Групи. Кільця. Поля

Лектор — доц. Шапочка Ігор

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

1 листопада 2022 року

Нехай M — будь-яка непорожня множина.

Нехай M — будь-яка непорожня множина.

Означення 1

Бінарною алгебраїчною операцією на множині M називається довільне відображення $\tau : M \times M \to M$.

Нехай M — будь-яка непорожня множина.

Означення 1

Бінарною алгебраїчною операцією на множині M називається довільне відображення $\tau : M \times M \to M$. Образ $\tau(a, b)$ впорядкованої пари $(a, b) \in M \times M$

Нехай M — будь-яка непорожня множина.

Означення 1

Бінарною алгебраїчною операцією на множині M називається довільне відображення $\tau : M \times M \to M$. Образ $\tau(a, b)$ впорядкованої пари $(a, b) \in M \times M$ позначають іноді через $a\tau b$,

Нехай M — будь-яка непорожня множина.

Означення 1

Бінарною алгебраїчною операцією на множині M називається довільне відображення $\tau : M \times M \to M$. Образ $\tau(a, b)$ впорядкованої пари $(a, b) \in M \times M$ позначають іноді через $a\tau b$, а ще частіше бінарну операцію на M позначають деяким спеціальним символом:

$$+, \cdot, *, \star, \circ, \heartsuit, \cap, \cup, \vee, \wedge, \diamond, \oplus, \otimes, \odot, \ \ldots$$

Нехай M — будь-яка непорожня множина.

Означення 1

Бінарною алгебраїчною операцією на множині M називається довільне відображення $\tau : M \times M \to M$. Образ $\tau(a, b)$ впорядкованої пари $(a, b) \in M \times M$ позначають іноді через $a\tau b$, а ще частіше бінарну операцію на M позначають деяким спеціальним символом:

$$+, \cdot, *, \star, \circ, \heartsuit, \cap, \cup, \vee, \wedge, \diamond, \oplus, \otimes, \odot, \ \ldots$$

У перших двох випадках образи $a + b$ та $a \cdot b$ (або просто ab) пари $(a, b) \in M \times M$ будемо називати відповідно *сумою* та *добутком* елементів $a, b \in M$,

Нехай M — будь-яка непорожня множина.

Означення 1

Бінарною алгебраїчною операцією на множині M називається довільне відображення $\tau : M \times M \to M$. Образ $\tau(a,b)$ впорядкованої пари $(a,b) \in M \times M$ позначають іноді через $a\tau b$, а ще частіше бінарну операцію на M позначають деяким спеціальним символом:

$$+, \cdot, *, \star, \circ, \heartsuit, \cap, \cup, \vee, \wedge, \diamond, \oplus, \otimes, \odot, \ \ldots$$

У перших двох випадках образи $a+b$ та $a \cdot b$ (або просто ab) пари $(a,b) \in M \times M$ будемо називати відповідно *сумою* та *добутком* елементів $a, b \in M$, а самі операції $\cdot$ та $+$ — відповідно множенням та додаванням.

Нехай M — будь-яка непорожня множина.

Означення 1

Бінарною алгебраїчною операцією на множині M називається довільне відображення $\tau : M \times M \to M$. Образ $\tau(a, b)$ впорядкованої пари $(a, b) \in M \times M$ позначають іноді через $a \tau b$, а ще частіше бінарну операцію на M позначають деяким спеціальним символом:

$$+, \cdot, *, \star, \circ, \heartsuit, \cap, \cup, \vee, \wedge, \diamond, \oplus, \otimes, \odot, \ \ldots$$

У перших двох випадках образи $a + b$ та $a \cdot b$ (або просто ab) пари $(a, b) \in M \times M$ будемо називати відповідно *сумою* та *добутком* елементів $a, b \in M$, а самі операції $\cdot$ та $+$ — відповідно множенням та додаванням.

Зауваження 1

Названі вище операції — умовні. На множині M може бути задано декілька алгебраїчних операцій.

Приклад 1.

Прикладом бінарної алгебраїчної операції є «звичне» додавання натуральних чисел,

Приклад 1.

Прикладом бінарної алгебраїчної операції є «звичне» додавання натуральних чисел, тобто відображення $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

Приклад 1.

Прикладом бінарної алгебраїчної операції є «звичне» додавання натуральних чисел, тобто відображення $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, задане за правилом:

$$+(1,1) = 1 + 1 = 2,$$

Приклад 1.

Прикладом бінарної алгебраїчної операції є «звичне» додавання натуральних чисел, тобто відображення $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, задане за правилом:

$$+(1,1) = 1 + 1 = 2, \quad +(1,2) = 1 + 2 = 3,$$

Приклад 1.

Прикладом бінарної алгебраїчної операції є «звичне» додавання натуральних чисел, тобто відображення $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, задане за правилом:

$$\begin{array}{cccc}
+(1,1) = 1+1 = 2, & +(1,2) = 1+2 = 3, & +(1,3) = 1+3 = 4, & \ldots \\
+(2,1) = 2+1 = 3, & +(2,2) = 2+2 = 4, & +(2,3) = 2+3 = 5, & \ldots \\
+(3,1) = 3+1 = 2, & +(3,2) = 3+2 = 5, & +(3,3) = 3+3 = 6, & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}$$

Приклад 2.

Прикладом бінарної алгебраїчної операції є додавання

$$+ : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

десяткових цифр, тобто елементів множини

$$\mathcal{D} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},$$

Приклад 2.

Прикладом бінарної алгебраїчної операції є додавання

$$+ : \mathcal{D} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$$

десяткових цифр, тобто елементів множини

$$\mathcal{D} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\},$$

задане за правилом:

$$\begin{array}{ccccc}
0+0=0, & 0+1=1, & 0+2=2, & \ldots, & 0+9=9, \\
1+0=1, & 1+1=2, & 1+2=3, & \ldots, & 1+9=0, \\
2+0=2, & 2+1=3, & 2+2=4, & \ldots, & 2+9=1, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
8+0=8, & 8+1=9, & 8+2=0, & \ldots, & 8+9=7, \\
9+0=9, & 9+1=0, & 9+2=1, & \ldots, & 9+9=8.
\end{array}$$

Приклад 3.

Натуральні числа можна представляти різним чином, зокрема використовуючи римську систему числення, яка базується на використанні латинських літер:

$$\mathbb{N} \cong \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}, \mathrm{VII}, \mathrm{VIII}, \mathrm{IX}, \mathrm{X}, \dots, \\ \dots, \mathrm{L}, \dots, \mathrm{C}, \dots, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{M}, \dots\}.$$

Приклад 3.

Натуральні числа можна представляти різним чином, зокрема використовуючи римську систему числення, яка базується на використанні латинських літер:

$$\mathbb{N} \cong \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}, \mathrm{VII}, \mathrm{VIII}, \mathrm{IX}, \mathrm{X}, \dots, \\ \dots, \mathrm{L}, \dots, \mathrm{C}, \dots, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{M}, \dots\}.$$

«Звична» операція додавання натуральних чисел, записаних у римській формі вимагає більш детального пояснення.

Приклад 3.

Натуральні числа можна представляти різним чином, зокрема використовуючи римську систему числення, яка базується на використанні латинських літер:

$$\mathbb{N} \cong \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}, \mathrm{VII}, \mathrm{VIII}, \mathrm{IX}, \mathrm{X}, \ldots, \\ \ldots, \mathrm{L}, \ldots, \mathrm{C}, \ldots, \mathrm{D}, \ldots, \mathrm{M}, \ldots\}.$$

«Звична» операція додавання натуральних чисел, записаних у римській формі вимагає більш детального пояснення. Тому наведемо тільки деякі приклади:

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = \mathrm{III},$$

Приклад 3.

Натуральні числа можна представляти різним чином, зокрема використовуючи римську систему числення, яка базується на використанні латинських літер:

$$\mathbb{N} \cong \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}, \mathrm{VII}, \mathrm{VIII}, \mathrm{IX}, \mathrm{X}, \dots, \\ \dots, \mathrm{L}, \dots, \mathrm{C}, \dots, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{M}, \dots\}.$$

«Звична» операція додавання натуральних чисел, записаних у римській формі вимагає більш детального пояснення. Тому наведемо тільки деякі приклади:

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = \mathrm{III}, \quad \mathrm{II} + \mathrm{III} = \mathrm{V},$$

Приклад 3.

Натуральні числа можна представляти різним чином, зокрема використовуючи римську систему числення, яка базується на використанні латинських літер:

$$\mathbb{N} \cong \{\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \mathrm{IV}, \mathrm{V}, \mathrm{VI}, \mathrm{VII}, \mathrm{VIII}, \mathrm{IX}, \mathrm{X}, \dots, \\ \dots, \mathrm{L}, \dots, \mathrm{C}, \dots, \mathrm{D}, \dots, \mathrm{M}, \dots\}.$$

«Звична» операція додавання натуральних чисел, записаних у римській формі вимагає більш детального пояснення. Тому наведемо тільки деякі приклади:

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} = \mathrm{III}, \quad \mathrm{II} + \mathrm{III} = \mathrm{V}, \quad \mathrm{XXV} + \mathrm{XLII} = \mathrm{LXVII}.$$

Приклад 4.

Двійкова система числення, яка використовується у сучасних ЕОМ базується на бінарних алгебраїчних операція додавання і множення, заданих на множині

$$\mathbb{F}_2 = \{0, 1\},$$

заданих наступними таблицями:

$+$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

Означення 2

Непорожня множина G,

Означення 2

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення $\cdot : G \times G \to G$,

Означення 2

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення $\cdot : G \times G \to G$, називається групою,

Означення 2

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення $\cdot : G \times G \to G$, називається групою,якщо виконуються наступні умови:

1) алгебраїчна операція є асоціативною,

Означення 2

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення $\cdot : G \times G \to G$, називається **групою**,якщо виконуються наступні умови:

1) **алгебраїчна операція є асоціативною**, тобто для довільних елементів a, b, $c \in G$ справджується рівність $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;

Означення 2

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення $\cdot : G \times G \to G$, називається групою,якщо виконуються наступні умови:

1) алгебраїчна операція є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, $c \in G$ справджується рівність $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
2) існує одиничний елемент,

Означення 2

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення $\cdot : G \times G \to G$, називається групою,якщо виконуються наступні умови:

1) алгебраїчна операція є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, $c \in G$ справджується рівність $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
2) існує одиничний елемент, тобто існує такий елемент e множини G,

Означення 2

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення $\cdot : G \times G \to G$, називається групою,якщо виконуються наступні умови:

1) алгебраїчна операція є асоціативною, тобто для довільних елементів $a, b, c \in G$ справджується рівність $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
2) існує одиничний елемент, тобто існує такий елемент e множини G, що для довільного елемента $a \in G$ справджуються рівності $a \cdot e = e \cdot a = a$;

Означення 2

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення $\cdot : G \times G \to G$, називається групою,якщо виконуються наступні умови:

1) алгебраїчна операція є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, $c \in G$ справджується рівність $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
2) існує одиничний елемент, тобто існує такий елемент e множини G, що для довільного елемента $a \in G$ справджуються рівності $a \cdot e = e \cdot a = a$;
3) для всякого елемента $a \in G$

Означення 2

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення $\cdot : G \times G \to G$, називається групою,якщо виконуються наступні умови:

1) алгебраїчна операція є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, $c \in G$ справджується рівність $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
2) існує одиничний елемент, тобто існує такий елемент e множини G, що для довільного елемента $a \in G$ справджуються рівності $a \cdot e = e \cdot a = a$;
3) для всякого елемента $a \in G$ існує обернений елемент a^{-1} із множини G,

Означення 2

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення $\cdot : G \times G \to G$, називається **групою**,якщо виконуються наступні умови:

1) **алгебраїчна операція є асоціативною**, тобто для довільних елементів a, b, $c \in G$ справджується рівність $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
2) **існує одиничний елемент**, тобто існує такий елемент e множини G, що для довільного елемента $a \in G$ справджуються рівності $a \cdot e = e \cdot a = a$;
3) для всякого елемента $a \in G$ існує **обернений елемент** a^{-1} із множини G, тобто такий елемент, що $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Означення 2

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення $\cdot : G \times G \to G$, називається групою,якщо виконуються наступні умови:

1) алгебраїчна операція є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, $c \in G$ справджується рівність $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
2) існує одиничний елемент, тобто існує такий елемент e множини G, що для довільного елемента $a \in G$ справджуються рівності $a \cdot e = e \cdot a = a$;
3) для всякого елемента $a \in G$ існує обернений елемент a^{-1} із множини G, тобто такий елемент, що $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Зауваження 2

Якщо множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція додавання, є групою,

Означення 2

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення $\cdot : G \times G \to G$, називається групою,якщо виконуються наступні умови:

1) алгебраїчна операція є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, $c \in G$ справджується рівність $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
2) існує одиничний елемент, тобто існує такий елемент e множини G, що для довільного елемента $a \in G$ справджуються рівності $a \cdot e = e \cdot a = a$;
3) для всякого елемента $a \in G$ існує обернений елемент a^{-1} із множини G, тобто такий елемент, що $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Зауваження 2

Якщо множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція додавання, є групою,тоді одиничний елемент групи G будемо називати нульовим,

Означення 2

Непорожня множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція множення $\cdot : G \times G \to G$, називається групою,якщо виконуються наступні умови:

1) алгебраїчна операція є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, $c \in G$ справджується рівність $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$;
2) існує одиничний елемент, тобто існує такий елемент e множини G, що для довільного елемента $a \in G$ справджуються рівності $a \cdot e = e \cdot a = a$;
3) для всякого елемента $a \in G$ існує обернений елемент a^{-1} із множини G, тобто такий елемент, що $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e$.

Зауваження 2

Якщо множина G, на якій задана бінарна алгебраїчна операція додавання, є групою,тоді одиничний елемент групи G будемо називати нульовим, а обернений елемент до елемента $a \in G$ — протилежним до a і позначатимемо його через $-a$.

Означення 3

Якщо для довільних елементів a, b групи G справджується рівність $ab = ba$,

Означення 3

Якщо для довільних елементів a, b групи G справджується рівність $ab = ba$, то група G називається абелевою.

Означення 3

Якщо для довільних елементів a, b групи G справджується рівність $ab = ba$, то група G називається абелевою.

Означення 4

Група G називається скінченною, якщо множина G є скінченною.

Означення 3

Якщо для довільних елементів a, b групи G справджується рівність $ab = ba$, то група G називається абелевою.

Означення 4

Група G називається скінченною, якщо множина G є скінченною. Число елементів множини G називається порядком групи G і позначається $|G|$.

Означення 3

Якщо для довільних елементів a, b групи G справджується рівність $ab = ba$, то група G називається абелевою.

Означення 4

Група G називається скінченною, якщо множина G є скінченною. Число елементів множини G називається порядком групи G і позначається $|G|$.

Означення 5

Нехай G_1 та G_2 — групи, на яких задано бінарні алгебраїчні операції множення відповідно $\cdot$ та $*$.

Означення 3

Якщо для довільних елементів a, b групи G справджується рівність $ab = ba$, то група G називається абелевою.

Означення 4

Група G називається скінченною, якщо множина G є скінченною. Число елементів множини G називається порядком групи G і позначається $|G|$.

Означення 5

Нехай G_1 та G_2 — групи, на яких задано бінарні алгебраїчні операції множення відповідно $\cdot$ та $*$. Група G_1 називається ізоморфною групі G_2,

Означення 3

Якщо для довільних елементів a, b групи G справджується рівність $ab = ba$, то група G називається абелевою.

Означення 4

Група G називається скінченною, якщо множина G є скінченною. Число елементів множини G називається порядком групи G і позначається $|G|$.

Означення 5

Нехай G_1 та G_2 — групи, на яких задано бінарні алгебраїчні операції множення відповідно $\cdot$ та $*$. Група G_1 називається ізоморфною групі G_2, якщо існує бієктивне відображення $f : G_1 \to G_2$ таке,

Означення 3

Якщо для довільних елементів a, b групи G справджується рівність $ab = ba$, то група G називається абелевою.

Означення 4

Група G називається скінченною, якщо множина G є скінченною. Число елементів множини G називається порядком групи G і позначається $|G|$.

Означення 5

Нехай G_1 та G_2 — групи, на яких задано бінарні алгебраїчні операції множення відповідно $\cdot$ та $*$. Група G_1 називається ізоморфною групі G_2, якщо існує бієктивне відображення $f : G_1 \to G_2$ таке, що

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$$

для будь-яких елементів a, $b \in G_1$.

Означення 3

Якщо для довільних елементів a, b групи G справджується рівність $ab = ba$, то група G називається абелевою.

Означення 4

Група G називається скінченною, якщо множина G є скінченною. Число елементів множини G називається порядком групи G і позначається $|G|$.

Означення 5

Нехай G_1 та G_2 — групи, на яких задано бінарні алгебраїчні операції множення відповідно $\cdot$ та $*$. Група G_1 називається ізоморфною групі G_2, якщо існує бієктивне відображення $f : G_1 \to G_2$ таке, що

$$f(a \cdot b) = f(a) * f(b)$$

для будь-яких елементів a, $b \in G_1$. Ізоморфізм групи G_1 групі G_2 будемо символічно позначати $G_1 \cong G_2$.

Означення 6

Підмножина H групи G називається підгрупою групи G,

Означення 6

Підмножина H групи G називається підгрупою групи G, якщо відносно алгебраїчної операції, заданої на G,

Означення 6

Підмножина H групи G називається **підгрупою** групи G, якщо відносно алгебраїчної операції, заданої на G, множина H є групою.

Означення 6

Підмножина H групи G називається підгрупою групи G, якщо відносно алгебраїчної операції, заданої на G, множина H є групою.

Теорема 1

Підмножина H групи G є підгрупою групи G

Означення 6

Підмножина H групи G називається підгрупою групи G, якщо відносно алгебраїчної операції, заданої на G, множина H є групою.

Теорема 1

Підмножина H групи G є підгрупою групи G тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із H виконуються такі умови:

Означення 6

Підмножина H групи G називається підгрупою групи G, якщо відносно алгебраїчної операції, заданої на G, множина H є групою.

Теорема 1

Підмножина H групи G є підгрупою групи G тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із H виконуються такі умови: $1)$ $ab \in H$*;*

Означення 6

Підмножина H групи G називається підгрупою групи G, якщо відносно алгебраїчної операції, заданої на G, множина H є групою.

Теорема 1

Підмножина H групи G є підгрупою групи G тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із H виконуються такі умови: $1)\ ab \in H$; $2)\ a^{-1} \in H$.

Означення 7

Непорожня множина K,

Означення 7

Непорожня множина K, на якій задано дві бінарні алгебраїчні операції додавання і множення,

Означення 7

Непорожня множина K, на якій задано дві бінарні алгебраїчні операції додавання і множення, називається **кільцем**,

Означення 7

Непорожня множина K, на якій задано дві бінарні алгебраїчні операції додавання і множення, називається кільцем, якщо виконуються такі умови:

Означення 7

Непорожня множина K, на якій задано дві бінарні алгебраїчні операції додавання і множення, називається **кільцем**, якщо виконуються такі умови:

1) множина K відносно операції додавання є абелевою групою

Означення 7

Непорожня множина K, на якій задано дві бінарні алгебраїчні операції додавання і множення, називається кільцем, якщо виконуються такі умови:

1) множина K відносно операції додавання є абелевою групою (цю групу називатимемо адитивною групою кільця);

Означення 7

Непорожня множина K, на якій задано дві бінарні алгебраїчні операції додавання і множення, називається **кільцем**, якщо виконуються такі умови:

1) множина K відносно операції додавання є абелевою групою (цю групу називатимемо **адитивною групою кільця**);
2) бінарна алгебраїчна операція множення є асоціативною,

Означення 7

Непорожня множина K, на якій задано дві бінарні алгебраїчні операції додавання і множення, називається **кільцем**, якщо виконуються такі умови:

1) множина K відносно операції додавання є абелевою групою (цю групу називатимемо **адитивною групою кільця**);
2) бінарна алгебраїчна операція множення є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, c множини K справджується рівність

$$(ab)c = a(bc);$$

Означення 7

Непорожня множина K, на якій задано дві бінарні алгебраїчні операції додавання і множення, називається кільцем, якщо виконуються такі умови:

1) множина K відносно операції додавання є абелевою групою (цю групу називатимемо адитивною групою кільця);
2) бінарна алгебраїчна операція множення є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, c множини K справджується рівність
$$(ab)c = a(bc);$$
3) бінарні алгебраїчні операції додавання і множення пов'язані дистрибутивними законами,

Означення 7

Непорожня множина K, на якій задано дві бінарні алгебраїчні операції додавання і множення, називається кільцем, якщо виконуються такі умови:

1) множина K відносно операції додавання є абелевою групою (цю групу називатимемо адитивною групою кільця);
2) бінарна алгебраїчна операція множення є асоціативною, тобто для довільних елементів a, b, c множини K справджується рівність
$$(ab)c = a(bc);$$
3) бінарні алгебраїчні операції додавання і множення пов'язані дистрибутивними законами, тобто для довільних елементів a, b, c множини K справджуються рівності
$$a(b+c) = ab + ac, \qquad (a+b)c = ac + bc.$$

Означення 8

Кільце K називається комутативним,

Означення 8

Кільце K називається **комутативним**, якщо $ab = ba$ для довільних елементів $a, b \in K$.

Означення 8

Кільце K називається **комутативним**, якщо $ab = ba$ для довільних елементів $a, b \in K$.

Означення 9

Кільце K називається **кільцем з одиницею**,

Означення 8

Кільце K називається комутативним, якщо $ab = ba$ для довільних елементів $a, b \in K$.

Означення 9

Кільце K називається кільцем з одиницею,якщо в кільці K існує елемент (позначатимемо його звичною одиницею) 1 такий, що

Означення 8

Кільце K називається комутативним, якщо $ab = ba$ для довільних елементів $a, b \in K$.

Означення 9

Кільце K називається кільцем з одиницею,якщо в кільці K існує елемент (позначатимемо його звичною одиницею) 1 такий, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного елемента $a \in K$.

Означення 8

Кільце K називається комутативним, якщо $ab = ba$ для довільних елементів $a, b \in K$.

Означення 9

Кільце K називається кільцем з одиницею,якщо в кільці K існує елемент (позначатимемо його звичною одиницею) 1 такий, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного елемента $a \in K$.

Означення 10

Нехай K — кільце з одиницею.

Означення 8

Кільце K називається комутативним, якщо $ab = ba$ для довільних елементів $a, b \in K$.

Означення 9

Кільце K називається кільцем з одиницею,якщо в кільці K існує елемент (позначатимемо його звичною одиницею) 1 такий, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного елемента $a \in K$.

Означення 10

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент a кільця K називається оборотним,

Означення 8

Кільце K називається **комутативним**, якщо $ab = ba$ для довільних елементів $a, b \in K$.

Означення 9

Кільце K називається **кільцем з одиницею**,якщо в кільці K існує елемент (позначатимемо його звичною одиницею) 1 такий, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного елемента $a \in K$.

Означення 10

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент a кільця K називається **оборотним**, якщо існує елемент $b \in K$ такий, що

Означення 8

Кільце K називається комутативним, якщо $ab = ba$ для довільних елементів $a, b \in K$.

Означення 9

Кільце K називається кільцем з одиницею,якщо в кільці K існує елемент (позначатимемо його звичною одиницею) 1 такий, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного елемента $a \in K$.

Означення 10

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент a кільця K називається оборотним, якщо існує елемент $b \in K$ такий, що$ab = ba = 1$.

Означення 8

Кільце K називається **комутативним**, якщо $ab = ba$ для довільних елементів $a, b \in K$.

Означення 9

Кільце K називається **кільцем з одиницею**,якщо в кільці K існує елемент (позначатимемо його звичною одиницею) 1 такий, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного елемента $a \in K$.

Означення 10

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент a кільця K називається **оборотним**, якщо існує елемент $b \in K$ такий, що$ab = ba = 1$.

Означення 11

Нехай K — кільце з одиницею.

Означення 8

Кільце K називається **комутативним**, якщо $ab = ba$ для довільних елементів $a, b \in K$.

Означення 9

Кільце K називається **кільцем з одиницею**,якщо в кільці K існує елемент (позначатимемо його звичною одиницею) 1 такий, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного елемента $a \in K$.

Означення 10

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент a кільця K називається **оборотним**, якщо існує елемент $b \in K$ такий, що$ab = ba = 1$.

Означення 11

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент b кільця K називається **оберненим** до елемента a цього ж кільця,

Означення 8

Кільце K називається комутативним, якщо $ab = ba$ для довільних елементів a, $b \in K$.

Означення 9

Кільце K називається кільцем з одиницею,якщо в кільці K існує елемент (позначатимемо його звичною одиницею) 1 такий, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного елемента $a \in K$.

Означення 10

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент a кільця K називається оборотним, якщо існує елемент $b \in K$ такий, що$ab = ba = 1$.

Означення 11

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент b кільця K називається оберненим до елемента a цього ж кільця, якщо

Означення 8

Кільце K називається комутативним, якщо $ab = ba$ для довільних елементів $a, b \in K$.

Означення 9

Кільце K називається кільцем з одиницею,якщо в кільці K існує елемент (позначатимемо його звичною одиницею) 1 такий, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного елемента $a \in K$.

Означення 10

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент a кільця K називається оборотним, якщо існує елемент $b \in K$ такий, що$ab = ba = 1$.

Означення 11

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент b кільця K називається оберненим до елемента a цього ж кільця, якщо $ab = ba = 1$.

Означення 8

Кільце K називається **комутативним**, якщо $ab = ba$ для довільних елементів a, $b \in K$.

Означення 9

Кільце K називається **кільцем з одиницею**,якщо в кільці K існує елемент (позначатимемо його звичною одиницею) 1 такий, що $1 \cdot a = = a \cdot 1 = a$ для довільного елемента $a \in K$.

Означення 10

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент a кільця K називається **оборотним**, якщо існує елемент $b \in K$ такий, що$ab = ba = 1$.

Означення 11

Нехай K — кільце з одиницею. Елемент b кільця K називається **оберненим** до елемента a цього ж кільця, якщо $ab = ba = 1$.

Якщо a — оборотний елемент кільця K, то обернений до нього елемент позначатимемо a^{-1}.

Теорема 2

Нехай K — кільце з одиницею.

Теорема 2

Нехай K — кільце з одиницею. Множина всіх оборотних елементів кільця K відносно бінарної алгебраїчної операції множення елементів цього кільця є групою.

Теорема 2

Нехай K — кільце з одиницею. Множина всіх оборотних елементів кільця K відносно бінарної алгебраїчної операції множення елементів цього кільця є групою.

Означення 12

Групу всіх оборотних елементів кільця K з одиницею називають мультиплікативною групою кільця K і позначають K^*.

Теорема 2

Нехай K — кільце з одиницею. Множина всіх оборотних елементів кільця K відносно бінарної алгебраїчної операції множення елементів цього кільця є групою.

Означення 12

Групу всіх оборотних елементів кільця K з одиницею називають мультиплікативною групою кільця K і позначають K^*.

Означення 13

Кільце K_1 називається ізоморфним кільцю K_2,

Теорема 2

Нехай K — кільце з одиницею. Множина всіх оборотних елементів кільця K відносно бінарної алгебраїчної операції множення елементів цього кільця є групою.

Означення 12

Групу всіх оборотних елементів кільця K з одиницею називають мультиплікативною групою кільця K і позначають K^*.

Означення 13

Кільце K_1 називається ізоморфним кільцю K_2, якщо існує бієктивне відображення $f : K_1 \to K_2$ таке, що

Теорема 2

Нехай K — кільце з одиницею. Множина всіх оборотних елементів кільця K відносно бінарної алгебраїчної операції множення елементів цього кільця є групою.

Означення 12

Групу всіх оборотних елементів кільця K з одиницею називають мультиплікативною групою кільця K і позначають K^*.

Означення 13

Кільце K_1 називається ізоморфним кільцю K_2, якщо існує бієктивне відображення $f : K_1 \to K_2$ таке, що

$$f(a+b) = f(a) + f(b),$$

Теорема 2

Нехай K — кільце з одиницею. Множина всіх оборотних елементів кільця K відносно бінарної алгебраїчної операції множення елементів цього кільця є групою.

Означення 12

Групу всіх оборотних елементів кільця K з одиницею називають мультиплікативною групою кільця K і позначають K^*.

Означення 13

Кільце K_1 називається ізоморфним кільцю K_2, якщо існує бієктивне відображення $f : K_1 \to K_2$ таке, що

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \qquad f(ab) = f(a)f(b)$$

для довільних елементів $a, b \in K_1$.

Теорема 2

Нехай K — кільце з одиницею. Множина всіх оборотних елементів кільця K відносно бінарної алгебраїчної операції множення елементів цього кільця є групою.

Означення 12

Групу всіх оборотних елементів кільця K з одиницею називають мультиплікативною групою кільця K і позначають K^*.

Означення 13

Кільце K_1 називається ізоморфним кільцю K_2, якщо існує бієктивне відображення $f : K_1 \to K_2$ таке, що

$$f(a+b) = f(a) + f(b), \qquad f(ab) = f(a)f(b)$$

для довільних елементів $a, b \in K_1$. Ізоморфізм кільця K_1 кільцю K_2 також будемо символічно позначати $K_1 \cong K_2$.

Означення 14

Підмножина R кільця K називається **підкільцем** кільця K,

Означення 14

Підмножина R кільця K називається **підкільцем** кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K,

Означення 14

Підмножина R кільця K називається підкільцем кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K, R є кільцем.

Означення 14

Підмножина R кільця K називається підкільцем кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K, R є кільцем.

Теорема 3

Підмножина R кільця K є підкільцем кільця K

Означення 14

Підмножина R кільця K називається підкільцем кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K, R є кільцем.

Теорема 3

Підмножина R кільця K є підкільцем кільця K тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із R виконуються такі умови:

Означення 14

Підмножина R кільця K називається підкільцем кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K, R є кільцем.

Теорема 3

Підмножина R кільця K є підкільцем кільця K тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із R виконуються такі умови: $1)$ $a+b \in R$;

Означення 14

Підмножина R кільця K називається підкільцем кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K, R є кільцем.

Теорема 3

Підмножина R кільця K є підкільцем кільця K тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із R виконуються такі умови: $1)$ $a+b \in R$; $2)$ $-a \in R$;

Означення 14

Підмножина R кільця K називається **підкільцем** кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K, R є кільцем.

Теорема 3

Підмножина R кільця K є підкільцем кільця K тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із R виконуються такі умови: $1)$ $a+b \in R$; $2)$ $-a \in R$; $3)$ $ab \in R$.

Означення 14

Підмножина R кільця K називається підкільцем кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K, R є кільцем.

Теорема 3

Підмножина R кільця K є підкільцем кільця K тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із R виконуються такі умови: 1) $a+b \in R$; 2) $-a \in R$; 3) $ab \in R$.

Означення 15

Комутативне кільце P з одиницею називається полем,

Означення 14

Підмножина R кільця K називається підкільцем кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K, R є кільцем.

Теорема 3

Підмножина R кільця K є підкільцем кільця K тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із R виконуються такі умови: $1)\ a+b \in R$; $2)\ -a \in R$; $3)\ ab \in R$.

Означення 15

Комутативне кільце P з одиницею називається полем, якщо довільний ненульовий елемент кільця P є оборотним,

Означення 14

Підмножина R кільця K називається підкільцем кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K, R є кільцем.

Теорема 3

Підмножина R кільця K є підкільцем кільця K тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із R виконуються такі умови: 1) $a+b \in R$; 2) $-a \in R$; 3) $ab \in R$.

Означення 15

Комутативне кільце P з одиницею називається полем, якщо довільний ненульовий елемент кільця P є оборотним, тобто $P^* = P \setminus \{0\}$.

Означення 14

Підмножина R кільця K називається підкільцем кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K, R є кільцем.

Теорема 3

Підмножина R кільця K є підкільцем кільця K тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із R виконуються такі умови: $1)\ a+b \in R$; $2)\ -a \in R$; $3)\ ab \in R$.

Означення 15

Комутативне кільце P з одиницею називається полем, якщо довільний ненульовий елемент кільця P є оборотним, тобто $P^* = P \setminus \{0\}$.

Означення 16

Якщо поле P є підкільцем поля F, то кажуть, що P — підполе поля F.

Означення 14

Підмножина R кільця K називається підкільцем кільця K, якщо відносно алгебраїчних операцій, заданих на K, R є кільцем.

Теорема 3

Підмножина R кільця K є підкільцем кільця K тоді і тільки тоді, коли для довільних елементів a і b із R виконуються такі умови: $1)\ a+b \in R$; $2)\ -a \in R$; $3)\ ab \in R$.

Означення 15

Комутативне кільце P з одиницею називається полем, якщо довільний ненульовий елемент кільця P є оборотним, тобто $P^* = P \setminus \{0\}$.

Означення 16

Якщо поле P є підкільцем поля F, то кажуть, що P — підполе поля F. Поле P_1 називається ізоморфним полю P_2 , якщо кільце P_1 ізоморфне кільцю P_2.

Приклади розв'язування задач

1. Довести, що множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно звичайної операції додавання цілих чисел є групою і не є групою відносно звичайної операції множення. Привести приклад бінарної алгебраїчної операції, заданої на $\mathbb{Z}$, яка б не задовольняла асоціативній властивості.

1. Довести, що множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно звичайної операції додавання цілих чисел є групою і не є групою відносно звичайної операції множення. Привести приклад бінарної алгебраїчної операції, заданої на $\mathbb{Z}$, яка б не задовольняла асоціативній властивості.

Розв'язання. Очевидно, операція додавання цілих чисел є бінарною алгебраїчною операцією на $\mathbb{Z}$,

1. Довести, що множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно звичайної операції додавання цілих чисел є групою і не є групою відносно звичайної операції множення. Привести приклад бінарної алгебраїчної операції, заданої на $\mathbb{Z}$, яка б не задовольняла асоціативній властивості.

Розв'язання. Очевидно, операція додавання цілих чисел є бінарною алгебраїчною операцією на $\mathbb{Z}$, оскільки за означенням сумою цілих чисел є ціле число.

1. Довести, що множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно звичайної операції додавання цілих чисел є групою і не є групою відносно звичайної операції множення. Привести приклад бінарної алгебраїчної операції, заданої на $\mathbb{Z}$, яка б не задовольняла асоціативній властивості.

Розв'язання. Очевидно, операція додавання цілих чисел є бінарною алгебраїчною операцією на $\mathbb{Z}$, оскільки за означенням сумою цілих чисел є ціле число. Далі, добре відомо, що ця операція задовольняє асоціативній властивості,

Приклади розв'язування задач

1. Довести, що множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно звичайної операції додавання цілих чисел є групою і не є групою відносно звичайної операції множення. Привести приклад бінарної алгебраїчної операції, заданої на $\mathbb{Z}$, яка б не задовольняла асоціативній властивості.

Розв'язання. Очевидно, операція додавання цілих чисел є бінарною алгебраїчною операцією на $\mathbb{Z}$, оскільки за означенням сумою цілих чисел є ціле число. Далі, добре відомо, що ця операція задовольняє асоціативній властивості, тобто $(a+b)+c = a+(b+c)$ для довільних $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1. Довести, що множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно звичайної операції додавання цілих чисел є групою і не є групою відносно звичайної операції множення. Привести приклад бінарної алгебраїчної операції, заданої на $\mathbb{Z}$, яка б не задовольняла асоціативній властивості.

Розв'язання. Очевидно, операція додавання цілих чисел є бінарною алгебраїчною операцією на $\mathbb{Z}$, оскільки за означенням сумою цілих чисел є ціле число. Далі, добре відомо, що ця операція задовольняє асоціативній властивості, тобто $(a+b)+c = a+(b+c)$ для довільних $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Серед цілих чисел є число 0 таке, що $a+0 = 0+a = a$ для довільного елемента $a \in \mathbb{Z}$.

1. Довести, що множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно звичайної операції додавання цілих чисел є групою і не є групою відносно звичайної операції множення. Привести приклад бінарної алгебраїчної операції, заданої на $\mathbb{Z}$, яка б не задовольняла асоціативній властивості.

Розв'язання. Очевидно, операція додавання цілих чисел є бінарною алгебраїчною операцією на $\mathbb{Z}$, оскільки за означенням сумою цілих чисел є ціле число. Далі, добре відомо, що ця операція задовольняє асоціативній властивості, тобто $(a+b)+c = a+(b+c)$ для довільних $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Серед цілих чисел є число 0 таке, що $a+0 = 0+a = a$ для довільного елемента $a \in \mathbb{Z}$. Нарешті для довільного цілого числа a існує протилежне ціле число $-a$ з властивістю $a+(-a) = (-a)+a = 0$.

1. Довести, що множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно звичайної операції додавання цілих чисел є групою і не є групою відносно звичайної операції множення. Привести приклад бінарної алгебраїчної операції, заданої на $\mathbb{Z}$, яка б не задовольняла асоціативній властивості.

Розв'язання. Очевидно, операція додавання цілих чисел є бінарною алгебраїчною операцією на $\mathbb{Z}$, оскільки за означенням сумою цілих чисел є ціле число. Далі, добре відомо, що ця операція задовольняє асоціативній властивості, тобто $(a+b)+c = a+(b+c)$ для довільних $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Серед цілих чисел є число 0 таке, що $a + 0 = 0 + a = a$ для довільного елемента $a \in \mathbb{Z}$. Нарешті для довільного цілого числа a існує протилежне ціле число $-a$ з властивістю $a+(-a) = (-a)+a = 0$. Зауважимо, що додавання цілих чисел задовольняє також комутативній властивості і,

Приклади розв'язування задач

1. Довести, що множина $\mathbb{Z}$ всіх цілих чисел відносно звичайної операції додавання цілих чисел є групою і не є групою відносно звичайної операції множення. Привести приклад бінарної алгебраїчної операції, заданої на $\mathbb{Z}$, яка б не задовольняла асоціативній властивості.

Розв'язання. Очевидно, операція додавання цілих чисел є бінарною алгебраїчною операцією на $\mathbb{Z}$, оскільки за означенням сумою цілих чисел є ціле число. Далі, добре відомо, що ця операція задовольняє асоціативній властивості, тобто $(a+b)+c = a+(b+c)$ для довільних $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Серед цілих чисел є число 0 таке, що $a+0 = 0+a = a$ для довільного елемента $a \in \mathbb{Z}$. Нарешті для довільного цілого числа a існує протилежне ціле число $-a$ з властивістю $a+(-a) = (-a)+a = 0$. Зауважимо, що додавання цілих чисел задовольняє також комутативній властивості і, отже, множина $\mathbb{Z}$ є абелевою групою відносно операції додавання.

Приклади розв'язування задач

У другому випадку, коли на множині $\mathbb{Z}$ задано операцію множення, бачимо, що:

Приклади розв'язування задач

У другому випадку, коли на множині $\mathbb{Z}$ задано операцію множення, бачимо, що:

1) ця операція є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки $ab \in \mathbb{Z}$ для довільних елементів a, $b \in \mathbb{Z}$;

У другому випадку, коли на множині $\mathbb{Z}$ задано операцію множення, бачимо, що:

1) ця операція є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки $ab \in \mathbb{Z}$ для довільних елементів a, $b \in \mathbb{Z}$;
2) ця операція задовольняє асоціативній властивості,

У другому випадку, коли на множині $\mathbb{Z}$ задано операцію множення, бачимо, що:

1) ця операція є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки $ab \in \mathbb{Z}$ для довільних елементів a, $b \in \mathbb{Z}$;
2) ця операція задовольняє асоціативній властивості, оскільки

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

для довільних цілих чисел a, b, c;

У другому випадку, коли на множині $\mathbb{Z}$ задано операцію множення, бачимо, що:

1) ця операція є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки $ab \in \mathbb{Z}$ для довільних елементів a, $b \in \mathbb{Z}$;
2) ця операція задовольняє асоціативній властивості, оскільки
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
для довільних цілих чисел a, b, c;
3) серед цілих чисел є число 1 таке,

У другому випадку, коли на множині $\mathbb{Z}$ задано операцію множення, бачимо, що:

1) ця операція є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки $ab \in \mathbb{Z}$ для довільних елементів a, $b \in \mathbb{Z}$;
2) ця операція задовольняє асоціативній властивості, оскільки

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

для довільних цілих чисел a, b, c;
3) серед цілих чисел є число 1 таке, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного цілого числа a;

Приклади розв'язування задач

У другому випадку, коли на множині $\mathbb{Z}$ задано операцію множення, бачимо, що:

1) ця операція є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки $ab \in \mathbb{Z}$ для довільних елементів a, $b \in \mathbb{Z}$;
2) ця операція задовольняє асоціативній властивості, оскільки

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$

   для довільних цілих чисел a, b, c;
3) серед цілих чисел є число 1 таке, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного цілого числа a;
4) однак, не для будь-якого елемента $a \in \mathbb{Z}$ існує обернений елемент $a^{-1} \in \mathbb{Z}$.

У другому випадку, коли на множині $\mathbb{Z}$ задано операцію множення, бачимо, що:

1) ця операція є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки $ab \in \mathbb{Z}$ для довільних елементів a, $b \in \mathbb{Z}$;
2) ця операція задовольняє асоціативній властивості, оскільки
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
для довільних цілих чисел a, b, c;
3) серед цілих чисел є число 1 таке, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного цілого числа a;
4) однак, не для будь-якого елемента $a \in \mathbb{Z}$ існує обернений елемент $a^{-1} \in \mathbb{Z}$. Справді, наприклад для цілого числа 2 не існує такого цілого числа x,

Приклади розв'язування задач

У другому випадку, коли на множині $\mathbb{Z}$ задано операцію множення, бачимо, що:

1) ця операція є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки $ab \in \mathbb{Z}$ для довільних елементів a, $b \in \mathbb{Z}$;
2) ця операція задовольняє асоціативній властивості, оскільки
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
для довільних цілих чисел a, b, c;
3) серед цілих чисел є число 1 таке, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного цілого числа a;
4) однак, не для будь-якого елемента $a \in \mathbb{Z}$ існує обернений елемент $a^{-1} \in \mathbb{Z}$. Справді, наприклад для цілого числа 2 не існує такого цілого числа x, щоб $2 \cdot x = 1$.

Приклади розв'язування задач

У другому випадку, коли на множині $\mathbb{Z}$ задано операцію множення, бачимо, що:

1) ця операція є бінарною алгебраїчною операцією, оскільки $ab \in \mathbb{Z}$ для довільних елементів a, $b \in \mathbb{Z}$;
2) ця операція задовольняє асоціативній властивості, оскільки
$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$$
для довільних цілих чисел a, b, c;
3) серед цілих чисел є число 1 таке, що $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$ для довільного цілого числа a;
4) однак, не для будь-якого елемента $a \in \mathbb{Z}$ існує обернений елемент $a^{-1} \in \mathbb{Z}$. Справді, наприклад для цілого числа 2 не існує такого цілого числа x, щоб $2 \cdot x = 1$.

   Таким чином, множина $\mathbb{Z}$ не є групою відносно операції множення цілих чисел.

Приклади розв'язування задач

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, визначену за правилом:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

Приклади розв'язування задач

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, визначену за правилом:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

де $+$ є звичайною операцією додавання цілих чисел, а $-a$ є протилежним числом до цілого числа a

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, визначену за правилом:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

де $+$ є звичайною операцією додавання цілих чисел, а $-a$ є протилежним числом до цілого числа a (очевидно, що $m \circ n \in \mathbb{Z}$ для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$).

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, визначену за правилом:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

де $+$ є звичайною операцією додавання цілих чисел, а $-a$ є протилежним числом до цілого числа a (очевидно, що $m \circ n \in \mathbb{Z}$ для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$).
Обчислимо:

$$(1 \circ 2) \circ 3 =$$

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, визначену за правилом:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

де $+$ є звичайною операцією додавання цілих чисел, а $-a$ є протилежним числом до цілого числа a (очевидно, що $m \circ n \in \mathbb{Z}$ для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$).

Обчислимо:

$$(1 \circ 2) \circ 3 = (-1 + (-2)) \circ 3 =$$

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, визначену за правилом:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

де $+$ є звичайною операцією додавання цілих чисел, а $-a$ є протилежним числом до цілого числа a (очевидно, що $m \circ n \in \mathbb{Z}$ для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$).
Обчислимо:

$$(1 \circ 2) \circ 3 = (-1 + (-2)) \circ 3 = (-3) \circ 3$$

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, визначену за правилом:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

де $+$ є звичайною операцією додавання цілих чисел, а $-a$ є протилежним числом до цілого числа a (очевидно, що $m \circ n \in \mathbb{Z}$ для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$).
Обчислимо:

$$(1 \circ 2) \circ 3 = (-1 + (-2)) \circ 3 = (-3) \circ 3 = -(-3) + (-3) =$$

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, визначену за правилом:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

де $+$ є звичайною операцією додавання цілих чисел, а $-a$ є протилежним числом до цілого числа a (очевидно, що $m \circ n \in \mathbb{Z}$ для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$).

Обчислимо:

$$(1 \circ 2) \circ 3 = (-1 + (-2)) \circ 3 = (-3) \circ 3 = -(-3) + (-3) = 0,$$
$$1 \circ (2 \circ 3) =$$

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, визначену за правилом:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

де $+$ є звичайною операцією додавання цілих чисел, а $-a$ є протилежним числом до цілого числа a (очевидно, що $m \circ n \in \mathbb{Z}$ для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$).
Обчислимо:

$$(1 \circ 2) \circ 3 = (-1 + (-2)) \circ 3 = (-3) \circ 3 = -(-3) + (-3) = 0,$$
$$1 \circ (2 \circ 3) = 1 \circ (-2 + (-3)) =$$

Приклади розв'язування задач

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, визначену за правилом:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

де $+$ є звичайною операцією додавання цілих чисел, а $-a$ є протилежним числом до цілого числа a (очевидно, що $m \circ n \in \mathbb{Z}$ для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$).

Обчислимо:

$$(1 \circ 2) \circ 3 = (-1 + (-2)) \circ 3 = (-3) \circ 3 = -(-3) + (-3) = 0,$$
$$1 \circ (2 \circ 3) = 1 \circ (-2 + (-3)) = 1 \circ (-5) =$$

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, визначену за правилом:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

де $+$ є звичайною операцією додавання цілих чисел, а $-a$ є протилежним числом до цілого числа a (очевидно, що $m \circ n \in \mathbb{Z}$ для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$).

Обчислимо:

$$(1 \circ 2) \circ 3 = (-1 + (-2)) \circ 3 = (-3) \circ 3 = -(-3) + (-3) = 0,$$
$$1 \circ (2 \circ 3) = 1 \circ (-2 + (-3)) = 1 \circ (-5) = \; -1 - (-5) =$$

Нарешті, розглянемо бінарну алгебраїчну операцію $\circ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, визначену за правилом:

$$m \circ n = -m + (-n) \qquad (m, n \in \mathbb{Z}),$$

де $+$ є звичайною операцією додавання цілих чисел, а $-a$ є протилежним числом до цілого числа a (очевидно, що $m \circ n \in \mathbb{Z}$ для довільних $m, n \in \mathbb{Z}$).
Обчислимо:

$$(1 \circ 2) \circ 3 = (-1 + (-2)) \circ 3 = (-3) \circ 3 = -(-3) + (-3) = 0,$$
$$1 \circ (2 \circ 3) = 1 \circ (-2 + (-3)) = 1 \circ (-5) = \; -1 - (-5) = 4.$$

Отже,

$$(1 \circ 2) \circ 3 \neq 1 \circ (2 \circ 3).$$

Це означає, що бінарна алгебраїчна операція $\circ$ не задовольняє асоціативній властивості.

2. Показати, що множина $GL(n, \mathbb{R})$ всіх оборотних матриць порядку n з дійсними елементами відносно операції множення матриць є групою.

2. Показати, що множина $GL(n,\mathbb{R})$ всіх оборотних матриць порядку n з дійсними елементами відносно операції множення матриць є групою.
Розв'язання. Відомо (теорема про добуток невироджених матриць), що добуток двох довільних невироджених матриць із $GL(n,\mathbb{R})$ є невиродженою матрицею із $GL(n,\mathbb{R})$.

2. Показати, що множина $GL(n,\mathbb{R})$ всіх оборотних матриць порядку n з дійсними елементами відносно операції множення матриць є групою.
Розв'язання. Відомо (теорема про добуток невироджених матриць), що добуток двох довільних невироджених матриць із $GL(n,\mathbb{R})$ є невиродженою матрицею із $GL(n,\mathbb{R})$. Отже, операція множення матриць є бінарною алгебраїчною операцією на $GL(n,\mathbb{R})$.

2. Показати, що множина $GL(n,\mathbb{R})$ всіх оборотних матриць порядку n з дійсними елементами відносно операції множення матриць є групою.
Розв'язання. Відомо (теорема про добуток невироджених матриць), що добуток двох довільних невироджених матриць із $GL(n,\mathbb{R})$ є невиродженою матрицею із $GL(n,\mathbb{R})$. Отже, операція множення матриць є бінарною алгебраїчною операцією на $GL(n,\mathbb{R})$. За теоремою про асоціативну властивість добутку матриць операція множення матриць задовольняє асоціативній властивості.

2. Показати, що множина $GL(n,\mathbb{R})$ всіх оборотних матриць порядку n з дійсними елементами відносно операції множення матриць є групою.
Розв'язання. Відомо (теорема про добуток невироджених матриць), що добуток двох довільних невироджених матриць із $GL(n,\mathbb{R})$ є невиродженою матрицею із $GL(n,\mathbb{R})$. Отже, операція множення матриць є бінарною алгебраїчною операцією на $GL(n,\mathbb{R})$. За теоремою про асоціативну властивість добутку матриць операція множення матриць задовольняє асоціативній властивості. В множині $GL(n,\mathbb{R})$ існує одиничний елемент відносно операції множення, роль якого відіграє одинична матриця порядку n.

Приклади розв'язування задач

2. Показати, що множина $GL(n, \mathbb{R})$ всіх оборотних матриць порядку n з дійсними елементами відносно операції множення матриць є групою.
Розв'язання. Відомо (теорема про добуток невироджених матриць), що добуток двох довільних невироджених матриць із $GL(n, \mathbb{R})$ є невиродженою матрицею із $GL(n,\mathbb{R})$. Отже, операція множення матриць є бінарною алгебраїчною операцією на $GL(n, \mathbb{R})$. За теоремою про асоціативну властивість добутку матриць операція множення матриць задовольняє асоціативній властивості. В множині $GL(n, \mathbb{R})$ існує одиничний елемент відносно операції множення, роль якого відіграє одинична матриця порядку n. Нарешті, із ознаки оборотної матриці слідує, що для довільної невиродженої матриці $A \in GL(n, \mathbb{R})$ існує обернена матриця $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$.

2. Показати, що множина $GL(n,\mathbb{R})$ всіх оборотних матриць порядку n з дійсними елементами відносно операції множення матриць є групою.
Розв'язання. Відомо (теорема про добуток невироджених матриць), що добуток двох довільних невироджених матриць із $GL(n,\mathbb{R})$ є невиродженою матрицею із $GL(n,\mathbb{R})$. Отже, операція множення матриць є бінарною алгебраїчною операцією на $GL(n,\mathbb{R})$. За теоремою про асоціативну властивість добутку матриць операція множення матриць задовольняє асоціативній властивості. В множині $GL(n,\mathbb{R})$ існує одиничний елемент відносно операції множення, роль якого відіграє одинична матриця порядку n. Нарешті, із ознаки оборотної матриці слідує, що для довільної невиродженої матриці $A \in GL(n,\mathbb{R})$ існує обернена матриця $A^{-1} \in GL(n,\mathbb{R})$. Таким чином, множина $GL(n,\mathbb{R})$ відносно операції множення матриць є групою.

2. Показати, що множина $GL(n,\mathbb{R})$ всіх оборотних матриць порядку n з дійсними елементами відносно операції множення матриць є групою.
Розв'язання. Відомо (теорема про добуток невироджених матриць), що добуток двох довільних невироджених матриць із $GL(n,\mathbb{R})$ є невиродженою матрицею із $GL(n,\mathbb{R})$. Отже, операція множення матриць є бінарною алгебраїчною операцією на $GL(n,\mathbb{R})$. За теоремою про асоціативну властивість добутку матриць операція множення матриць задовольняє асоціативній властивості. В множині $GL(n,\mathbb{R})$ існує одиничний елемент відносно операції множення, роль якого відіграє одинична матриця порядку n. Нарешті, із ознаки оборотної матриці слідує, що для довільної невиродженої матриці $A \in GL(n,\mathbb{R})$ існує обернена матриця $A^{-1} \in GL(n,\mathbb{R})$. Таким чином, множина $GL(n,\mathbb{R})$ відносно операції множення матриць є групою. Ця група називається повною лінійною групою степеня n над $\mathbb{R}$.

2. Показати, що множина $GL(n, \mathbb{R})$ всіх оборотних матриць порядку n з дійсними елементами відносно операції множення матриць є групою.
Розв'язання. Відомо (теорема про добуток невироджених матриць), що добуток двох довільних невироджених матриць із $GL(n, \mathbb{R})$ є невиродженою матрицею із $GL(n,\mathbb{R})$. Отже, операція множення матриць є бінарною алгебраїчною операцією на $GL(n, \mathbb{R})$. За теоремою про асоціативну властивість добутку матриць операція множення матриць задовольняє асоціативній властивості. В множині $GL(n, \mathbb{R})$ існує одиничний елемент відносно операції множення, роль якого відіграє одинична матриця порядку n. Нарешті, із ознаки оборотної матриці слідує, що для довільної невиродженої матриці $A \in GL(n, \mathbb{R})$ існує обернена матриця $A^{-1} \in GL(n, \mathbb{R})$. Таким чином, множина $GL(n, \mathbb{R})$ відносно операції множення матриць є групою. Ця група називається повною лінійною групою степеня n над $\mathbb{R}$. Зауважимо, що група $GL(1, \mathbb{R})$ — абелева,

2. Показати, що множина $GL(n,\mathbb{R})$ всіх оборотних матриць порядку n з дійсними елементами відносно операції множення матриць є групою.
Розв'язання. Відомо (теорема про добуток невироджених матриць), що добуток двох довільних невироджених матриць із $GL(n,\mathbb{R})$ є невиродженою матрицею із $GL(n,\mathbb{R})$. Отже, операція множення матриць є бінарною алгебраїчною операцією на $GL(n,\mathbb{R})$. За теоремою про асоціативну властивість добутку матриць операція множення матриць задовольняє асоціативній властивості. В множині $GL(n,\mathbb{R})$ існує одиничний елемент відносно операції множення, роль якого відіграє одинична матриця порядку n. Нарешті, із ознаки оборотної матриці слідує, що для довільної невиродженої матриці $A \in GL(n,\mathbb{R})$ існує обернена матриця $A^{-1} \in GL(n,\mathbb{R})$. Таким чином, множина $GL(n,\mathbb{R})$ відносно операції множення матриць є групою. Ця група називається повною лінійною групою степеня n над $\mathbb{R}$. Зауважимо, що група $GL(1,\mathbb{R})$ — абелева, а група $GL(n,\mathbb{R})$ $(n > 1)$ — не є абелевою.

3. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

3. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині,

3. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині, оскільки для довільних $a_1 + b_1\sqrt{3}$, $a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

3. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині, оскільки для довільних $a_1 + b_1\sqrt{3}$, $a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) =$$

3. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині, оскільки для довільних $a_1 + b_1\sqrt{3}$, $a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

3. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині, оскільки для довільних $a_1 + b_1\sqrt{3}$, $a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) =$

3. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині, оскільки для довільних $a_1 + b_1\sqrt{3}$, $a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

3. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині, оскільки для довільних $a_1 + b_1\sqrt{3}$, $a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Добре відомо, що операції додавання і множення дійсних чисел, зокрема і чисел із $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, задовольняють асоціативній та комутативній властивостям.

3. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині, оскільки для довільних $a_1 + b_1\sqrt{3}$, $a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Добре відомо, що операції додавання і множення дійсних чисел, зокрема і чисел із $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, задовольняють асоціативній та комутативній властивостям. Крім того вони пов'язані законом дистрибутивності.

3. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині, оскільки для довільних $a_1 + b_1\sqrt{3}$, $a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Добре відомо, що операції додавання і множення дійсних чисел, зокрема і чисел із $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, задовольняють асоціативній та комутативній властивостям. Крім того вони пов'язані законом дистрибутивності.
Множина $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ містить числа 0 і 1

3. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині, оскільки для довільних $a_1 + b_1\sqrt{3}$, $a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Добре відомо, що операції додавання і множення дійсних чисел, зокрема і чисел із $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, задовольняють асоціативній та комутативній властивостям. Крім того вони пов'язані законом дистрибутивності. Множина $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ містить числа 0 і $1(0 = 0 + 0\sqrt{3}$,

3. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині, оскільки для довільних $a_1 + b_1\sqrt{3}$, $a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Добре відомо, що операції додавання і множення дійсних чисел, зокрема і чисел із $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, задовольняють асоціативній та комутативній властивостям. Крім того вони пов'язані законом дистрибутивності. Множина $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ містить числа 0 і 1$(0 = 0 + 0\sqrt{3},\ 1 = 1 + 0\sqrt{3})$.

3. Довести, що підмножина $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ множини дійсних чисел є полем відносно звичайних операцій додавання і множення дійсних чисел.

Розв'язання. Звичайні операції додавання і множення дійсних чисел із множини $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є бінарними операціями на цій множині, оскільки для довільних $a_1 + b_1\sqrt{3}$, $a_2 + b_2\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3}) + (a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}),$$

$$(a_1 + b_1\sqrt{3})(a_2 + b_2\sqrt{3}) = (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Добре відомо, що операції додавання і множення дійсних чисел, зокрема і чисел із $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, задовольняють асоціативній та комутативній властивостям. Крім того вони пов'язані законом дистрибутивності. Множина $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ містить числа 0 і 1$(0 = 0 + 0\sqrt{3},\ 1 = 1 + 0\sqrt{3})$.Ці числа відіграють роль нульового і одиничного елемента відповідно для операцій додавання і множення.

Приклади розв'язування задач

Оскільки для довільних чисел $a,\ b \in \mathbb{Q}$ існують протилежні числа $-a,\ -b \in \mathbb{Q}$, Оскільки для довільних чисел a, $b \in \mathbb{Q}$ існують протилежні числа $-a$, $-b \in \mathbb{Q}$, то для довільного числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує протилежне число $-(a + b\sqrt{3}) = (-a) + (-b)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

Приклади розв'язування задач

Оскільки для довільних чисел a, $b \in \mathbb{Q}$ існують протилежні числа $-a$, $-b \in \mathbb{Q}$, то для довільного числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує протилежне число $-(a + b\sqrt{3}) = (-a) + (-b)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (очевидно, $(a + b\sqrt{3}) + ((-a) + (-b)\sqrt{3}) = 0$).

Приклади розв'язування задач

Оскільки для довільних чисел a, $b \in \mathbb{Q}$ існують протилежні числа $-a$, $-b \in \mathbb{Q}$, то для довільного числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує протилежне число $-(a + b\sqrt{3}) = (-a) + (-b)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (очевидно, $(a + b\sqrt{3}) + ((-a) + (-b)\sqrt{3}) = 0$). Нарешті, покажемо, що для довільного ненульового числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує обернене число в $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.

Оскільки для довільних чисел a, $b \in \mathbb{Q}$ існують протилежні числа $-a$, $-b \in \mathbb{Q}$, то для довільного числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує протилежне число $-(a + b\sqrt{3}) = (-a) + (-b)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (очевидно, $(a + b\sqrt{3}) + ((-a) + (-b)\sqrt{3}) = 0$). Нарешті, покажемо, що для довільного ненульового числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує обернене число в $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Оскільки a і b одночасно не дорівнюють нулю, то $a^2 - 3b^2 \neq 0$.

Приклади розв'язування задач

Оскільки для довільних чисел a, $b \in \mathbb{Q}$ існують протилежні числа $-a$, $-b \in \mathbb{Q}$, то для довільного числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує протилежне число $-(a + b\sqrt{3}) = (-a) + (-b)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (очевидно, $(a + b\sqrt{3}) + ((-a) + (-b)\sqrt{3}) = 0$). Нарешті, покажемо, що для довільного ненульового числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує обернене число в $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Оскільки a і b одночасно не дорівнюють нулю, то $a^2 - 3b^2 \neq 0$. Бо в протилежному випадку це б означало існування раціонального числа, квадрат якого дорівнює 3. Розглянемо число

$$\frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Оскільки для довільних чисел a, $b \in \mathbb{Q}$ існують протилежні числа $-a$, $-b \in \mathbb{Q}$, то для довільного числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує протилежне число $-(a + b\sqrt{3}) = (-a) + (-b)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (очевидно, $(a + b\sqrt{3}) + ((-a) + (-b)\sqrt{3}) = 0$). Нарешті, покажемо, що для довільного ненульового числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує обернене число в $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Оскільки a і b одночасно не дорівнюють нулю, то $a^2 - 3b^2 \neq 0$. Бо в протилежному випадку це б означало існування раціонального числа, квадрат якого дорівнює 3. Розглянемо число

$$\frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Обчисливши добуток

$$(a + b\sqrt{3}) \left(\frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} \right) =$$

Оскільки для довільних чисел a, $b \in \mathbb{Q}$ існують протилежні числа $-a$, $-b \in \mathbb{Q}$, то для довільного числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує протилежне число $-(a + b\sqrt{3}) = (-a) + (-b)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (очевидно, $(a + b\sqrt{3}) + ((-a) + (-b)\sqrt{3}) = 0$). Нарешті, покажемо, що для довільного ненульового числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує обернене число в $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Оскільки a і b одночасно не дорівнюють нулю, то $a^2 - 3b^2 \neq 0$. Бо в протилежному випадку це б означало існування раціонального числа, квадрат якого дорівнює 3. Розглянемо число

$$\frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Обчисливши добуток

$$(a + b\sqrt{3})\left(\frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3}\right) = \frac{a^2 - 3b^2}{a^2 - 3b^2} + \frac{ba - ab}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} = 1,$$

переконуємося, що це число є оберненим до числа $a + b\sqrt{3}$.

Оскільки для довільних чисел a, $b \in \mathbb{Q}$ існують протилежні числа $-a$, $-b \in \mathbb{Q}$, то для довільного числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує протилежне число $-(a + b\sqrt{3}) = (-a) + (-b)\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ (очевидно, $(a + b\sqrt{3}) + ((-a) + (-b)\sqrt{3}) = 0)$. Нарешті, покажемо, що для довільного ненульового числа $a + b\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ існує обернене число в $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$. Оскільки a і b одночасно не дорівнюють нулю, то $a^2 - 3b^2 \neq 0$. Бо в протилежному випадку це б означало існування раціонального числа, квадрат якого дорівнює 3. Розглянемо число

$$\frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{3}).$$

Обчисливши добуток

$$(a + b\sqrt{3})\left(\frac{a}{a^2 - 3b^2} + \frac{-b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3}\right) = \frac{a^2 - 3b^2}{a^2 - 3b^2} + \frac{ba - ab}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3} = 1,$$

переконуємося, що це число є оберненим до числа $a + b\sqrt{3}$.
З усього вище сказаного випливає, що множина $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ є полем відносно операцій додавання і множення дійсних чисел із $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$.