\omega_1^*, \dots, \omega_n^*; \omega_0^*), \tag{3.6}$$

где вектор $\mathbf{w}^*$ удовлетворяет условиям:

1) $\omega_i^*$ — целое число, $i = 0, 1, \dots, n$;

2) $\sum_{i=0}^{n} |\omega_i^*| \to \min$ при условии $\max_{0 \leqslant i \leqslant n} |\omega_i^*| \to \min$, $|\omega_i^*|$ — модуль $\omega_i^*$;

3) $\mathbf{b} \in p\{\mathbf{a}A\} \Leftrightarrow \mathbf{w}^*(\tilde{\mathbf{b}}) > 0$.

Множество $\tilde{Z}_2^n$ образует абелеву группу относительно покомпонентного умножения векторов. На $\tilde{Z}_2^n$ зададим характер [7] $\chi_{\mathbf{a}}$ $(\mathbf{a} \in Z_2^n)$ так:

$$\chi_{\mathbf{a}}(\tilde{\mathbf{b}}) = (-1)^{(\mathbf{a}, \mathbf{b})}, \quad \tilde{\mathbf{b}} \in \tilde{Z}_2^n,$$

где $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ — скалярное произведение векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in Z_2^n$. Определим характеристическую функцию $f_H$ $p$-множества $H = p\{\mathbf{a}A\}$ следующим образом:

$$\mathbf{b} \in H \Leftrightarrow f_H(\tilde{\mathbf{b}}) = 1 \text{ и } \mathbf{b} \notin H \Leftrightarrow f_H(\tilde{\mathbf{b}}) = -1.$$

Характеристическим вектором $\mathbf{u}_H = (u_1, \dots, u_n; u_0)$ $p$-множества $H$ называется $n+1$-мерный вектор, координаты $u_i$ которого вычисляются по формуле

$$u_i = \sum_{\mathbf{b} \in Z_2^n} f_H(\tilde{\mathbf{b}})\, \chi_{\mathbf{e}_i}(\tilde{\mathbf{b}}), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

где $\mathbf{e}_0 = (0, \dots, 0)$ и $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$. В [8] показано, что если $H$ — $p$-множество, $n+1$-мерный вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \dots, \omega_n; \omega_0)$ удовлетворяют условию

$$(\mathbf{u}_H, \mathbf{w}) = \sum_{\mathbf{b} \in Z_2^n} |\mathbf{w}(\tilde{\mathbf{b}})| \tag{3.7}$$

и

$$\forall \mathbf{b} \in Z_2^n \quad \mathbf{w}(\tilde{\mathbf{b}}) \neq 0, \tag{3.8}$$

то $\mathbf{b} \in H \Leftrightarrow \mathbf{w}(\tilde{\mathbf{b}}) > 0$.

**Алгоритм**, реализующий отображение $F^*: H \to \to \mathbf{w}^*$, основывается на следующем.

Вычислим характеристический вектор $\mathbf{u}_H$ $p$-множества $H$ и с помощью инвариантных операций [8] преобразуем его в такой вектор $\mathbf{u}^+ = (u_1^+, \ldots, u_n^+; u_0^+)$, компоненты которого неотрицательны и расположены в порядке убывания:

$$u_1^+ \geqslant u_2^+ \geqslant \ldots \geqslant u_n^+ \geqslant u_0^+.$$

В [9] показано, что если векторы $\mathbf{u}_H^+, \mathbf{w}^+ = (\omega_1^+, \ldots, \omega_n^+; \omega_0^+)$ с положительными компонентами удовлетворяют (3.7) и (3.8), то

$$u_i^+ > u_j^+ \Rightarrow \omega_i^+ > \omega_j^+. \tag{3.9}$$

На основании (3.7) — (3.9) вектор $\mathbf{w}^+$ можно построить так, что инвариантные операции, преобразующие вектор $\mathbf{u}_H^+$ в $\mathbf{u}_H$, преобразуют этот вектор в $\mathbf{w}^*$.

**Определение**. Нормой $\| H' \|$ оптимального порогового представления $p$-фрагмента $H'$ называется $|\omega_1^*| + \ldots + |\omega_n^*| + |\omega_0^*|$.

**Теорема 7**. Норма $\| H' \|$ оптимального порогового представления $p$-фрагмента $H'$ двумерного бинарного изображения $A'$ является инвариантной величиной относительно допустимых преобразований I—IV, т. е.

$$\| H_{\mathrm{I}}'(\sigma) \| = \| H_{\mathrm{II}}'(\mathbf{b}) \| = \| H_{\mathrm{III}}' \| = \| H_{\mathrm{IV}}'^{j} \| = \| H' \|, \tag{3.10}$$

$$\sigma \in S_n, \quad \mathbf{b} \in Z_2^n, \quad j \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

**Доказательство**. Пусть $H_{\mathrm{I}} = \varphi(H_{\mathrm{I}}'(\sigma))$, $H_{\mathrm{II}} = \varphi(H_{\mathrm{II}}'(\mathbf{b}))$, $H_{\mathrm{III}} = \varphi(H_{\mathrm{III}}')$, $H_{\mathrm{IV}}^j = \varphi(H_{\mathrm{IV}}'^j)$, $\mathbf{w}^* = (\omega_1^*, \ldots, \omega_n^*; \omega_0^*)$ — оптимальное пороговое представление $p$-фрагмента $H'$ и

1) $\mathbf{w}_{\mathrm{I}}^* = (\omega_{\sigma(1)}^*, \ldots, \omega_{\sigma(n)}^*; \omega_0^*)$, $\sigma \in S_n$;

2) $\mathbf{w}_{\mathrm{II}}^* = ((-1)^{\beta_1}\omega_1^*, \ldots, (-1)^{\beta_n}\omega_n^*; \omega_0^*)$, $\mathbf{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in Z_2^n$;

3) $\mathbf{w}_{\mathrm{III}}^* = (-\omega_1^*, \ldots, -\omega_n^*; -\omega_0^*)$;

4) $\mathbf{w}_{\mathrm{IV}}^* = (\omega_1^*, \ldots, \omega_{j-1}^*, \omega_0^*, \omega_{j+1}^*, \ldots, \omega_n^*; \omega_j^*)$.

В [8] доказано, что $\mathbf{w}_{\mathrm{I}}^*, \mathbf{w}_{\mathrm{II}}^*, \mathbf{w}_{\mathrm{III}}^*, \mathbf{w}_{\mathrm{IV}}^*$ — оптимальные целочисленные векторы структуры характеристических функций $f_1$, $f_2$ $f_3$, $f_4$ соответствующих множеств $H_{\mathrm{I}}$, $H_{\mathrm{II}}$, $H_{\mathrm{III}}$, $H_{\mathrm{IV}}$. Отсюда непосредственно следует (3.10).

Теорема доказана.

Метод порогового представления двумерных бинарных изображений позволяет решать следующие задачи:

—относительно заданной точки разложения $a$ изображения $A'$ можно выделить $p$-фрагмент $H'$, который является признаком при классификации изображений и эффективно кодируется (в смысле сжатия) своим информационным вектором;

— используя свойства функционалов $\mu^*$ —«сходства», $\mu_*$ — «различия» $p$-фрагментов, можно построить (в зависимости от характера решаемой задачи) различные алгоритмы классификации двумерных бинарных изображений;

— относительно определенных групповых и логических преобразований рецепторного поля можно описать инварианты бинарных изображений и их $p$-фрагментов.

Полученные в работе результаты могут быть обобщены на многоуровневых двумерных дискретных изображениях. Для этого достаточно значение (целое число) интенсивности изображения в каждом рецепторе разложить по степеням 2 и из коэффициентов разложения образовать упорядоченную последовательность бинарных изображений — «срезы».

Авторы выражают искреннюю благодарность Ю. И. Журавлеву за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Журавлев Ю. И. Об алгебраическом подходе к решению задач распознавания или классификации // Пробл. кибернетики.— 1978.— Вып. 33.— С. 5—68.
2. Прэтт У. Цифровая обработка изображений.— М. : Мир, 1982.— Т. 1.— 480 с.
3. Ту Дж. Гонсалес Р. Принципы распознавания образов.— М. : Мир, 1978.— 411 с.
4. Анисимов Б. В., Курганов В. Д., Злобин В. К. Распознавание и цифровая обработка изображений.— М. : Высш. шк., 1983.— 295 с.
5. Некоторые алгебраические аспекты пороговой логики / Н. Н. Айзенберг, А. А. Бовди, Э. Й. Герго, Ф. Э. Гече // Кибернетика.— 1980.— № 2.— С. 26—30.
6. Гече Ф. Э., Поливко В. П., Роботишин В. И. Реализация функций алгебры логики на пороговых элементах // Там же.— 1983.— № 6.— С. 62—67.
7. Ван дер Варден В. Л. Алгебра.— М. : Наука, 1979.— 623 с.
8. Дертоузос М. Пороговая логика.— М. : Мир, 1967.— 341 с.
9. Paull M. C., Mc Cluskey E. J. Boolean functions realizable with single threshold devices // Proc. IRE.— 1960.— N 48.— P. 1335—1337.

*Поступила 21.11.89*