ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ І СИСТЕМИ
Т.1, № 1/2 (1998) С. 105-109

INFORMATION TECHNOLOGIES AND SYSTEMS
VOL.1, № 1/2 (1998) P. 105-109

РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ НА ОДНОМ НЕЙРОННОМ ЭЛЕМЕНТЕ И СУММАТОРАХ ПО mod 2*

Ф. Э. Гече
Государственный научно-исследовательский институт информационной инфраструктуры, Ужгородский филиал, Ужгород
(Поступила 10 июня 1998 года)

В работе показано, что если над булевыми функциями осуществить некоторые логические операции, то класс булевых функций, допускающих реализацию на одном нейронном элементе, существенно расширится. Исследуется вопрос о том, какие именно преобразования в спектральной области булевых функций соответствуют этим операциям.

В работе [1] показано, что булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ реализуется на одном нейронном (пороговом) элементе в том и только в том случае, если в её множестве приведенных ядер $T(f)$ хотя бы для одного приведенного ядра $K(f)_i$ можно указать такие элементы σ и ξ соответствующих симметрических групп S_n и S_q ($q=|K(f)|$ – мощность ядра) и такую матрицу толерантности $L\in E_n^{'}$, что $K_\xi^\sigma(f)_i \lhd L$. Естественно, возникает вопрос: можно ли расширить класс функций алгебры логики, реализуемых на одном нейронном элементе, предварительно выполняя над ними определенные преобразования? В данной работе в качестве таких преобразований используется логическая операция $\oplus$ – сумма по mod 2. Здесь же исследуется вопрос какие преобразования в спектральной области булевых функций соответствуют этим операциям.

Пусть $K(f)$ ядро булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ и a_i – i-й вектор-столбец ядра $K(f)$ $(i\in\{1,2,\ldots,n\})$. Определим над $K(f)$ действие операторов $\underset{i}{A}$ и $\underset{i}{B}$ $(i\in\{0,1,\ldots,n\})$ следующим образом:

1. $\underset{i_s}{A}(K(f),(i_1,\ldots,i_t))$ – означает, что i_s-й вектор-столбец ядра $K(f)$ булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ заменяется вектор-столбцом $a_{i_s}\oplus a_{i_1}\oplus\ldots\oplus a_{i_t}$ $(i_s,i_1,\ldots,i_t\ \{1,2,\ldots,n\})$, где $\oplus$ – покоординатное сложение булевых векторов по mod 2. Оператору $\underset{i_s}{A}(K(f),(i_1,\ldots,i_t))$ присвоим индекс $r=2^{n-i_1}+$ $+2^{n-i_2}+\ldots+2^{n-i_t}$ и обозначим его через $\underset{(r;i_s)}{A}(K(f))$. Для функции, ядром котрой будет $\underset{i_s}{A}(K(f),(i_1,\ldots,i_t))$, примем обозначение $\underset{(r;i_s)}{A}(f)$. Положим, что $\underset{(q;o)}{A}(K(f))=K(f)$ и $\underset{(q;o)}{A}(f)=f$.

2. $\underset{i_s}{B}(K(f))$ – означает, что ядро $K(f)$ функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ заменяется ядром $K(f')$ функции $f'(x_1,\ldots,x_n)=x_{i_s}\oplus f(x_1,\ldots,x_n)$ и $\underset{o}{B}(K(f))=K(f)$ $\left(x_{i_s}\in\{x_1,\ldots,x_n\}\right)$. Определим композиции $\underset{i}{B}\circ\underset{(r;j)}{A}$, $\underset{(r_1;i)}{A}\circ\underset{(r_2;j)}{A}$ операторов $\underset{i}{B}$, $\underset{(r;j)}{A}$ и $\underset{(r_1;i)}{A}$, $\underset{(r_2;j)}{A}$ так:

$$\left(\underset{i}{B}\circ\underset{(r;i_s)}{A}\right)K(f)=\underset{i_p}{B}\left(\underset{(r;i_s)}{A}(K(f))\right),$$

$$\left(\underset{(r_1;i_s)}{A}\circ\underset{(r_2;i_t)}{A}\right)K(f)=\underset{(r_1;i_s)}{A}\left(\underset{(r_2;i_t)}{A}(K(f))\right)=\underset{(r_1,r_2;i_s,i_t)}{A}(K(f)),$$

где $i_p,i_s,i_t\in\{0,1,\ldots,n\}$.

Теорема 1. Если в множестве приведенных ядер $T(f)$ булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ хотя бы для одного приведенного ядра $K(f)_i$ можно указать такие операторы $\underset{i_p}{B}$, $\underset{(r;i_s)}{A}$, элементы $\sigma\in S_n$, $\xi\in S_q$

---

* Настоящая статья освещает результаты, полученные автором в рамках гранта Украинского Научно-Технологического Центра по Проектному соглашению № 412 при финансовой поддержке правительства США.

и такую матрицу толерантности $L \in E_n'$, что

$$\left(\underset{i_p}{B} \circ \underset{(r;i_s)}{A}\right) K_\xi^\sigma(f)_i \lhd L \ , \qquad (1)$$

то булева функция $f(x_1,\dots,x_n)$ реализуется на комбинационной схеме, состоящей из одного нейроного элемента и из сумматоров по mod 2.

Доказательство. Рассмотрим следующие возможные случаи: 1) $\underset{i_p}{B} = \underset{0}{B}$ и $\underset{(r;i_s)}{A} = \underset{(r;0)}{A}$; 2) $\underset{i_p}{B} = \underset{0}{B}$ и $\underset{(r;i_s)}{A} \neq \underset{(r;0)}{A}$; 3) $\underset{i_p}{B} \neq \underset{0}{B}$ и $\underset{(r;i_s)}{A} = \underset{(r;0)}{A}$; 4) $\underset{i_p}{B} \neq \underset{0}{B}$ и $\underset{(r;i_s)}{A} \neq \underset{(r;0)}{A}$.

В случае 1 имеем

$$\left(\underset{0}{B} \circ \underset{(r;0)}{A}\right) K(f) = \underset{0}{B}\left(\underset{(r;0)}{A}(K(f))\right) = \underset{0}{B}(K(f)) = K(f).$$

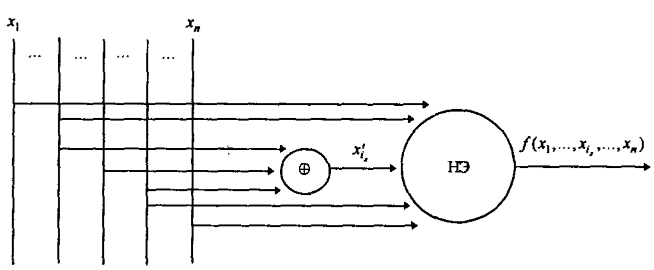
Следовательно, $K_\xi^\sigma(f)_i \lhd L$ и функция $f(x_1,\dots,x_n)$ реализуется на одном нейронном элементе.

Случай 2. При предположении, что выполняется (1) и $r = 2^{n-i_1} + \dots + 2^{n-i_t}$ получим

$$\left(\underset{0}{B} \circ \underset{(r;i_s)}{A}\right) K_\xi^\sigma(f)_i = \underset{(r;i_s)}{A}(K_\xi^\sigma(f)_i) \lhd L,$$

где $i_s \in \{i_1,\dots,i_t\}$. Тогда, согласно определению оператора $\underset{(r;i_s)}{A}$, функция $f(x_1,\dots,x_{i_s}',\dots,x_n)$ $(x_{i_s}' = x_{i_s} \oplus x_{i_1} \oplus \dots \oplus x_{i_t})$ реализуется на одном нейронном элементе.

Значит, для реализации функции $f(x_1,\dots,x_{i_s},\dots,x_n)$ необходимо иметь один нейронный элемент, реализующий функцию $f(x_1,\dots,x_{i_s}',\dots,x_n)$ и один сумматор по mod2, который расположен между входными переменными $x_1,\dots,x_n$ и нейронным элементом. Схематически это можно представить так (НЭ – нейронный элемент):

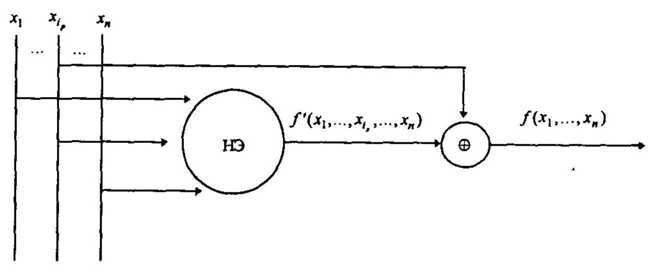


Итак, в случае 2 теорема доказана.

Пусть $\underset{i_p}{B} \neq \underset{0}{B}$, $\underset{(r;i_s)}{A} = \underset{(r;0)}{A}$ и выполняется (1).

Тогда $$\left(\underset{i_p}{B} \circ \underset{(r;0)}{A}\right) K_\xi^\sigma(f)_i = \underset{i_p}{B}(K_\xi^\sigma(f)_i) \lhd L.$$

Значит, функция $f'(x_1,\dots,x_n) = x_{i_p} \oplus f(x_1,\dots,x_n)$ реализуется на одном нейронном элементе. Отсюда $f(x_1,\dots,x_n) = x_{i_p} \oplus f'(x_1,\dots,x_n)$. Схематически это представляется так:



В случае 3 теорема доказана.

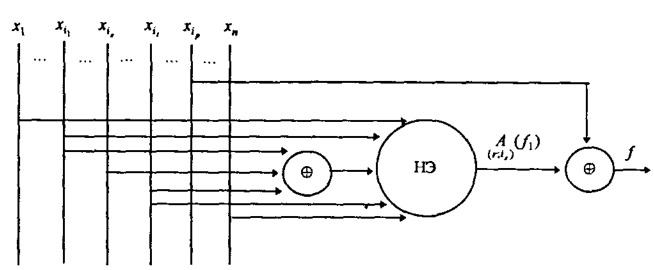
Пусть $\underset{i_p}{B} \neq \underset{0}{B}$, $\underset{(r;i_s)}{A} \neq \underset{(r;0)}{A}$ и

$$\left(\underset{i_p}{B} \circ \underset{(r;i_s)}{A}\right) K_\xi^\sigma(f)_i = \underset{i_p}{B}\left(\underset{(r;i_s)}{A}(K_\xi^\sigma(f)_i)\right) \lhd L.$$

Тогда функция $f_1(x_1,\dots,x_n) = \underset{i_p}{B}\left(\underset{(r;i_s)}{A}(f)\right)$ реализуется на одном нейронном элементе. Но

$$\underset{i_p}{B}\left(\underset{(r;i_s)}{A}(f)\right) = \underset{(r;i_s)}{A}(x_{i_s}) \oplus \underset{(r;i_s)}{A}(f) = \underset{(r;i_s)}{A}(x_{i_s} \oplus f).$$

Следовательно, $f_1(x_1,\dots,x_n) = \underset{(r;i_s)}{A}(x_{i_p} \oplus f)$ и $\underset{(r;i_s)}{A}(f_1) = x_{i_p} \oplus f$. Отсюда $f = x_{i_p} \oplus \underset{(r;i_s)}{A}(f_1)$. Если $r = 2^{n-i_1} + \dots + 2^{n-i_t}$, то в силу реализуемости функции $\underset{(r;i_s)}{A}(f_1)$ на одном нейронном элементе получим, что функция $f(x_1,\dots,x_n)$ реализуется на следующей комбинационной схеме



Итак, теорема доказана полностью .

Следствие. Если в множестве приведенных ядер $T(f)$ булевой функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ хотя бы для одного ядра $K(f)_i$ можно указать такие операторы $\underset{i_p}{B}$, $\underset{(r_1,\ldots,r_t;i_1,\ldots,i_s)}{A}$, элементы $\sigma \in S_n$, $\xi \in S_q$ и такую матрицу толерантности $L \in E_n^{'}$, что $\left(\underset{i_p}{B} \circ \underset{(r_1,\ldots,r_s;i_1,\ldots,i_s)}{A}\right) K_\xi^\sigma(f)_i \lhd L$, то булева функция $f(x_1,\ldots,x_n)$ реализуется на комбинационной схеме, состоящей из одного нейронного элемента и из сумматоров по mod 2.

Доказательство непосредственно следует из теоремы и из определения композиции операторов $\underset{(r_1;i_1)}{A},\ldots,\underset{(r_s;i_s)}{A}$.

Пусть $f(x_1,\ldots,x_n)$ булева функция в алфавите $\{0,1\}$ и пусть $g_f(y_1,\ldots,y_n)$ соответствующая ей функция в алфавите $\{1,-1\}$. Переход от функции $f(x_1,\ldots,x_n)$ к функции $g_f(y_1,\ldots,y_n)$ осуществим таким образом:

$$g_f(y_1,\ldots,y_n) = (-1)^{f(x_1,\ldots,x_n)},$$

где $y_i = (-1)^{x_i}$, $x_i \in \{0,1\}$ и $i = 1,2,\ldots,n$.

На множестве $G_n = \{y = (y_1,\ldots,y_n) | y_i \in \{1,-1\}\}$ определим функции $\chi_{i_1,\ldots,i_t}(y)$, $\chi_0(y)$ $(t \le n)$ со значениями $\{1;-1\}$ так:

$$\forall\, a \in G_n \quad \chi_{i_1,\ldots,i_t}(a) = y_{i_1}(a) \otimes y_{i_2}(a) \otimes \ldots \otimes y_{i_t}(a)$$

и

$$\chi_0(a) = 1,$$

где $y_i(a)$ – значение переменной y_i на наборе $a \in G_n$.

Пусть $g(y_1,\ldots,y_n)$ булева функция в алфавите $\{1;-1\}$ и

$$S_g = (s_0, s_1,\ldots,s_n, s_{12},\ldots,s_{(n-1)n}, s_{123},\ldots,s_{(n-2)(n-1)n},\ldots,s_{12\ldots n})$$

спектр этой функции, где

$$s_0 = 2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(a)\chi_0(a) = 2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(a), \qquad (2)$$

$$s_{i_1\ldots i_t} = 2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(a)\chi_{i_1,\ldots,i_t}(a). \qquad (3)$$

Пусть $\underset{(r;i)}{A}(K(f))$, $\underset{i}{B}(K(f))$ приведенные выше операторы и I_r множество индексов $\{i_1,\ldots,i_t\}$, удовлетворяющих условию $r = 2^{n-i_1} + \ldots + 2^{n-i_t}$. Далее проведем те преобразования в спектральной области булевых функций, которые соответствуют операторам $\underset{(r;i)}{A}(K(f))$ и $\underset{i}{B}(K(f))$.

Теорема 2. Если S_g спектр булевой функции $g(y_1,\ldots,y_n)$ и S_g' спектр булевой функции $\underset{(r;j)}{A}(g)$, то спектр S_g' строится из спектра S_g следующим образом: в каждом индексе спектральных коэффициентов S_g, содержащих j, индексы из I_r зачеркиваются, если они существуют, и добавляются, если они отсутствуют.

Доказательство. Из определения оператора $\underset{(r;j)}{A}(K(f))$ $(r = 2^{n-i_1} + \ldots + 2^{n-i_t})$ и из того, что сложению по mod 2 в алфавите $\{0,1\}$ соответствует операция умножения в алфавите $\{1,-1\}$ непосредственно следует:

$$\underset{(r;j)}{A}(g(y_1,\ldots,y_{j-1},y_j,y_{j+1},\ldots,y_n)) =$$

$$= g(y_1,\ldots,y_{j-1},y_j^{'},y_{j+1},\ldots,y_n),$$

где $y_j^{'} = y_j y_{i_1} \ldots y_{i_t}$ и $I_r = \{i_1,\ldots,i_t\}$.

На основании (2) и (3) получим

$$s_0^{'} = 2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(\alpha_1,\ldots,\alpha_j',\ldots,\alpha_n)\ \chi_0(\alpha_1,\ldots,\alpha_j',\ldots,\alpha_n) =$$

$$= 2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(\alpha_1,\ldots,\alpha_j',\ldots,\alpha_n)\cdot 1 = s_0,$$

$$s_j^{'} = 2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(\alpha_1,\ldots,\alpha_j',\ldots,\alpha_n)\ \chi(\alpha_1,\ldots,\alpha_j',\ldots,\alpha_n) =$$

$$= 2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(\alpha_1,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_n)\chi_{ji_1\ldots i_t}(\alpha_1,\ldots,\alpha_j,\ldots,\alpha_n) = s_{ji_1\ldots i_t},$$

$$s_k' = 2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(\alpha_1,\ldots,\alpha_j',\ldots,\alpha_n)\ \chi_k(\alpha_1,\ldots,\alpha_j',\ldots,\alpha_n) =$$

$$=2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)\,\chi_k(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)=s_k,(k\neq n),$$

$$s'_{ji_1}=2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(\alpha_1,\dots,\alpha'_j,\dots,\alpha_n)\,\chi_{ji_1}(\alpha_1,\dots,\alpha'_j,\dots,\alpha_n)=$$

$$=2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(\alpha_1,\dots,\alpha'_j,\dots,\alpha_n)\,y_j(\alpha_1,\dots,\alpha'_j,\dots,\alpha_n)\times$$

$$\times\, y_{i_1}(\alpha_1,\dots,\alpha'_j,\dots,\alpha_n)=2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)\times$$

$$\times\, y_j(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)\,y_{i_1}(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)\times$$

$$\times\dots\times y_{i_t}(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)\,y_{i_1}(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)=$$

$$=2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)\,y_j(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)\times$$

$$\times\, y_{i_2}(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)\times\dots\times y_{i_t}(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)=$$

$$=2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(a)\chi_{ji_2\dots i_t}(a)=s_{ji_2\dots i_t},$$

так как $\forall\, a\in G\quad y_i(a)y_i(a)=1$,

$$s'_{jk}=2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(\alpha_1,\dots,\alpha'_j,\dots,\alpha_n)\,\chi_{jk}(\alpha_1,\dots,\alpha'_j,\dots,\alpha_n)=$$

$$=2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(\alpha_1,\dots,\alpha'_j,\dots,\alpha_n)\,y_j(\alpha_1,\dots,\alpha'_j,\dots,\alpha_n)\times$$

$$\times\, y_k(\alpha_1,\dots,\alpha'_j,\dots,\alpha_n)=2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)\times$$

$$\times\,\chi_{ji_1\dots i_t k}(\alpha_1,\dots,\alpha_j,\dots,\alpha_n)=s_{ji_1\dots i_t k},$$

и т.д.

Итак, $s'_0=s_0$, $s'_j=s_{ji_1\dots i_t}$, $s'_k=s_k$ $(r\neq j)$, $s_{ji_1}=s_{ji_2\dots i_t}$, $s'_{jk}=s_{ji_1\dots i_t k},\dots,s'_{ji_1\dots i_t}=s_j$ и т.д. Теорема доказана.

Теорема 3. Если S_g спектр булевой функции $g(y_1,\dots,y_n)$ и S'_g спектр булевой функции $\underset{j}{B}(g)$, то спектр S'_g строится из спектра S_g следующим образом: в каждом индексе спектральных коэффициентов из S'_g исключается j там, где он имеется и дописывается туда, где он отсутствует.

Доказательство. Из определения оператора $\underset{j}{B}(K(f))$ и из того, что сложению $\oplus$ в алфавите $\{0,1\}$ соответствует умножение $\cdot$ в алфавите $\{1,-1\}$ получим

$$\underset{j}{B}(g(y_1,\dots,y_n))=y_j\cdot g(y_1,\dots,y_j,\dots,y_n).$$

В силу (2), (3)

$$s'_0=2^{-n}\sum_{a\in G_n}\underset{j}{B}(g(a))\chi_0(a)=2^{-n}\sum_{a\in G_n} y_j(a)g(a)\cdot 1=s_j,$$

$$s'_j=2^{-n}\sum_{a\in G_n}\underset{j}{B}(g(a))\chi_j(a)=2^{-n}\sum_{a\in G_n} y_j(a)g(a)y_j(a)=$$

$$=2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(a)=s_0,$$

так как $\forall\, a\in G_n\quad y_i(a)y_i(a)=1$,

$$s'_k=2^{-n}\sum_{a\in G_n}\underset{j}{B}(g(a))\chi_r(a)=2^{-n}\sum_{a\in G_n} y_j(a)g(a)y_r(a)=$$

$$=2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(a)\chi_{jr}(a)=s_{jk},\ k\neq j,$$

$$s'_{jk}=2^{-n}\sum_{a\in G_n}\underset{j}{B}(g(a))\chi_{jr}(a)=2^{-n}\sum_{a\in G_n} y_j(a)g(a)y_j(a)y_r(a)=$$

$$=2^{-n}\sum_{a\in G_n} g(a)\chi_r(a)=s_k,$$

и т.д.

Итак, $s'_0=s_j$, $s'_j=s_0$, $s'_k=s_{jk}$, $s'_{jk}=s_k$, $s'_{jkm}=s_{km}$, $s'_{km}=s_{jkm}$ и т.д. Теорема доказана.

Если через φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 соответственно обозначим инвариантные операциии [2], то теорема 1 на спектральном языке сформулируется так:

Теорема 4. Если спектр S_f булевой функции $f(x_1,\dots,x_n)$ при помощи инвариантных операций φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 и операторов $\underset{(r;j)}{A}$, $\underset{i}{B}$ можно преобразовать так, чтобы $(n+1)$-мерный начальный отрезок преобразованного спектра S'_f был бы каноническим характеристическим вектором некоторой функции, реализуемой на одном нейронном элементе, то функция $f(x_1,\dots,x_n)$ может быть реализована на комбинационной схеме, состоящей из одного нейронного элемента и из сумматоров по mod 2.

Литература

1. Параллельная обработка информации. В 5-ти т.- Т.5. Проблемно-ориентированные и специализированные средства обработки информации/ Под ред. Б.Н.Малиновского.- Киев: Наук. думка, 1990.- 503 с.
2. Дертоузос М. Пороговая логика.- М.: Мир, 1967.- 462 с.

Гече Федор Элимирович. Родился в 1951 году. В 1973 году закончил математический факультет Ужгородского госуниверситета. Кандидат физ.-мат. наук с 1982г. Доцент кафедры кибернетики и прикладной математики Ужгородского госуниверситета, старший научный сотрудник Государственного научно-исследовательского института информационной инфраструктуры. Область научных интересов: пороговая логика, методы представления, передачи и распознования дискретных сигналов и изображений, методы оптимизации и математическое моделирование. Автор более 40 научных работ.

РЕАЛІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ НА ОДНОМУ НЕЙРОННОМУ ЕЛЕМЕНТІ ТА СУМАТОРАХ ЗА mod 2

Ф. Е. Гече
Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури, Ужгородська філія, Ужгород

В роботі показано, що коли над булевими функціями виконано певні логічні операції, то клас булевих функцій, які допускають реалізацію на одному нейронному елементі, суттєво розширюється. Досліджується також питання про те, які саме перетворення у спектральній області булевих функцій відповідають цим операціям.

REALIZATION OF BOOLEAN FUNCTIONS ON ONE NEURON ELEMENT AND mod 2 ADDERS

F. E. Geche
State Scientific and Research Institute of Information Infrastructure, Uzhgorod branch, Uzhgorod

In this paper is shown that if we do certain logic transformation over bool functions, then the class of bool functions, which assume realization on one neuron element, will be broadened materially. The question about which transformation within the spectral region of bool functions correspond to these operations is investigated.