Космічна наука і технологія. 1998. Т. 4, № 4. С. 67–73.

УДК 681.142.4

Обработка дискретных космических изображений в расширенном пороговом базисе

Ф. Э. Гече

Ужгородський державний університет,

Державний науково-дослідний інститут інформаційної інфраструктури (філія), Ужгород

Надійшла до редакції 02.03.98

Розроблений метод представлення дискретних складних космічних зображень в розширеному пороговому базисі. Згідно з цим методом з кожним бінарним зображенням зіставляється впорядкований набір інформаційних векторів, які кодують р-фрагменти зображення з високим коефіцієнтом стиску. На множині пар інформаційних векторів визначені функціонали μ^* і μ_*, за допомогою яких вдається формалізувати поняття «подібності» і «відмінності» дискретних зображень. Описані інваріанти дискретних зображень в розширеному пороговому базисі відносно деяких групових перетворень.

Выбор базиса представления дискретных сложных изображений больших размеров (аэрокосмические снимки, рентгенограммы) занимает центральное место в их обработке. Это прежде всего связано с тем, что от выбранного базиса зависит эффективность методов сжатия и выделения математических признаков в изображениях, что очень важно для бортовых космических исследовательских систем. В данной работе в качестве базиса представления дискретных изображений выбирается расширенный пороговый базис, позволяющий кодировать р-фрагменты изображения с высоким коэффициентом сжатия и разработать эффективный метод выделения математических признаков.

1. НЕКОТОРЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ИЗ ТЕОРИИ МАТРИЦ ТОЛЕРАНТНОСТИ

Пусть $Z_2 = \{0, 1\}$ и Z_2^n — n-я декартова степень множества Z_2. Определим на Z_2^n отношение толерантности τ: $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)\ \tau\ (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \Leftrightarrow \exists\, i$ $(\alpha_i = \beta_i)$. Максимальное подмножество $\mathrm{N} \subset Z_2^n$, элементы которого попарно толерантны, называется классом толерантности. Множество, состоящее из всех классов толерантности относительно τ, обозначим M_τ. Составим всевозможные матрицы, строками которых будут N-мерные булевы векторы, являющиеся элементами класса толерантности $\mathbf{N} \subset M_\tau$, т. е. $\mathbf{N} \to \mathbf{N}_\xi$ — матрица, нумерация строк в которой определяется элементом ξ симметрической группы S_m, $m = |\mathbf{N}|$ — мощность класса $\mathbf{N}$. Пусть $S(\mathbf{N}) = \bigcup\limits_{\xi\in S_m} N\mathbf{N}_\xi$, $M = \bigcup\limits_{N\in M_\tau} S(\mathbf{N})$ и Ω_n — множество всех $\mathbf{N}$-мерных вещественных векторов $\mathbf{w}$, таких, что для всех различных $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2 \in Z_2^n$ $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \neq \mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{T}}$, где т — соответственно символы транспонирования матриц и матричного умножения. В работе [1] показано, что если $\mathbf{N} = (\alpha_{ij}) \in M$, $\mathbf{N}^* = (\alpha_{sj})$, $s = 2^{n-1} - i + 1$, $\alpha_{sj} = \overline{\alpha_{ij}}$ — булево отрицание α_{ij} ($|\mathbf{N}| = 2^{n-1}$), то для любого $\mathbf{w} \in \Omega_n$ можно указать такую матрицу $\mathbf{L}_\mathrm{w} \in M$, которая удовлетворяет условию

$$\begin{pmatrix} \mathbf{L}_w \\ \mathbf{L}_w^* \end{pmatrix} \cdot \mathbf{w}^{\mathrm{T}} = c_w^{\mathrm{T}}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{c}_w = (c_1, \ldots, c_t)$, $t = 2^n$, $c_1 > c_2 > \ldots > c_t$. Введем обозначение $\mathbf{E}_n = \bigcup_{w\in\Omega_n} \mathbf{L}_w \subset M$, где матрица $\mathbf{L}_w$ удовлетворяет (1).

Предматрицей толерантности $\mathbf{L}'$ называется матрица, строками которой являются первые по порядку q строк матрицы толерантности $\mathbf{L} \in M$, и пишем $\mathbf{L}' = \mathbf{L}(q)$ или $\mathbf{L}' \lhd \mathbf{L}$. Множество всех предматриц матрицы толерантности $\mathbf{L} \in M$ обозначим $\langle \mathbf{L} \rangle$ и $\langle \mathbf{E}_n \rangle = \bigcup_{L\in E_n} \langle \mathbf{L} \rangle$.

Определим действия элементов $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in Z_2^n$, $\sigma \in S_n$ на множество $A \subseteq Z_2^n$ и на $(n + 1)$-мерный действительный вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$ так:

$$\mathbf{b}A = \{(\beta_1 \oplus \alpha_1, \ldots, \beta_n \oplus \alpha_n) \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A\},$$

$$A^\sigma = \{(\alpha_{\sigma(1)}, \ldots, \alpha_{\sigma(n)}) \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A\},$$

$$\mathbf{b}\mathrm{w} = ((-1)^{\beta_1}\omega_1, \ldots, (-1)^{\beta_n}\omega_n; \omega_0^{\mathbf{b}}),$$

$$\mathrm{w}^\sigma = (\omega_{\sigma(1)}, \ldots, \omega_{\sigma(n)}; \omega_0),$$

где $\oplus$ — сумма по mod 2, $\omega_0^{\mathbf{b}} = \omega_0 - \sum_{i\in I(b)} \omega_i$, $I(\mathbf{b}) = \{i \mid \beta_i = 1\}$. Вектор $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ будем называть 2-суммирующим вектором (вектором суммирования по mod 2) множества булевых векторов $A \subseteq Z_2^n$, если каждая координата d_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) допускает одно из представлений:

а) $d_i = 2^{n-i} + 2^{n-i_1} + \ldots + 2^{n-i_t}$, $i, i_1, \ldots, i_t \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $i \neq i_t$ $\forall\, t \in \{1, 2, \ldots, n_i\}$ и $i_r \neq i_s$ если $r \neq s$;

б) $d_i = 2^{n-i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и действие $\dotplus$ вектора $\mathbf{d}$ на A задается так:

а) если i-я координата $d_i = 2^{n-i} + 2^{n-i_1} + \ldots + 2^{n-i_t}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), то $\mathbf{d} \dotplus A = \{(\alpha_1', \ldots, \alpha_i', \ldots, \alpha_n') \mid \alpha_i' = \alpha_i \oplus \alpha_{i_1} \oplus \ldots \oplus \alpha_{i_t}; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A\}$.

б) если i-я координата $d_i = 2^{n-i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ то $\mathbf{d} \dotplus A = \{(\alpha_1', \ldots, \alpha_i', \ldots, \alpha_n') \mid \alpha_i' = \alpha_i; (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in A\}$;

Всюду в дальнейшем примем, что если $A \subseteq Z_2^n$, то (A) — матрица, строками которой являются элементы A и $(\mathbf{b}A) = \mathbf{b}(A)$, $(A^\sigma) = (A)^\sigma$. Если $\Omega_n^- = \{(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n \mid 0 > \omega_1 > \ldots > \omega_n\}$, $\mathbf{L_w}$ — матрица, удовлетворяющая условию (1), и $\mathbf{E}_n^- = \bigcup_{w\in\Omega_n^-} \mathbf{L_w}$, то в работе [1] показано, что $\mathbf{E}_n = \{(\mathbf{gL})^\sigma \mid \mathbf{L} \in \mathbf{E}_n^-, \mathbf{g} \in Z_2^n, \sigma \in S_n\}$, а это влечет

$\langle \mathbf{E}_n \rangle = \{(\mathbf{gL})^\sigma \mid \mathbf{L} \in \langle \mathbf{E}_n^- \rangle, \mathbf{g} \in Z_2^n, \sigma \in S_n\}$.

Рассмотрим множество матриц толерантно[сти] $\mathbf{L}_1 = (0_1)$, $\mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} L_1 & 0_1 \\ L_1^* & 0_1 \end{pmatrix}$, …, $\mathbf{L}_n = \begin{pmatrix} L_{n-1} & 0_{n-1} \\ L_{n-1}^* & 0_{n-1} \end{pmatrix}$, где [...] — нулевой столбец длины 2^{t-1}. Определим [...] предматрицами толерантности $(\mathbf{L}_i^*(q_i)\, \underbrace{0\ldots0}_{n-i})$ [...] $(\mathbf{L}_j^*(q_j)\, \underbrace{0\ldots0}_{n-j})$ операцию ∇ так:

$$(\mathbf{L}_i^*(q_i)\, 0 \ldots 0)\ \nabla\ (\mathbf{L}_j^*(q_j)\ 0 \ldots 0) = \begin{pmatrix} (\mathbf{L}_i^*(q_i)\, 0\ldots0) \\ (\mathbf{L}_j^*(q_j)\, 0\ldots0) \end{pmatrix}$$

Здесь нулевой столбец 0 в предматрице толерантности $(\mathbf{L}_t^*(q_t)\, 0 \ldots 0)$ имеет длину q_t.

Пусть $A \subseteq Z_2^n$ и $\mathbf{a} \in A$. Максимальное подмножество $\mathrm{p}\{\mathbf{a}A\} \subseteq \mathbf{a}A$, которое удовлетворяет услови[ю]

$$(p\{\mathbf{a}A\})^\sigma =$$

$$= (\mathbf{L}_j, 0_j, \ldots, 0_j)\ \nabla\Big(\mathop{\nabla}_{r=0}^{n-j} (\mathbf{L}_{j+r}^*(q_r)\, \underbrace{0\ldots0}_{n-(j+r)})\Big), \qquad (2)$$

будем называть p-множеством A относительно $\mathbf{a}$ [с] индексом j и параметром $\sigma \in S_n$, если $q_0 \geq q_1 \geq \ldots \geq q_{n-j}$. Элемент $\sigma \in S_n$ в (2) может определяться неоднозначно. Чтобы устранить неоднозначность выбора $\sigma \in S_n$, введем в рассмотрение функцию s_i: $A \to \{1, 2, \ldots, n\}$ определенную так:

$$\forall\, \mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in A\ s_i(\mathbf{a}) = \alpha_i,$$

$$s_i(A) = \sum_{a\in A} s_i(\mathbf{a}),$$

и множество $I_{\mathbf{a}} \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$, $\forall i \in I_{\mathbf{a}}$ $\mathbf{e}_i = (0, \ldots, 0, \underset{(i)}{1}, 0, \ldots, 0) \in \mathbf{a}A$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\} \setminus I_{\mathbf{a}}$ $\mathbf{e}_i \notin \mathbf{a}A$.

Элемент σ всюду в дальнейшем будем выбирать следующим образом:

$$\forall i, j \in I_{\mathbf{a}}\ s_i(\mathbf{a}A) > s_j(\mathbf{a}A) \Rightarrow s_i((\mathbf{a}A)^\sigma) > s_j((\mathbf{a}A)^\sigma).$$

$$\forall i, j \in I_{\mathbf{a}}\ s_i(\mathbf{a}A) = s_j(\mathbf{a}A)$$

$$\text{и } i < j \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(j), \qquad (3)$$

$$\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid I_{\mathbf{a}}\ \ i < j \Rightarrow \sigma(i) < \sigma(i)$$

и назовем его подходящим параметром p-множества $p\{\mathbf{a}A\}$.

Вектор суммирования по mod 2 $\mathbf{a}^*$ множества $\mathbf{a}A$ будем называть p-максимизатором этого множества, если $|p\{\mathbf{a}^* \dotplus \mathbf{a}A\}| \geq |p\{\mathbf{d} \dotplus \mathbf{a}A\}|$, где $\mathbf{d}$ – произвольный 2-суммирующий вектор множества $\mathbf{a}A$. Если p-максимизатор $\mathbf{a}^*$ множества $\mathbf{a}A$ является не единственным, то разработан алгоритм однозначного выбора p-максимизатора, который называется подходящим p-максимизатором. В дальнейшем введем обозначение $p\{\tilde{\mathbf{a}}A\} = p\{\mathbf{a}^* \dotplus \mathbf{a}A\}$, где $\mathbf{a}^*$ – подходящий p-максимизатор.

Теорема 1. Пусть $A \subseteq Z_2^n$ и $\mathbf{a} \in A$. Тогда в $<E_n^->$ найдутся такие элементы $\mathbf{L}$, $\mathbf{N}$, что

1) $\mathbf{L} = (p\{\tilde{\mathbf{a}}A\})^\sigma$, если $|\,p\{\tilde{\mathbf{a}}A\}\,| \leq 2^{n-1}$;

2) $(p\{\tilde{\mathbf{a}}A\})^\sigma \lhd (\mathbf{N} \nabla \mathbf{N}^*)$, когда $|p\{\tilde{\mathbf{a}}A\}| > 2^{n-1}$.

Доказательство. Рассмотрим случай $|p\{\tilde{\mathbf{a}}A\}| \leq 2^{n-1}$. Покажем, что существует вектор $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_2) \in \Omega_n^-$, удовлетворяющий условию

$$\forall\, \mathbf{x} \in p\{\tilde{\mathbf{a}}A\},\ \forall\, \mathbf{y} \in Z_2^n \,|\, p\{\tilde{\mathbf{a}}A\}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}^{\mathrm{T}} > \mathbf{y} \cdot \mathbf{u}^{\mathrm{T}}. \qquad (4)$$

Согласно (2) и теореме 5[3] вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$:

а) $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = \omega_1 - 1$, …, $\omega_j = \sum_{i=1}^{j-1} \omega_i - 1$;

б) компоненты ω_{j+s}, $s = 1, 2, \ldots, t$, t – такое наименьшее целое положительное число, что $q_t \neq 0$ и $q_{t-1} = \ldots = q_{n-j} = 0$, последовательно находим из равенств

$$\mathbf{a}_{q_s}^{j+s} \cdot (\omega_1, \ldots, \omega_{j+s})^{\mathrm{T}} = \mathbf{a}_{q_{s-1}}^{j+s-1} \cdot (\omega_1, \ldots, \omega_{j+s-1})^{\mathrm{T}},$$

где $\mathbf{a}_{q_s}^{j+s}$ – q_s-я строка матрицы $\mathbf{L}_{j+s}^*$;

в) $\omega_{j+t+1} = \ldots = \omega_N = \mathbf{a}_{q_t}^{j+t} \cdot (\omega_1, \ldots, \omega_{j+t})^{\mathrm{T}} - 1$, удовлетворяет условию (4), но $\mathbf{w} \notin \Omega_n^-$.

Положим $u_i = \omega_i$, $i = 1, 2, \ldots, j$ и $u_{j+k} = \omega_{j+k} - 2^{-k}$, $k = 1, 2, \ldots, n - j$. Тогда $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n) \in \Omega_n^-$ и удовлетворяет (4). Значит, если $q = |p\{\tilde{\mathbf{a}}A\}|$ – мощность p-множества и $\mathbf{L}_{\mathrm{u}}$ удовлетворяет условию (1), то $(p\{\tilde{\mathbf{a}}A\})^\sigma = \mathbf{L}_{\mathrm{u}} \in <E_n^->$.

В случае $|\,p\{\tilde{\mathbf{a}}A\}| > 2^{n-1}$ вектор $\mathbf{u}$ построим аналогично и положим $\mathbf{N} = \mathbf{L}_{\mathrm{u}} \in <E_n^->$. Тогда в силу (4) и по лемме 3 с работы [3] имеем $(p\{\tilde{\mathbf{a}}A\})^\sigma \lhd$ $\lhd (\mathbf{N} \nabla \mathbf{N}^*)$, что и требовалось доказать.

2. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДВУМЕРНЫХ БИНАРНЫХ ИЗОБРАЖЕНИЙ В РАСШИРЕННОМ ПОРОГОВОМ БАЗИСЕ

Пусть рецепторное поле, размеров $2^r \times 2^s$, содержит нормализованное [2] бинарное изображение A' и $n = r + s$. По некоторому взаимно-однозначному закону φ каждому рецептору сопоставим n-мерный булевый вектор $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Z_2^n$ и через A обозначим множество всех тех булевых векторов, которые соответствуют рецепторам, занятым изображением A', т. е. $\varphi(A') = A \subseteq Z_2^n$. Пусть $\mathbf{a} \in A$ и $p\{\tilde{\mathbf{a}}A\} = p\{\mathbf{a}^* \dotplus \mathbf{a}A\}$ – p-множество A относительно $\mathbf{a}$. Рассмотрим отображение $\mathrm{P}_{\mathbf{a}}^\sigma: A \to$ $\to (\mathrm{P}_{\mathbf{a}}^\sigma\{A\}) \in <E_n^->$, которое задается так:

$\forall\, \mathbf{b} \in A$ $\mathrm{P}_{\mathbf{a}}^\sigma: \mathbf{b} \to \mathbf{b}$, если $[\,\tilde{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}]^\sigma \in p\{[\,\tilde{\mathbf{a}}A]^\sigma\}$,

$\forall\, \mathbf{b} \in A$ $\mathrm{P}_{\mathbf{a}}^\sigma: \mathbf{b} \to \tilde{\mathbf{a}}$, если $[\,\tilde{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}]^\sigma \notin p\{[\,\tilde{\mathbf{a}}A]^\sigma\}$,

и номер строки $\mathbf{b}$ в матрице $(\mathrm{P}_{\mathbf{a}}^\sigma\{A\})$ совпадает с номером строки $[\,\tilde{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}]^\sigma$ матрицы $(p\{[\,\tilde{\mathbf{a}}A]^\sigma\})$, когда $[\,\tilde{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}]^\sigma \in p\{[\,\tilde{\mathbf{a}}A]^\sigma\}$, а в противном случае равен 1.

Определение. Точки $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in A$ назовем точками разложения бинарного изображения A' в расширенном пороговом базисе, если

$$\forall i \in \{1, 2, \ldots, t\}\ \mathrm{P}_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\} \not\subset \bigcup_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{t} \mathrm{P}_{\mathbf{a}_j}^{\sigma}\{A\}. \qquad (5)$$

Если точки $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in A$ удовлетворяют (5) и

$$A = \bigcup_{i=1}^{t} \mathrm{P}_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\}, \qquad (6)$$

то будем говорить, что эти точки образуют полную систему точек разложения двумерного бинарного изображения A'. Множество A однозначно представляется в виде (6) относительно полной системы точек разложения $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t$, так как $\mathbf{a}_1^*, \ldots, \mathbf{a}_t^*$, $\sigma_1, \ldots, \sigma_t$ – соответствующие подходящие параметры.

В силу построения отображения $\mathrm{P}_{\mathbf{a}}^\sigma$ для множества $\mathrm{P}_{\mathbf{a}}^\sigma\{A\}$ по теореме 5 [3] можно построить такой $(n + 1)$-мерный целочисленный вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_n; \omega_0)$, что

$$\mathbf{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathrm{P}_{\mathbf{a}}^\sigma\{A\} \Leftrightarrow \mathrm{w}(\mathbf{b}) \geq 0, \qquad (7)$$

где $\mathrm{w}(\mathbf{b}) = \omega_1\beta_1 + \ldots + \omega_n\beta_n - \omega_0$. Алгоритм, который согласно теореме 5 [3] реализует отображение $\mathrm{P}\{A\} \to \mathbf{w}$, обозначим через F. Примем

$$\mathrm{P}_{\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_t}^{\sigma_1 \ldots \sigma_t}: A \to \bigcup_{i=1}^{t} \mathrm{P}_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\},$$

$$\mathrm{F} \circ \mathrm{P}_{\mathbf{a}_1 \ldots \mathbf{a}_t}^{\sigma_1 \ldots \sigma_t}: A \to (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_t), \qquad (8)$$

где F: $\mathrm{P}_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\} \to \mathbf{w}_i$.

Определение. Отображение (8) называется представлением двумерного бинарного изображения A'

относительно точек разложения $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in A$ в расширенном пороговом базисе. Представление двумерного бинарного изображения в расширенном пороговом базисе будем называть точным относительно $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in$ A, если эти точки образуют полную систему точек разложения для A'.

Теорема 2. Нормализованные двумерные бинарные изображения A_1', A_2' идентичны тогда и только тогда, когда существуют такие точки разложения $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in A_1 \bigcap A_2$, что совпадают их точные представления в расширенном пороговом базисе.

Доказательство. Необходимость. Если нормализованные двумерные бинарные изображения A_1' и A_2' идентичны, то $A_1 = A_2$, а это непосредственно влечет

$$\forall \mathbf{a}_i \in A_1 \, \mathrm{P}^{\sigma_i}_{\mathbf{a}_i}\{A_1\} = \mathrm{P}^{\sigma_i}_{\mathbf{a}_i}\{A_2\}. \qquad (9)$$

Следовательно, если точки $a_1, \ldots, a_t \in A_1$ такие, что

$$A_1 = \bigcup_{i=1}^{t} \mathrm{P}^{\sigma_i}_{\mathbf{a}_i}\{A_1\}, \text{ то } A_2 = \bigcup_{i=1}^{t} \mathrm{P}^{\sigma_i}_{\mathbf{a}_i}\{A_2\}.$$

В силу теоремы 5 [3] и (9) алгоритм F каждому множеству $\mathrm{P}^{\sigma_i}_{\mathbf{a}_i}\{A_j\}$ $(i = 1, 2)$ однозначно ставит в соответствие один и тот же вектор $\mathbf{w}_i$. Отсюда

$$\mathrm{F} \circ \mathrm{P}^{\sigma_1 \ldots \ \sigma_t}_{\mathbf{a}_1 \ldots \ \mathbf{a}_t}\{A_1\} = \mathrm{F} \circ \mathrm{P}^{\sigma_1 \ldots \ \sigma_t}_{\mathbf{a}_1 \ldots \ \mathbf{a}_t}\{A_2\} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_t),$$

и тем самым необходимость доказана.

Достаточность. Из того, что упорядоченный набор векторов $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_t)$ задает точное представление бинарных изображений A_1', A_2' в расширенном пороговом базисе относительно точек разложения $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t$ следует

$$\forall \ i \in \{1, 2, \ldots, t\} \ \mathbf{w}_i = \mathrm{F} \circ \mathrm{P}^{\sigma_1 \ldots \ \sigma_t}_{\mathbf{a}_1 \ldots \ \mathbf{a}_t}\{A_1\} =$$

$$= \mathrm{F} \circ \mathrm{P}^{\sigma_1 \ldots \ \sigma_t}_{\mathbf{a}_1 \ldots \ \mathbf{a}_t}\{A_2\} =$$

$$= \begin{cases} \mathrm{P}^{\sigma_i}_{\mathbf{a}_i}\{A_1\} = \{\mathbf{a} \in Z_2^{\mathrm{n}} \,|\, \mathrm{w}_i(\tilde{\mathbf{a}}) \geq 0\}, \\ \mathrm{P}^{\sigma_i}_{\mathbf{a}_i}\{A_2\} = \{\mathbf{a} \in Z_2^{\mathrm{n}} \,|\, \mathrm{w}_i(\tilde{\mathbf{a}}) \geq 0\}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathrm{P}^{\sigma_i}_{\mathbf{a}_i}\{A_1\} = \mathrm{P}^{\sigma_i}_{\mathbf{a}_i}\{A_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{t} \mathrm{P}^{\sigma_i}_{\mathbf{a}_i}\{A_1\} = \bigcup_{i=1}^{t} \mathrm{P}^{\sigma_i}_{\mathbf{a}_i}\{A_2\} \Rightarrow A_1 = \mathrm{i}_2 \, .$$

Значит, A_1' и A_2' — идентичные бинарные изображения. Теорема доказана.

Пусть F: $\mathrm{P}^{\sigma}_{\tilde{\mathbf{a}}}\{A\} \to \mathbf{w}$ и F_k: $\mathrm{P}^{\sigma}_{\tilde{\mathbf{a}}}\{A\} \to (\mathbf{aw})^{\sigma}$.

Определение. Каноническим представлением двумерного бинарного изображения A' относительно точек разложения $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in A$ называется отоб- ражение $F \circ P^{\sigma_1 \ldots \ \sigma_t}_{\mathbf{a}_i \ldots \ \mathbf{a}_t}$, определенное так:

$$\mathrm{F} \circ \ \mathrm{P}^{\sigma_1 \ldots \ \sigma_t}_{\mathbf{a}_1 \ldots \ \mathbf{a}_t} : A \to$$

$$\to F_k : \bigcup_{i=1}^{t} \mathrm{P}^{\sigma}_{\mathbf{a}}\{A\} \to (\mathbf{a}_1\mathbf{w}_1)^{\sigma_1}, \ldots, (\mathbf{a}_t\mathbf{w}_t)^{s_t} \, .$$

Каноническое представление бинарного изображения A' называется точным относительно $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}$ если эти точки образуют полную систему точек разложения для A'.

Переход от канонического представления к представлению бинарных изображений в расширенном пороговом базисе осуществляется преобразование $\mathbf{w}_i = \mathbf{a}_i \left(\mathbf{w}_i^{\sigma_i^{-1}} \right)$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Это влечет следующий результат.

Теорема 3. Нормализованные двумерные бинарные изображения A_1' и A_2' идентичны тогда и только тогда, когда существуют такие точки разложения $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in A_1 \bigcap A_2$, что совпадают их точные канонические представления в расширенном пороговом базисе.

Пусть p-множество $p\{\tilde{\mathbf{a}}_i A\}$ множества A имеет индекс j_i, т. е.

$$(\mathrm{p}\{\tilde{\mathbf{a}}_i A\})^{\sigma_i} = (\mathbf{L}_{j_i} 0_{j_i} \ldots 0_{j_i}) \, \nabla \left(\mathop{\nabla}_{r=0}^{n-j_i} (\mathbf{L}^*_{j_i+r}(q_r) \underbrace{0 \ . \ . \ . \ 0}_{n-(j_i+r)}) \right).$$

Нетрудно заметить, что

$$\mathrm{F}: p\{[\tilde{\mathbf{a}}_i A]^{s_i}\} \ \to \mathbf{w}_i^k = (\omega_1^{ik}, \ldots, \omega_{ji}^{ik}, \ldots, \omega_n^{ik}; \omega_0^{ik}) \, ,$$

$$\mathrm{F}: \ \mathrm{P}^{\sigma_i}_{\mathbf{a}_i}\{A\} \to \ \mathrm{w}_i^k = (\omega_1^{ik}, \ldots, \omega_{ji}^{ik}, \ldots, \omega_n^{ik}; \omega_0^{ik}) \, .$$

Каждому $\mathbf{w}_i^k$ однозначно сопоставим $(n - j_i -$ мерный вектор $\mathbf{v}_i = (v_1^i, \ldots, v_{t_i}^i)$ так:

1) если $j_i \neq 0$, то $v_r^i = \omega^{ik}_{j_i+r-1} - \omega_0^{ik}$, $r = 1, 2, \ldots$ $n - j_i + 1$,
2) если $j_i = 0$, то положим $\mathbf{v}_i = (-1, -1, \ldots, -1)$ — $(n + 1)$-мерный вектор.

Вектор $\mathbf{v}_i$ назовем информационным вектором $p\{\tilde{\mathbf{a}}A\}$ и через $\lambda(\mathbf{v}_i)$ обозначим его размерность.

Пусть A_1', A_2' — двумерные бинарные изображения, размеров $2^r \times 2^s$ $(n = r + s)$, $p\{\tilde{\mathbf{a}} A_1\}$, $p\{\tilde{\mathbf{a}}$ — p-множества соответствующих множеств A относительно точки $\mathbf{a}$ с индексами j_1, j_2 и $\mathbf{v}_1 = (v_1^1, \ldots, v^1_{n-j_1+1})$, $\mathbf{v}_2 = (v_1^2, \ldots, v^2_{n-j_2+1})$ — соответствующие им информационные векторы. Будем

...ить, что информационный вектор $\mathbf{v}_1$ p-множества $p\{\tilde{\mathbf{a}} A_1\}$ предшествует информационному вектору $\mathbf{v}_2$ p-множества $p\{\tilde{\mathbf{a}} A_2\}$ ($v_1 \prec v_2$), если

1) $\lambda(\mathbf{v}_1) \geq \lambda(\mathbf{v}_2)$,

2) $\mathrm{v}^1_{m+i} \leq \mathrm{v}^2_i$, $i = 1, 2, \ldots, \lambda(\mathbf{v}_2)$, где $m = \lambda(\mathbf{v}_1) - \lambda(\mathbf{v}_2)$.

Теорема 4. Пусть подходящие p-максимизаторы и параметры σ_1, σ_2 для p-множеств $H_1 = p\{\tilde{\mathbf{a}} A_1\}$, $H_2 = p\{\tilde{\mathbf{a}} A_1\}$ равны, и $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — соответствующие им информационные векторы, тогда $\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2 \Rightarrow H_1 \subseteq H_2$.

Доказательство. По определению p-множеств H_i:

$$(H_i)^{\sigma_i} = (\mathbf{L}_{j_i} 0_{j_i} \ldots 0_{j_i}) \,\nabla\, (\mathop{\nabla}_{r=0}^{n-j_i} \mathbf{L}^*_{j_i+r}(q^i_r) \underbrace{0 \ldots 0}_{n-(j_i+r)})), \tag{10}$$

$i = 1, 2$. Число строк q^i_t предматрицы толерантности $\mathbf{L}^*_{j_i+t}(q^i_t)$ и $(t+1)$-я координата v^i_{t+1} информационного вектора $\mathbf{v}_i$ p-множества H_i связаны равенством $q^i_t = v^i_{t+1} + 1$. Значит,

$$\mathbf{v}_1 \prec \mathbf{v}_2 \Rightarrow v^1_{m+t+1} \leq v^2_{t+1} \Rightarrow q^1_{m-t} \leq q^2_t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\mathbf{L}^*_{j_1+m+t}(q^1_{m+t})0\ldots0) \lhd (\mathbf{L}^*_{j_2+t}(q^2_t)0\ldots0),$$

где $m = \lambda(\mathbf{v}_1) - \lambda(\mathbf{v}_2)$ и $\mathrm{t} \in \{0, 1, \ldots, \lambda(\mathbf{v}_2) - 1\}$.

Из (10) и из того, что подходящие p-максимизаторы p-множеств H_1, H_2 и их параметры σ_1 и σ_2 совпадают, на основании $(\mathbf{L}^*_{j_1+m-t}(q^1_{m-t})\,0\ldots0) \lhd (\mathbf{L}^*_{j_2-t}\,0_t \ldots 0_t)$ $(\mathrm{t} = 1, 2, \ldots, m)$ заключаем $H_1 \subseteq H_2$.

Теорема доказана.

На множестве действительных чисел R зададим функции g: $R \to Z_2$, h: $R \to Z_2$ так:

$$g(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \geq 0, \\ 0, \text{ если } x < 0, \end{cases} \qquad h(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \neq 0, \\ 0, \text{ если } x = 0 \end{cases}$$

Для пары информационных векторов $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ соответствующих р-множеств $H_1 = p\{\tilde{\mathbf{a}} A_1\}$, $H_2 = \{\tilde{\mathbf{a}} A_2\}$ определим функционалы μ, ν пусть $\lambda(\mathbf{v}_1) \geq \lambda(\mathbf{v}_2)$ и $m = \lambda(\mathbf{v}_1) - \lambda(\mathbf{v}_2)$, тогда

$$\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \sum_{t=1}^{\lambda(\mathbf{v}_2)} \left| g(v^1_{m+t})(v^1_{m+t}+1) - g(v^2_t)(v^2_t+1) \right| +$$

$$+ \sum_{t=1}^{m} (2^{n-\lambda(v_2)-t} - v^1_{m-t+1} - 1),$$

$$\nu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = h(\mathrm{N} - \lambda(\mathbf{v}_1) + 1)2^{\mathrm{N} - \lambda(\mathbf{v}1)}$$

$$+ \sum_{t=1}^{\lambda(\mathbf{v}_2)} (\min\{v^1_{m+t}, v^2_t\} + 1) + \sum_{t=1}^{m} (v^1_{m-t+1} + 1),$$

где $|c|$ — модуль действительного числа c, $\sum\limits_{t=1}^{0}(\ldots) = 0$.

Теорема 5. Пусть подходящие p-максимизаторы и параметры σ_1, σ_2 p-множеств $H_1 = p\{\tilde{\mathbf{a}} A_1\}$, $H_2 = \{\tilde{\mathbf{a}} A_2\}$ равны, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ — соответствующие им информационные векторы и

$$\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\nu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \nu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}.$$

Тогда $|H_1 \cap H_2| = |H_1 \cup H_2|\, \mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ ($|H_i|$ — число элементов множества H_i).

Доказательство. Для определенности положим $\lambda(\mathbf{v}_1) \geq \lambda(\mathbf{v}_2)$, $\lambda(\mathbf{v}_i) = n - j_i + 1$ и $m = \lambda(\mathbf{v}_1) - \lambda(\mathbf{v}_2)$. Из построения p-множеств $H_i = \mathrm{p}\{\tilde{\mathbf{a}} A_i\}$ $(i = 1, 2)$ следует

$$(H_1)^{\sigma_1} = (\mathbf{L}_{j_1} 0_{j_1} \ldots 0_{j_1}) \nabla (\mathbf{L}^*_{j_1}(q^1_0)\, 0 \ldots 0) \nabla \ldots$$

$$\nabla (\mathbf{L}^*_{j_1+m-1}(q^1_{m-1})\, 0 \ldots 0) \nabla$$

$$\nabla (\mathop{\nabla}_{r=m}^{n-j_1} (\mathbf{L}^*_{j_1+r}(q^1_r)\, 0 \ldots 0)), \tag{11}$$

$$(H_2)^{\sigma_2} = (\mathbf{L}_{j_1} 0_{j_1} \ldots 0_{j_1}) \nabla (\mathbf{L}^*_{j_1} 0_{j_1} \ldots$$

$$0_{j_1}) \nabla \ldots \nabla (\mathbf{L}^*_{j_2-1} 0_{j_2-1} \ldots 0^{-1}_{j_2}) \nabla$$

$$\nabla (\mathop{\nabla}_{r=0}^{n-j_2} (\mathbf{L}^*_{j_2+r}(q^2_r) 0 \ldots 0). \tag{12}$$

Пусть $[(\mathbf{L}_j 0_j \ldots 0_j)]$ множество, элементами которого являются строки матрицы $(\mathbf{L}_j 0_j \ldots 0_j)$. Тогда из того, что $q^1_{m+t-1} \leq q^2_{t-1}$ или $q^1_{m+t-1} > q^2_{t-1}$ и $q^i_{t-1} = v^i_t + 1$, $(t \in \{1, 2, \ldots, \lambda(\mathbf{v}_2)\})$, имеем

$$| g(v^1_{m+t})(v^1_{m+t} + 1) - g(v^2_t)(v^2_t + 1) | =$$

$$= \| (\mathbf{L}^*_{j_2+t}(q^2_t)0\ldots0)] / [(\mathbf{L}^*_{j_1+m+t}(q^1_{m+t})0\ldots0) \|$$

или

$$| g(v^1_{m+t})(v^1_{m+t} + 1) - g(v^2_t)(v^2_t + 1) | =$$

$$= |[(\mathbf{L}^*_{j_1+m+t}(q^1_{m+t})0\ldots0)] / [(\mathbf{L}^*_{j_2+t}(q^2_t)0\ldots0)]|.$$

Отсюда

$$| g(v^1_{m+t})(v^1_{m+t} + 1) - g(v^2_t)(v^2_t + 1) | =$$

$$= |[(\mathbf{L}^*_{j_1+m+t}(q^1_{m+t})0\ldots0)] \Delta [(\mathbf{L}^*_{j_2+t}(q^2_t)0\ldots0)]|, \tag{13}$$

где Δ — симметрическая разность множеств. Из (11) следует $q_s^1 < 2^{j_1+s-1}$, $s = 0, 1, 2, \ldots, m-1$. Значит, $\forall s \in \{0, 1, 2, \ldots, m-1\}$

$$[(\mathbf{L}^*_{j_1+s}(q_s^1)\,0\ldots0)] \subset [(\mathbf{L}^*_{j_1+s}0_{j_1+s}\ldots0_{j_1+s})] \text{ и}$$

$$\|[(\mathbf{L}^*_{j_1+s}0_{j_1+s}\ldots0_{j_1+s})]\,\Delta\,[(\mathbf{L}^*_{j_1+s}(q_s^1)\,0\ldots0)]| =$$
$$= 2^{j_1+s-1} - (\mathrm{v}^1_{s+1} + 1). \qquad (14)$$

Из того, что подходящие p-максимизаторы и элементы σ_1, σ_2 для p-множеств H_1 и H_2 совпадают, на основании (11)–(14) заключаем

$$|H_1\,\Delta\,H_2| = \sum_{t=1}^{m}\left(2^{n-\lambda(\mathrm{v}_2)-t} - v^1_{m-t+1} - 1\right) +$$
$$\sum_{t=1}^{\lambda(v_2)}\left|g(v^1_{m+t})(v^1_{m+t}+1) - g(v_t^2)(v_t^2+1)\right|\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \qquad (15)$$

Предматрицы толерантности $\left(\mathbf{L}_r^*(q_r)0\ldots0\right)$, $\left(\mathbf{L}_s^*(q_s)0\ldots0\right)$ удовлетворяют условию $r \neq s \Rightarrow$ $\Rightarrow\left[\left(\mathbf{L}_r^*(q_r)0\ldots0\right)\right]\bigcap\left[\left(\mathbf{L}_s^*(q_s)0\ldots0\right)\right] = \varnothing$.

Отсюда в силу того, что подходящие p-максимизаторы и элементы σ_1, σ_2 для H_1 и H_2 совпадают, на основании (11), (12) имеем

$$|H_1\bigcap H_2| = \left|\left[(\mathbf{L}_{j_1}0_{j_1}\ldots0_{j_1})\right]\right| + \sum_{t=1}^{m}\left|\left[\left(\mathbf{L}^*_{j_1+m-t}(q^1_{m-t})0\ldots0\right)\right]\right| +$$
$$+\sum_{t=1}^{\lambda(v_2)}\left|\left[\left(\mathbf{L}^*_{j_1+m+t-1}(q^1_{m+t-1})0\ldots0\right)\right]\bigcap\left[(\mathbf{L}^*_{j_2+t-1}(q^2_{t-1})0\ldots0)\right]\right| =$$
$$= h(j_1)2^{j_1-1} + \sum_{t=1}^{m}\left(v^1_{m-t+1}+1\right) +$$
$$+\sum_{t=1}^{\lambda(v_2)}\left(\min\left\{v^1_{m+t}, v_t^2\right\}+1\right) = \nu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \qquad (16)$$

Из неравенств (15) и (16) непосредственно следует

$$|H_1\bigcap H_2| = |H_1\bigcup H_2|\frac{|H_1\bigcap H_2|}{|H_1\bigcup H_2|} =$$
$$= |H_1\bigcup H_2|\frac{|H_1\bigcap H_2|}{|H_1\nabla H_2| + |H_1\bigcap H_2|} = |H_1\bigcup H_2|\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

Итак, теорема доказана.

Определим функционал μ_* на паре $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ информационных векторов p-множеств H_1, H_2 так :

$$\mu_*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}{\mu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \nu(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)}.$$

Нетрудно заметить, что функционалы μ_*, μ^* удовлетворяют следующим условиям:

1) на любой паре информационных векторов $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ соответствующих p-множеств H_1, H_2 $\mu_*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, $\mu_*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in [0, 1]$;

2) $\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) + \mu_*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1$;

3) если подходящие p-максимизаторы и параметры σ_1, σ_2 для p-множеств H_1, H_2 совпадают и $\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 1$, то $H_1 = H_2$, а если $\mu^*(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 0$, то $H_1 \bigcap \mathrm{H}_2 = \varnothing$.

Исходя из свойств 2), 3), функционал μ^* естественно назвать мерой «сходства», а μ_* — мерой «различия» p-множеств H_1, H_2 (p-фрагментов $\varphi^{-1}(H_1), \varphi^{-1}(H_2)$).

На основании изложенных выше результатов можно утверждать, что каждому двумерному бинарному изображению A' относительно полной системы точек разложения $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t$ однозначно сопоставляется упорядоченный набор $(H_1', \ldots, H_t')$ p-фрагментов $(H_i' = \varphi^{-1}(H_i))$, которые, в свою очередь, кодируются информационными векторами $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_t$, т. е.

$$A' \to (H_1', \ldots, H_t') \to (\mathbf{v}_t, \ldots, \mathbf{v}_t). \qquad (17)$$

Отображение (17) будем называть представлением двумерного бинарного изображения A' в пространстве информационных векторов относительно системы точек разложения $\mathbf{a}_t, \ldots, \mathbf{a}_t$. Информационные векторы $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_t$ p-фрагментов $(H_1', \ldots, H_t')$ являются математическими признаками для изображения A'. Учитывая свойства функционалов μ^*, μ_* в пространстве информационных векторов можно определить степень «сходства» и «различия» бинарных изображений, которые могут быть успешно использованы при построении алгоритмов распознавания бинарных изображений.

Следует отметить, что представление p-фрагментов двумерных бинарных изображений в пространстве информационных векторов является весьма эффективным с точки зрения сжатия информации. Действительно, если H' — p-фрагмент бинарного изображения A' рецепторного поля размера $2^r \times 2^s$ $(n = r + s)$ относительно точки $\mathbf{a} \in A$ $(A =$ $= \varphi(A'))$ и t — такое наименьшее неотрицательное число, что для $H = p\{\tilde{\mathbf{a}}\,A\}$ имеем $(H) =$ $= (\mathbf{L}_j0_j\ldots0_j)\;\nabla\;(\overset{t}{\underset{r=0}{\nabla}}\mathbf{L}^*_{j+r}(q_r)\underbrace{0\ldots0}_{(j+r)}))$, то из $2^{j-1} > q_0 \geq q_1 \geq$ $\geq\ldots\geq q_t$ и из построения информационного векто

...непосредственно следует, что коэффициент сжатия χ_n p-фрагмента H' удовлетворяет неравенству $\chi_n \geq 2^n/(j(t+1) - 2(n-(j+t)))$.

В задачах обработки и распознавания дискретных изображений важное значение имеет нахождение инвариантов относительно допустимых преобразований. Ниже рассмотрим следующие преобразования бинарных изображений.

Пусть A' — исходное двумерное бинарное изображение рецепторного поля размерами $2^r \times 2^s$ ($n = r + s$), и $A = \varphi(A')$. Через $A'_I(\sigma)$ обозначим изображение $\varphi^{-1}(A^\sigma)$, где $\sigma \in S_n$.

$A'_{II}(\mathbf{b}) = \varphi^{-1}(\tilde{\mathbf{b}}A)$, где $\mathbf{b} \in Z_2^n$.

Пусть $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_t)$ — точное представление двумерного бинарного изображения A' в расширенном пороговом базисе относительно точек разложения $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t$ и $\|\mathbf{w}_i\| = |\omega_1^i| + |\omega_2^i| + \ldots + |\omega_n^i|$, где $\mathbf{w}_i = (\omega_1^i, \omega_2^i, \ldots \omega_n^i; \omega_0^i)$, $i = 1, 2, \ldots, t$. Под нормой $\|A'\|$ бинарного изображения A' в расширенном пороговом базисе понимаем $\|\mathbf{w}_1\| + \|\mathbf{w}_2\| + \ldots + \|\mathbf{w}_n\|$.

Теорема 6. Норма $\|A'\|$ бинарного изображения A' в расширенном пороговом базисе является инвариантной величиной относительно преобразований, порожденных симметрической группой S_n и абелевой группой Z_2^n.

Доказательство. Пусть $(\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_t)$ — точное пороговое представление двумерного бинарного изображения A' относительно точек разложения $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_t \in A$, т. е.

$$A = \bigcup_{i=1}^{t} P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\}. \tag{18}$$

В силу (18)

$$\forall \sigma \in S_N \quad A^\sigma = \bigcup_{i=1}^{t} [(P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\})^\sigma], \tag{19}$$

$$\forall \mathbf{b} \in Z_2^n \quad \mathbf{b}A = \bigcup_{i=1}^{t} \mathbf{b}\, P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\}, \tag{20}$$

где $[(P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\})^\sigma]$ множество, элементами которого являются строки матрицы $(P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\})^\sigma$. Применив к правым частям (19) и (20) отображение F, получим

$$F\colon \bigcup_{i=1}^{t} [(P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\})^\sigma] \to (\mathbf{w}_1^\sigma, \ldots, \mathbf{w}_t^\sigma),$$

$$F\colon \bigcup_{i=1}^{t} \mathbf{b}\, P_{\mathbf{a}_i}^{\sigma_i}\{A\} \to (\mathbf{b}\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{b}_t\mathbf{w}_t).$$

Отсюда с учетом $\|\mathbf{w}_i\| = \|\mathbf{w}_i^\sigma\| = \|\mathbf{b}\mathbf{w}\|$ имеем $\|A'\| = \|A'_I(\sigma)\| = \|A'_{II}(\mathbf{b})\|$.

Итак, теорема доказана.

ВЫВОДЫ

Метод представления двумерных сложных изображений позволяет решать следующие задачи:

— выделить математические признаки в изображениях;
— формализовать понятие «сходства» и «различия» бинарных изображений;
— разработать эффективный способ сжатия бинарных изображений;
— выделить области (детали) в изображениях;
— описать инварианты бинарных изображений относительно групповых преобразований рецепторного поля;
— разработать различные алгоритмы распознавания бинарных изображений, удовлетворяющих некоторым требованиям по точности представления и принятия решений.

Полученные в работе результаты могут быть обобщены на многоуровневых и многомерных дискретных изображениях.

1. Айзенберг Н. Н., Бовди А. А., Герго Э. Й. и др. Некоторые алгебраические аспекты пороговой логики // Кибернетика. — 1980. — № 2. — С. 26—30.
2. Анисимов Б. В., Курганов В. Д., Злобин В. К. Распознавание и цифровая обработка изображений. — М.: Высш. шк., 1983. — 295 с.
3. Гече Ф. Э., Поливко В. П., Роботишин В. И. Реализация функций алгебры логики на пороговых элементах // Кибернетика. — 1983. — № 6. — С. 62—67.

PROCESSING OF DISCRETE SPACE IMAGES WITHIN BROADENED THRESHOLD BASE

F. E. Geche

A method for presentation of two-dimensional discrete images within a broadened threshold base has been elaborated. In this method, there is for every binary image a corresponding ordered set of information vectors which encode the image p-fragments with a high compressibility coefficient. On the set of information vector pairs the functionals μ^* and μ_* are determined, which are used to formalize the notions of «similarity» and «distinction» of discrete images. The invariants of discrete images withina broadened threshold base with respect to some group transformations are described.