Незвідні многочлени

Лектор — доц. Шапочка Ігор

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

15 листопада 2022 року

Нехай P — довільне числове поле,

Нехай P — довільне числове поле, $P[x]$ — кільце многочленів над полем P.

Нехай P — довільне числове поле, $P[x]$ — кільце многочленів над полем P.

Означення 1

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n називається **звідним над полем P**,

Нехай P — довільне числове поле, $P[x]$ — кільце многочленів над полем P.

Означення 1

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n називається звідним над полем P, якщо він має дільник ненульового степеня k меншого за n.

Нехай P — довільне числове поле, $P[x]$ — кільце многочленів над полем P.

Означення 1

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n називається **звідним над полем P**, якщо він має дільник ненульового степеня k меншого за n. У протилежному випадку многочлен $f(x)$ називається **незвідним над полем P**.

Нехай P — довільне числове поле, $P[x]$ — кільце многочленів над полем P.

Означення 1

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n називається **звідним над полем P**, якщо він має дільник ненульового степеня k меншого за n. У протилежному випадку многочлен $f(x)$ називається **незвідним над полем P**.

Пригадуючи ознаку дільника,

Нехай P — довільне числове поле, $P[x]$ — кільце многочленів над полем P.

Означення 1

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n називається **звідним над полем P**, якщо він має дільник ненульового степеня k меншого за n. У протилежному випадку многочлен $f(x)$ називається **незвідним над полем P**.

Пригадуючи ознаку дільника, можна сказати, що многочлен $f(x)$ із $P[x]$ натурального степеня n є звідним,

Нехай P — довільне числове поле, $P[x]$ — кільце многочленів над полем P.

Означення 1

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n називається **звідним над полем P**, якщо він має дільник ненульового степеня k меншого за n. У протилежному випадку многочлен $f(x)$ називається **незвідним над полем P**.

Пригадуючи ознаку дільника, можна сказати, що многочлен $f(x)$ із $P[x]$ натурального степеня n є звідним, якщо його можна записати у вигляді добутку двох многочленів натурального степеня із $P[x]$;

Нехай P — довільне числове поле, $P[x]$ — кільце многочленів над полем P.

Означення 1

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n називається **звідним над полем P**, якщо він має дільник ненульового степеня k меншого за n. У протилежному випадку многочлен $f(x)$ називається **незвідним над полем P**.

Пригадуючи ознаку дільника, можна сказати, що многочлен $f(x)$ із $P[x]$ натурального степеня n є звідним, якщо його можна записати у вигляді добутку двох многочленів натурального степеня із $P[x]$; многочлен $f(x)$ натурального степеня n є незвідним,

Нехай P — довільне числове поле, $P[x]$ — кільце многочленів над полем P.

Означення 1

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n називається **звідним над полем P**, якщо він має дільник ненульового степеня k меншого за n. У протилежному випадку многочлен $f(x)$ називається **незвідним над полем P**.

Пригадуючи ознаку дільника, можна сказати, що многочлен $f(x)$ із $P[x]$ натурального степеня n є звідним, якщо його можна записати у вигляді добутку двох многочленів натурального степеня із $P[x]$; многочлен $f(x)$ натурального степеня n є незвідним, якщо його не можна записати у вигляді добутку двох многочленів натурального степеня із кільця $P[x]$.

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним,

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним.

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне.

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів,

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax + b)(cx + d)$,

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax + b)(cx + d)$, де a, b, c, d — раціональні числа,

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax + b)(cx + d)$, де a, b, c, d — раціональні числа, причому $a \neq 0$, $c \neq 0$.

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax+b)(cx+d)$, де a, b, c, d — раціональні числа, причому $a \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді $-\frac{b}{a}$ є коренем многочлена $g(x)$,

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax+b)(cx+d)$, де a, b, c, d — раціональні числа, причому $a \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді $-\frac{b}{a}$ є коренем многочлена $g(x)$, тобто $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 = 0$.

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax+b)(cx+d)$, де a, b, c, d — раціональні числа, причому $a \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді $-\frac{b}{a}$ є коренем многочлена $g(x)$, тобто $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 = 0$. Остання рівність неможлива,

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax + b)(cx + d)$, де a, b, c, d — раціональні числа, причому $a \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді $-\frac{b}{a}$ є коренем многочлена $g(x)$, тобто $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 = 0$. Остання рівність неможлива, оскільки добре відомо, що не існує раціонального числа квадрат, якого дорівнює 2.

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax+b)(cx+d)$, де a, b, c, d — раціональні числа, причому $a \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді $-\frac{b}{a}$ є коренем многочлена $g(x)$, тобто $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 = 0$. Остання рівність неможлива, оскільки добре відомо, що не існує раціонального числа квадрат, якого дорівнює 2.

Приклад 3.

Многочлен $h(x) = x^2 + 1$ над полем дійсних чисел,

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax + b)(cx + d)$, де a, b, c, d — раціональні числа, причому $a \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді $-\frac{b}{a}$ є коренем многочлена $g(x)$, тобто $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 = 0$. Остання рівність неможлива, оскільки добре відомо, що не існує раціонального числа квадрат, якого дорівнює 2.

Приклад 3.

Многочлен $h(x) = x^2 + 1$ над полем дійсних чисел, а отже і над полем раціональних чисел,

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax+b)(cx+d)$, де a, b, c, d — раціональні числа, причому $a \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді $-\frac{b}{a}$ є коренем многочлена $g(x)$, тобто $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 = 0$. Остання рівність неможлива, оскільки добре відомо, що не існує раціонального числа квадрат, якого дорівнює 2.

Приклад 3.

Многочлен $h(x) = x^2 + 1$ над полем дійсних чисел, а отже і над полем раціональних чисел, є незвідним.

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax + b)(cx + d)$, де a, b, c, d — раціональні числа, причому $a \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді $-\frac{b}{a}$ є коренем многочлена $g(x)$, тобто $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 = 0$. Остання рівність неможлива, оскільки добре відомо, що не існує раціонального числа квадрат, якого дорівнює 2.

Приклад 3.

Многочлен $h(x) = x^2 + 1$ над полем дійсних чисел, а отже і над полем раціональних чисел, є незвідним. Доведення цього факту подібне до попереднього випадку.

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax+b)(cx+d)$, де a, b, c, d — раціональні числа, причому $a \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді $-\frac{b}{a}$ є коренем многочлена $g(x)$, тобто $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 = 0$. Остання рівність неможлива, оскільки добре відомо, що не існує раціонального числа квадрат, якого дорівнює 2.

Приклад 3.

Многочлен $h(x) = x^2 + 1$ над полем дійсних чисел, а отже і над полем раціональних чисел, є незвідним. Доведення цього факту подібне до попереднього випадку. Але многочлен $h(x)$ розглядуваний над полем комплексних чисел є звідним,

Приклад 1.

Многочлен $f(x) = x^2 - 3x + 2$ над полем раціональних чисел є звідним, оскільки $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$.

Приклад 2.

Многочлен $g(x) = x^2 - 2$ над полем раціональних чисел є незвідним. Справді, припустимо протилежне. Тоді $g(x)$ розкладається у добуток лінійних многочленів, тобто $x^2 - 2 = (ax+b)(cx+d)$, де a, b, c, d — раціональні числа, причому $a \neq 0$, $c \neq 0$. Тоді $-\frac{b}{a}$ є коренем многочлена $g(x)$, тобто $\left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2 = 0$. Остання рівність неможлива, оскільки добре відомо, що не існує раціонального числа квадрат, якого дорівнює 2.

Приклад 3.

Многочлен $h(x) = x^2 + 1$ над полем дійсних чисел, а отже і над полем раціональних чисел, є незвідним. Доведення цього факту подібне до попереднього випадку. Але многочлен $h(x)$ розглядуваний над полем комплексних чисел є звідним, тому що $x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ (i — уявна одиниця).

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P,

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів.

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

Лема 1

Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний,

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

Лема 1

Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний, то для будь-якого ненульового елемента c поля P

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

Лема 1

Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний, то для будь-якого ненульового елемента c поля P многочлен $cp(x)$ є незвідним.

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

Лема 1

Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний, то для будь-якого ненульового елемента c поля P многочлен $cp(x)$ є незвідним.

Доведення.

Справді, припустимо, що многочлен $cp(x)$ — звідний над полем P.

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

Лема 1

Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний, то для будь-якого ненульового елемента c поля P многочлен $cp(x)$ є незвідним.

Доведення.

Справді, припустимо, що многочлен $cp(x)$ — звідний над полем P. Отже, в кільці $P[x]$ є дільники цього многочлена,

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

Лема 1

Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний, то для будь-якого ненульового елемента c поля P многочлен $cp(x)$ є незвідним.

Доведення.

Справді, припустимо, що многочлен $cp(x)$ — звідний над полем P. Отже, в кільці $P[x]$ є дільники цього многочлена, степені яких більші від 0,

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

Лема 1

Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний, то для будь-якого ненульового елемента c поля P многочлен $cp(x)$ є незвідним.

Доведення.

Справді, припустимо, що многочлен $cp(x)$ — звідний над полем P. Отже, в кільці $P[x]$ є дільники цього многочлена, степені яких більші від 0, але менші від степеня $cp(x)$.

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

Лема 1

Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний, то для будь-якого ненульового елемента c поля P многочлен $cp(x)$ є незвідним.

Доведення.

Справді, припустимо, що многочлен $cp(x)$ — звідний над полем P. Отже, в кільці $P[x]$ є дільники цього многочлена, степені яких більші від 0, але менші від степеня $cp(x)$. За властивістю подільності ці дільники є також дільниками многочлена $p(x)$,

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

Лема 1

Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний, то для будь-якого ненульового елемента c поля P многочлен $cp(x)$ є незвідним.

Доведення.

Справді, припустимо, що многочлен $cp(x)$ — звідний над полем P. Отже, в кільці $P[x]$ є дільники цього многочлена, степені яких більші від 0, але менші від степеня $cp(x)$. За властивістю подільності ці дільники є також дільниками многочлена $p(x)$, тому многочлен $p(x)$ — звідний.

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

Лема 1

Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний, то для будь-якого ненульового елемента c поля P многочлен $cp(x)$ є незвідним.

Доведення.

Справді, припустимо, що многочлен $cp(x)$ — звідний над полем P. Отже, в кільці $P[x]$ є дільники цього многочлена, степені яких більші від 0, але менші від степеня $cp(x)$. За властивістю подільності ці дільники є також дільниками многочлена $p(x)$, тому многочлен $p(x)$ — звідний. Це суперечить умові.

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

Лема 1

Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний, то для будь-якого ненульового елемента c поля P многочлен $cp(x)$ є незвідним.

Доведення.

Справді, припустимо, що многочлен $cp(x)$ — звідний над полем P. Отже, в кільці $P[x]$ є дільники цього многочлена, степені яких більші від 0, але менші від степеня $cp(x)$. За властивістю подільності ці дільники є також дільниками многочлена $p(x)$, тому многочлен $p(x)$ — звідний. Це суперечить умові. Отже, наше припущення неправильне.

Зауваження 1

Очевидно всякий многочлен $f(x) \in P[x]$ першого степеня є незвідним над полем P, оскільки він не може мати дільників степеня більшого ніж 0, і меншого ніж 1.

Розглянемо основні властивості незвідних многочленів. Зазначимо, що йдеться про многочлени з кільця $P[x]$, незвідні над полем P.

Лема 1

Якщо многочлен $p(x)$ — незвідний, то для будь-якого ненульового елемента c поля P многочлен $cp(x)$ є незвідним.

Доведення.

Справді, припустимо, що многочлен $cp(x)$ — звідний над полем P. Отже, в кільці $P[x]$ є дільники цього многочлена, степені яких більші від 0, але менші від степеня $cp(x)$. За властивістю подільності ці дільники є також дільниками многочлена $p(x)$, тому многочлен $p(x)$ — звідний. Це суперечить умові. Отже, наше припущення неправильне. $\square$

Лема 2

Якщо незвідний многочлен $q(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$,

Лема 2

Якщо незвідний многочлен $q(x)$ *ділиться на незвідний многочлен* $p(x)$, *то* $q(x) = cp(x)$,

Лема 2

Якщо незвідний многочлен $q(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то $q(x) = cp(x)$, де c — деякий відмінний від нуля елемент поля P.

Лема 2

Якщо незвідний многочлен $q(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то $q(x) = cp(x)$, де c — деякий відмінний від нуля елемент поля P.

Доведення.

За означенням подільності $q(x) = p(x)h(x)$,

Лема 2

Якщо незвідний многочлен $q(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то $q(x) = cp(x)$, де c — деякий відмінний від нуля елемент поля P.

Доведення.

За означенням подільності $q(x) = p(x)h(x)$, для деякого многочлена $h(x) \in P[x]$.

Лема 2

Якщо незвідний многочлен $q(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то $q(x) = cp(x)$, де c — деякий відмінний від нуля елемент поля P.

Доведення.

За означенням подільності $q(x) = p(x)h(x)$, для деякого многочлена $h(x) \in P[x]$. Оскільки $q(x)$ — незвідний многочлен,

Лема 2

Якщо незвідний многочлен $q(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то $q(x) = cp(x)$, де c — деякий відмінний від нуля елемент поля P.

Доведення.

За означенням подільності $q(x) = p(x)h(x)$, для деякого многочлена $h(x) \in P[x]$. Оскільки $q(x)$ — незвідний многочлен, а $p(x)$ як незвідний многочлен має натуральний степінь,

Лема 2

Якщо незвідний многочлен $q(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то $q(x) = cp(x)$, де c — деякий відмінний від нуля елемент поля P.

Доведення.

За означенням подільності $q(x) = p(x)h(x)$, для деякого многочлена $h(x) \in P[x]$. Оскільки $q(x)$ — незвідний многочлен, а $p(x)$ як незвідний многочлен має натуральний степінь, то степінь $h(x)$ дорівнює нулю.

Лема 2

Якщо незвідний многочлен $q(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то $q(x) = cp(x)$, де c — деякий відмінний від нуля елемент поля P.

Доведення.

За означенням подільності $q(x) = p(x)h(x)$, для деякого многочлена $h(x) \in P[x]$. Оскільки $q(x)$ — незвідний многочлен, а $p(x)$ як незвідний многочлен має натуральний степінь, то степінь $h(x)$ дорівнює нулю. Отже $h(x) = c$

Лема 2

Якщо незвідний многочлен $q(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то $q(x) = cp(x)$, де c — деякий відмінний від нуля елемент поля P.

Доведення.

За означенням подільності $q(x) = p(x)h(x)$, для деякого многочлена $h(x) \in P[x]$. Оскільки $q(x)$ — незвідний многочлен, а $p(x)$ як незвідний многочлен має натуральний степінь, то степінь $h(x)$ дорівнює нулю. Отже $h(x) = c$ $(c \in P,\ c \neq 0)$,

Лема 2

Якщо незвідний многочлен $q(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то $q(x) = cp(x)$, де c — деякий відмінний від нуля елемент поля P.

Доведення.

За означенням подільності $q(x) = p(x)h(x)$, для деякого многочлена $h(x) \in P[x]$. Оскільки $q(x)$ — незвідний многочлен, а $p(x)$ як незвідний многочлен має натуральний степінь, то степінь $h(x)$ дорівнює нулю. Отже $h(x) = c$ ($c \in P$, $c \neq 0$), а тому $q(x) = cp(x)$. $\square$

Лема 3

Якщо $f(x)$ *— довільний многочлен,*

Лема 3

Якщо $f(x)$ — довільний многочлен, $p(x)$ — незвідний многочлен,

Лема 3

Якщо $f(x)$ *— довільний многочлен,* $p(x)$ *— незвідний многочлен, тоді або* $f(x)$ *ділиться на* $p(x)$*,*

Лема 3

Якщо $f(x)$ — довільний многочлен, $p(x)$ — незвідний многочлен, тоді або $f(x)$ ділиться на $p(x)$, або ці многочлени — взаємно прості.

Лема 3

Якщо $f(x)$ — довільний многочлен, $p(x)$ — незвідний многочлен, тоді або $f(x)$ ділиться на $p(x)$, або ці многочлени — взаємно прості.

Доведення.

Нехай $d(x)$ — найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $p(x)$.

Лема 3

Якщо $f(x)$ — довільний многочлен, $p(x)$ — незвідний многочлен, тоді або $f(x)$ ділиться на $p(x)$, або ці многочлени — взаємно прості.

Доведення.

Нехай $d(x)$ — найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $p(x)$. Оскільки $d(x)$ — дільник многочлена $p(x)$,

Лема 3

Якщо $f(x)$ *— довільний многочлен,* $p(x)$ *— незвідний многочлен, тоді або* $f(x)$ *ділиться на* $p(x)$*, або ці многочлени — взаємно прості.*

Доведення.

Нехай $d(x)$ — найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $p(x)$. Оскільки $d(x)$ — дільник многочлена $p(x)$, то степінь $d(x)$ дорівнює або 0, або степені многочлена $p(x)$,

Лема 3

Якщо $f(x)$ — довільний многочлен, $p(x)$ — незвідний многочлен, тоді або $f(x)$ ділиться на $p(x)$, або ці многочлени — взаємно прості.

Доведення.

Нехай $d(x)$ — найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $p(x)$. Оскільки $d(x)$ — дільник многочлена $p(x)$, то степінь $d(x)$ дорівнює або 0, або степені многочлена $p(x)$, і, отже, $d(x)$ — або відмінний від нуля елемент c поля P,

Лема 3

Якщо $f(x)$ — довільний многочлен, $p(x)$ — незвідний многочлен, тоді або $f(x)$ ділиться на $p(x)$, або ці многочлени — взаємно прості.

Доведення.

Нехай $d(x)$ — найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $p(x)$. Оскільки $d(x)$ — дільник многочлена $p(x)$, то степінь $d(x)$ дорівнює або 0, або степені многочлена $p(x)$, і, отже, $d(x)$ — або відмінний від нуля елемент c поля P, або за ознакою подільності многочленів,

Лема 3

Якщо $f(x)$ — довільний многочлен, $p(x)$ — незвідний многочлен, тоді або $f(x)$ ділиться на $p(x)$, або ці многочлени — взаємно прості.

Доведення.

Нехай $d(x)$ — найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $p(x)$. Оскільки $d(x)$ — дільник многочлена $p(x)$, то степінь $d(x)$ дорівнює або 0, або степені многочлена $p(x)$, і, отже, $d(x)$ — або відмінний від нуля елемент c поля P, або за ознакою подільності многочленів, многочлен вигляду $cp(x)$ $(c \in P,\ c \neq 0)$.

Лема 3

Якщо $f(x)$ — довільний многочлен, $p(x)$ — незвідний многочлен, тоді або $f(x)$ ділиться на $p(x)$, або ці многочлени — взаємно прості.

Доведення.

Нехай $d(x)$ — найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $p(x)$. Оскільки $d(x)$ — дільник многочлена $p(x)$, то степінь $d(x)$ дорівнює або 0, або степені многочлена $p(x)$, і, отже, $d(x)$ — або відмінний від нуля елемент c поля P, або за ознакою подільності многочленів, многочлен вигляду $cp(x)$ $(c \in P,\ c \neq 0)$. У першому випадку $f(x)$ і $p(x)$ — взаємно прості,

Лема 3

Якщо $f(x)$ — довільний многочлен, $p(x)$ — незвідний многочлен, тоді або $f(x)$ ділиться на $p(x)$, або ці многочлени — взаємно прості.

Доведення.

Нехай $d(x)$ — найбільший спільний дільник многочленів $f(x)$ і $p(x)$. Оскільки $d(x)$ — дільник многочлена $p(x)$, то степінь $d(x)$ дорівнює або 0, або степені многочлена $p(x)$, і, отже, $d(x)$ — або відмінний від нуля елемент c поля P, або за ознакою подільності многочленів, многочлен вигляду $cp(x)$ ($c \in P$, $c \neq 0$). У першому випадку $f(x)$ і $p(x)$ — взаємно прості, у другому — $f(x)$ ділиться на $p(x)$. $\square$

Лема 4

Якщо добуток многочленів $f(x)$ і $g(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$,

Лема 4

Якщо добуток многочленів $f(x)$ і $g(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то принаймні один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.

Лема 4

Якщо добуток многочленів $f(x)$ і $g(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то принаймні один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.

Доведення.

Якщо $f(x)$ не ділиться на $p(x)$,

Лема 4

Якщо добуток многочленів $f(x)$ і $g(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то принаймні один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.

Доведення.

Якщо $f(x)$ не ділиться на $p(x)$, то за попередньою властивістю $f(x)$ і $p(x)$ — взаємно прості.

Лема 4

Якщо добуток многочленів $f(x)$ і $g(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, то принаймні один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.

Доведення.

Якщо $f(x)$ не ділиться на $p(x)$, то за попередньою властивістю $f(x)$ і $p(x)$ — взаємно прості. Тоді за раніше доведеною теоремою $g(x)$ ділиться на $p(x)$. $\square$

Лема 5

Якщо добуток многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_s(x)$ *ділиться на незвідний многочлен* $p(x)$,

Лема 5

Якщо добуток многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, тоді хоча б один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.

Доведення.

Якщо $f_1(x)$ не ділиться на $p(x)$,

Лема 5

Якщо добуток многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, тоді хоча б один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.

Доведення.

Якщо $f_1(x)$ не ділиться на $p(x)$, то за попередньою властивістю $f_2(x)f_3(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$.

Лема 5

Якщо добуток многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, тоді хоча б один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.

Доведення.

Якщо $f_1(x)$ не ділиться на $p(x)$, то за попередньою властивістю $f_2(x)f_3(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$. Якщо $f_2(x)$ не ділиться на $p(x)$,

Лема 5

Якщо добуток многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, тоді хоча б один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.

Доведення.

Якщо $f_1(x)$ не ділиться на $p(x)$, то за попередньою властивістю $f_2(x)f_3(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$. Якщо $f_2(x)$ не ділиться на $p(x)$, то знову ж таки за попередньою властивістю $f_3(x)f_4(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$

Лема 5

Якщо добуток многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, тоді хоча б один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.

Доведення.

Якщо $f_1(x)$ не ділиться на $p(x)$, то за попередньою властивістю $f_2(x)f_3(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$. Якщо $f_2(x)$ не ділиться на $p(x)$, то знову ж таки за попередньою властивістю $f_3(x)f_4(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$ і т. д.

Лема 5

Якщо добуток многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, тоді хоча б один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.

Доведення.

Якщо $f_1(x)$ не ділиться на $p(x)$, то за попередньою властивістю $f_2(x)f_3(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$. Якщо $f_2(x)$ не ділиться на $p(x)$, то знову ж таки за попередньою властивістю $f_3(x)f_4(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$ і т. д. Очевидно, на деякому скінченому кроці цей процес зупиниться

Лема 5

Якщо добуток многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, тоді хоча б один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.

Доведення.

Якщо $f_1(x)$ не ділиться на $p(x)$, то за попередньою властивістю $f_2(x)f_3(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$. Якщо $f_2(x)$ не ділиться на $p(x)$, то знову ж таки за попередньою властивістю $f_3(x)f_4(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$ і т. д. Очевидно, на деякому скінченому кроці цей процес зупиниться і для деякого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

Лема 5

Якщо добуток многочленів $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p(x)$, тоді хоча б один із цих многочленів ділиться на $p(x)$.

Доведення.

Якщо $f_1(x)$ не ділиться на $p(x)$, то за попередньою властивістю $f_2(x)f_3(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$. Якщо $f_2(x)$ не ділиться на $p(x)$, то знову ж таки за попередньою властивістю $f_3(x)f_4(x)\cdots f_s(x)$ ділиться на $p(x)$ і т. д. Очевидно, на деякому скінченому кроці цей процес зупиниться і для деякого $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ многочлен $f_i(x)$ ділитиметься на $p(x)$. $\square$

Теорема 1

Довільний многочлен $f(x)$ *натурального степеня* n *із кільця* $P[x]$

Теорема 1

Довільний многочлен $f(x)$ *натурального степеня* n *із кільця* $P[x]$ *можна представити у вигляді добутку незвідних над полем* P *многочленів* $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_m(x)$*:*

Теорема 1

Довільний многочлен $f(x)$ натурального степеня n із кільця $P[x]$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_m(x)$:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x). \tag{1}$$

Теорема 1

Довільний многочлен $f(x)$ натурального степеня n із кільця $P[x]$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\dots$, $p_m(x)$:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x). \tag{1}$$

Доведення.

Якщо многочлен незвідний над полем P, то для нього теорема справджується:

Теорема 1

Довільний многочлен $f(x)$ натурального степеня n із кільця $P[x]$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_m(x)$:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x). \tag{1}$$

Доведення.

Якщо многочлен незвідний над полем P, то для нього теорема справджується: добуток про який йдеться в теоремі,

Теорема 1

Довільний многочлен $f(x)$ натурального степеня n із кільця $P[x]$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_m(x)$:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x). \tag{1}$$

Доведення.

Якщо многочлен незвідний над полем P, то для нього теорема справджується: добуток про який йдеться в теоремі, складається лише з одного множника $f(x)$.

Теорема 1

Довільний многочлен $f(x)$ натурального степеня n із кільця $P[x]$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_m(x)$:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x). \tag{1}$$

Доведення.

Якщо многочлен незвідний над полем P, то для нього теорема справджується: добуток про який йдеться в теоремі, складається лише з одного множника $f(x)$. Звідси випливає, що теорема справджується для всіх многочленів першого степеня, оскільки кожен такий многочлен незвідний.

Теорема 1

Довільний многочлен $f(x)$ натурального степеня n із кільця $P[x]$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів $p_1(x)$, $p_2(x)$, …, $p_m(x)$:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x). \tag{1}$$

Доведення.

Якщо многочлен незвідний над полем P, то для нього теорема справджується: добуток про який йдеться в теоремі, складається лише з одного множника $f(x)$. Звідси випливає, що теорема справджується для всіх многочленів першого степеня, оскільки кожен такий многочлен незвідний.

Припустимо, що теорема справджується для всякого многочлена,

Теорема 1

Довільний многочлен $f(x)$ натурального степеня n із кільця $P[x]$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_m(x)$:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x). \tag{1}$$

Доведення.

Якщо многочлен незвідний над полем P, то для нього теорема справджується: добуток про який йдеться в теоремі, складається лише з одного множника $f(x)$. Звідси випливає, що теорема справджується для всіх многочленів першого степеня, оскільки кожен такий многочлен незвідний.

Припустимо, що теорема справджується для всякого многочлена, степінь якого більший від 1 і менший від n,

Теорема 1

Довільний многочлен $f(x)$ натурального степеня n із кільця $P[x]$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_m(x)$:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x). \tag{1}$$

Доведення.

Якщо многочлен незвідний над полем P, то для нього теорема справджується: добуток про який йдеться в теоремі, складається лише з одного множника $f(x)$. Звідси випливає, що теорема справджується для всіх многочленів першого степеня, оскільки кожен такий многочлен незвідний.

Припустимо, що теорема справджується для всякого многочлена, степінь якого більший від 1 і менший від n, і доведемо, що тоді вона справджуються, й для будь-якого многочлена степеня n.

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n.

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості:

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P,

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P.

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P. У першому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується.

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P. У першому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується. Розглянемо другий випадок.

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P. У першому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується. Розглянемо другий випадок. Якщо $f(x)$ — звідний над полем P, то

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P. У першому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується. Розглянемо другий випадок. Якщо $f(x)$ — звідний над полем P, то

$$f(x) = g(x)h(x), \tag{2}$$

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P. У першому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується. Розглянемо другий випадок. Якщо $f(x)$ — звідний над полем P, то

$$f(x) = g(x)h(x), \tag{2}$$

де $g(x)$ і $h(x)$ — многочлени з кільця $P[x]$, степені яких більші від 0 і менші від n.

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P. У першому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується. Розглянемо другий випадок. Якщо $f(x)$ — звідний над полем P, то

$$f(x) = g(x)h(x), \tag{2}$$

де $g(x)$ і $h(x)$ — многочлени з кільця $P[x]$, степені яких більші від 0 і менші від n. За припущенням, кожний з многочленів $g(x)$ і $h(x)$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів,

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P. У першому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується. Розглянемо другий випадок. Якщо $f(x)$ — звідний над полем P, то

$$f(x) = g(x)h(x), \tag{2}$$

де $g(x)$ і $h(x)$ — многочлени з кільця $P[x]$, степені яких більші від 0 і менші від n. За припущенням, кожний з многочленів $g(x)$ і $h(x)$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів, тобто

$$g(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x),$$

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P. У першому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується. Розглянемо другий випадок. Якщо $f(x)$ — звідний над полем P, то

$$f(x) = g(x)h(x), \tag{2}$$

де $g(x)$ і $h(x)$ — многочлени з кільця $P[x]$, степені яких більші від 0 і менші від n. За припущенням, кожний з многочленів $g(x)$ і $h(x)$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів, тобто

$$g(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x), \quad h(x) = p_{k+1}(x)p_{k+2}(x)\cdots p_m(x),$$

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P. У першому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується. Розглянемо другий випадок. Якщо $f(x)$ — звідний над полем P, то

$$f(x) = g(x)h(x), \tag{2}$$

де $g(x)$ і $h(x)$ — многочлени з кільця $P[x]$, степені яких більші від 0 і менші від n. За припущенням, кожний з многочленів $g(x)$ і $h(x)$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів, тобто

$$g(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x), \quad h(x) = p_{k+1}(x)p_{k+2}(x)\cdots p_m(x),$$

де $p_i(x)$ — незвідний многочлен над полем P $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P. У першому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується. Розглянемо другий випадок. Якщо $f(x)$ — звідний над полем P, то

$$f(x) = g(x)h(x), \tag{2}$$

де $g(x)$ і $h(x)$ — многочлени з кільця $P[x]$, степені яких більші від 0 і менші від n. За припущенням, кожний з многочленів $g(x)$ і $h(x)$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів, тобто

$$g(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x), \quad h(x) = p_{k+1}(x)p_{k+2}(x)\cdots p_m(x),$$

де $p_i(x)$ — незвідний многочлен над полем P $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Підставивши у рівність (2) замість $g(x)$ і $h(x)$ добутки, через які вони представляються, одержимо

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x)p_{k+1}(x)\cdots p_m(x).$$

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P. У першому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується. Розглянемо другий випадок. Якщо $f(x)$ — звідний над полем P, то

$$f(x) = g(x)h(x), \tag{2}$$

де $g(x)$ і $h(x)$ — многочлени з кільця $P[x]$, степені яких більші від 0 і менші від n. За припущенням, кожний з многочленів $g(x)$ і $h(x)$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів, тобто

$$g(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x), \quad h(x) = p_{k+1}(x)p_{k+2}(x)\cdots p_m(x),$$

де $p_i(x)$ — незвідний многочлен над полем P $(i = 1, 2, \dots, m)$. Підставивши у рівність (2) замість $g(x)$ і $h(x)$ добутки, через які вони представляються, одержимо

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x)p_{k+1}(x)\cdots p_m(x).$$

Отже, і в другому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується.

Доведення.

Нехай $f(x)$ — будь-який многочлен з кільця $P[x]$ степеня n. Для цього многочлена є тільки дві можливості: або $f(x)$ — незвідний над полем P, або $f(x)$ — звідний над полем P. У першому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується. Розглянемо другий випадок. Якщо $f(x)$ — звідний над полем P, то

$$f(x) = g(x)h(x), \tag{2}$$

де $g(x)$ і $h(x)$ — многочлени з кільця $P[x]$, степені яких більші від 0 і менші від n. За припущенням, кожний з многочленів $g(x)$ і $h(x)$ можна представити у вигляді добутку незвідних над полем P многочленів, тобто

$$g(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x), \quad h(x) = p_{k+1}(x)p_{k+2}(x)\cdots p_m(x),$$

де $p_i(x)$ — незвідний многочлен над полем P $(i = 1, 2, \ldots, m)$. Підставивши у рівність (2) замість $g(x)$ і $h(x)$ добутки, через які вони представляються, одержимо

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_k(x)p_{k+1}(x)\cdots p_m(x).$$

Отже, і в другому випадку для многочлена $f(x)$ теорема справджується. Теорему доведено. □

Означення 2

Запис многочлена $f(x)$ у вигляді добутку незвідних многочленів

Означення 2

Запис многочлена $f(x)$ у вигляді добутку незвідних многочленів називають розкладом многочлена $f(x)$ на незвідні множники

Означення 2

Запис многочлена $f(x)$ у вигляді добутку незвідних многочленів називають розкладом многочлена $f(x)$ на незвідні множники або розкладом у добуток незвідних над полем P многочленів.

Означення 2

Запис многочлена $f(x)$ у вигляді добутку незвідних многочленів називають розкладом многочлена $f(x)$ на незвідні множники або розкладом у добуток незвідних над полем P многочленів.

Неважко зрозуміти, що якщо

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x)$$

Означення 2

Запис многочлена $f(x)$ у вигляді добутку незвідних многочленів називають розкладом многочлена $f(x)$ на незвідні множники або розкладом у добуток незвідних над полем P многочленів.

Неважко зрозуміти, що якщо

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x)$$

є розкладом многочлена $f(x)$ у добуток незвідних над полем P множників

Означення 2

Запис многочлена $f(x)$ у вигляді добутку незвідних многочленів називають **розкладом многочлена $f(x)$ на незвідні множники** або **розкладом у добуток незвідних над полем P многочленів.**

Неважко зрозуміти, що якщо

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x)$$

є розкладом многочлена $f(x)$ у добуток незвідних над полем P множників і $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — елементи поля P такі,

Означення 2

Запис многочлена $f(x)$ у вигляді добутку незвідних многочленів називають розкладом многочлена $f(x)$ на незвідні множники або розкладом у добуток незвідних над полем P многочленів.

Неважко зрозуміти, що якщо

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x)$$

є розкладом многочлена $f(x)$ у добуток незвідних над полем P множників і $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — елементи поля P такі, що

$$c_1c_2\cdots c_m = 1,$$

Означення 2

Запис многочлена $f(x)$ у вигляді добутку незвідних многочленів називають **розкладом многочлена $f(x)$ на незвідні множники** або **розкладом у добуток незвідних над полем P многочленів.**

Неважко зрозуміти, що якщо

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x)$$

є розкладом многочлена $f(x)$ у добуток незвідних над полем P множників і $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — елементи поля P такі, що

$$c_1c_2\cdots c_m = 1,$$

то

$$f(x) = [c_1p_1(x)][c_2p_2(x)]\cdots[c_mp_m(x)]$$

також є розкладом многочлена у добуток незвідних множників.

Означення 2

Запис многочлена $f(x)$ у вигляді добутку незвідних многочленів називають розкладом многочлена $f(x)$ на незвідні множники або розкладом у добуток незвідних над полем P многочленів.

Неважко зрозуміти, що якщо

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x)$$

є розкладом многочлена $f(x)$ у добуток незвідних над полем P множників і $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — елементи поля P такі, що

$$c_1c_2\cdots c_m = 1,$$

то

$$f(x) = [c_1p_1(x)][c_2p_2(x)]\cdots[c_mp_m(x)]$$

також є розкладом многочлена у добуток незвідних множників. Виявляється, що цим вичерпуються всі розклади многочлена,

Означення 2

Запис многочлена $f(x)$ у вигляді добутку незвідних многочленів називають розкладом многочлена $f(x)$ на незвідні множники або розкладом у добуток незвідних над полем P многочленів.

Неважко зрозуміти, що якщо

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x)$$

є розкладом многочлена $f(x)$ у добуток незвідних над полем P множників і $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — елементи поля P такі, що

$$c_1c_2\cdots c_m = 1,$$

то

$$f(x) = [c_1p_1(x)][c_2p_2(x)]\cdots[c_mp_m(x)]$$

також є розкладом многочлена у добуток незвідних множників. Виявляється, що цим вичерпуються всі розклади многочлена, оскільки справджується наступне твердження.

Теорема 2

Якщо многочлен $f(x)$ *із кільця* $P[x]$

Теорема 2

Якщо многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ двома способами розкладається у добуток незвідних множників:

Теорема 2

Якщо многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ двома способами розкладається у добуток незвідних множників:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x),$$

Теорема 2

Якщо многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ двома способами розкладається у добуток незвідних множників:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x),$$
$$f(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x),$$

Теорема 2

Якщо многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ двома способами розкладається у добуток незвідних множників:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x),$$
$$f(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x),$$

тоді $m = s$

Теорема 2

Якщо многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ двома способами розкладається у добуток незвідних множників:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x),$$

$$f(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x),$$

тоді $m = s$ і при відповідній нумерації множників справджуються рівності

$$q_1(x) = c_1p_1(x), \quad q_2(x) = c_2p_2(x), \quad \ldots, \quad q_m(x) = c_mp_m(x),$$

Теорема 2

Якщо многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ двома способами розкладається у добуток незвідних множників:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x),$$
$$f(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x),$$

тоді $m = s$ і при відповідній нумерації множників справджуються рівності

$$q_1(x) = c_1p_1(x), \quad q_2(x) = c_2p_2(x), \quad \dots, \quad q_m(x) = c_mp_m(x),$$

де $c_1, \dots, c_m$ — деякі відмінні від нуля елементи поля P.

Теорема 2

Якщо многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ двома способами розкладається у добуток незвідних множників:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x),$$
$$f(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x),$$

тоді $m = s$ і при відповідній нумерації множників справджуються рівності

$$q_1(x) = c_1p_1(x), \quad q_2(x) = c_2p_2(x), \quad \dots, \quad q_m(x) = c_mp_m(x),$$

де $c_1, \dots, c_m$ — деякі відмінні від нуля елементи поля P.

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується,

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні.

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$,

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n,

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n, і доведемо, що вона справедлива для довільного многочлена степеня n.

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n, і доведемо, що вона справедлива для довільного многочлена степеня n. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен степеня n із $P[x]$

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n, і доведемо, що вона справедлива для довільного многочлена степеня n. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен степеня n із $P[x]$ і він двома способами представляється у вигляді добутку незвідних многочленів:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x)$$

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n, і доведемо, що вона справедлива для довільного многочлена степеня n. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен степеня n із $P[x]$ і він двома способами представляється у вигляді добутку незвідних многочленів:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x). \tag{3}$$

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n, і доведемо, що вона справедлива для довільного многочлена степеня n. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен степеня n із $P[x]$ і він двома способами представляється у вигляді добутку незвідних многочленів:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x). \tag{3}$$

Оскільки $p_1(x)$ є дільником многочлена $f(x)$,

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n, і доведемо, що вона справедлива для довільного многочлена степеня n. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен степеня n із $P[x]$ і він двома способами представляється у вигляді добутку незвідних многочленів:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x). \tag{3}$$

Оскільки $p_1(x)$ є дільником многочлена $f(x)$, тобто добутку $q_1(x)\times$ $\times q_2(x)\cdots q_s(x)$,

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n, і доведемо, що вона справедлива для довільного многочлена степеня n. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен степеня n із $P[x]$ і він двома способами представляється у вигляді добутку незвідних многочленів:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x). \tag{3}$$

Оскільки $p_1(x)$ є дільником многочлена $f(x)$, тобто добутку $q_1(x)\times$ $\times q_2(x)\cdots q_s(x)$, то за лемою 5, принаймні, один із многочленів $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p_1(x)$.

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n, і доведемо, що вона справедлива для довільного многочлена степеня n. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен степеня n із $P[x]$ і він двома способами представляється у вигляді добутку незвідних многочленів:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x). \tag{3}$$

Оскільки $p_1(x)$ є дільником многочлена $f(x)$, тобто добутку $q_1(x)\times \times q_2(x)\cdots q_s(x)$, то за лемою 5, принаймні, один із многочленів $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p_1(x)$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $q_1(x)$ ділиться на $p_1(x)$

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n, і доведемо, що вона справедлива для довільного многочлена степеня n. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен степеня n із $P[x]$ і він двома способами представляється у вигляді добутку незвідних многочленів:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x). \tag{3}$$

Оскільки $p_1(x)$ є дільником многочлена $f(x)$, тобто добутку $q_1(x)\times$ $\times q_2(x)\cdots q_s(x)$, то за лемою 5, принаймні, один із многочленів $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p_1(x)$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $q_1(x)$ ділиться на $p_1(x)$ (цього завжди можна досягти, змінивши нумерацію многочленів $q_1(x)$, ..., $q_s(x)$).

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n, і доведемо, що вона справедлива для довільного многочлена степеня n. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен степеня n із $P[x]$ і він двома способами представляється у вигляді добутку незвідних многочленів:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x). \tag{3}$$

Оскільки $p_1(x)$ є дільником многочлена $f(x)$, тобто добутку $q_1(x)\times$ $\times q_2(x)\cdots q_s(x)$, то за лемою 5, принаймні, один із многочленів $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p_1(x)$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $q_1(x)$ ділиться на $p_1(x)$ (цього завжди можна досягти, змінивши нумерацію многочленів $q_1(x)$, ..., $q_s(x)$). Оскільки многочлен $q_1(x)$ — також незвідний,

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n, і доведемо, що вона справедлива для довільного многочлена степеня n. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен степеня n із $P[x]$ і він двома способами представляється у вигляді добутку незвідних многочленів:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x). \tag{3}$$

Оскільки $p_1(x)$ є дільником многочлена $f(x)$, тобто добутку $q_1(x)\times$ $\times q_2(x)\cdots q_s(x)$, то за лемою 5, принаймні, один із многочленів $q_1(x)$, $q_2(x)$, $\dots$, $q_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p_1(x)$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $q_1(x)$ ділиться на $p_1(x)$ (цього завжди можна досягти, змінивши нумерацію многочленів $q_1(x)$, $\dots$, $q_s(x)$). Оскільки многочлен $q_1(x)$ — також незвідний, то за лемою 2 $q_1(x) = c_1p_1(x)$, для деякого відмінного від нуля елемента c_1 поля P.

Доведення.

Для многочленів першого степеня теорема справджується, оскільки вони незвідні. Припустимо, що теорема справджується для многочленів з кільця $P[x]$, степені яких менші ніж n, і доведемо, що вона справедлива для довільного многочлена степеня n. Нехай $f(x)$ — довільний многочлен степеня n із $P[x]$ і він двома способами представляється у вигляді добутку незвідних многочленів:

$$f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x) = q_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x). \tag{3}$$

Оскільки $p_1(x)$ є дільником многочлена $f(x)$, тобто добутку $q_1(x)\times$ $\times q_2(x)\cdots q_s(x)$, то за лемою 5, принаймні, один із многочленів $q_1(x)$, $q_2(x)$, ..., $q_s(x)$ ділиться на незвідний многочлен $p_1(x)$. Не зменшуючи загальності, можна вважати, що $q_1(x)$ ділиться на $p_1(x)$ (цього завжди можна досягти, змінивши нумерацію многочленів $q_1(x)$, ..., $q_s(x)$). Оскільки многочлен $q_1(x)$ — також незвідний, то за лемою 2 $q_1(x) = c_1p_1(x)$, для деякого відмінного від нуля елемента c_1 поля P. Підставивши вираз $q_1(x)$ у рівність (3), одержимо

$$p_1(x)p_2(x)\cdots p_m(x) = c_1p_1(x)q_2(x)\cdots q_s(x). \tag{4}$$

Доведення.

За теоремою про ділення з остачею частка $g(x)$

Доведення.

За теоремою про ділення з остачею частка $g(x)$ при діленні многочлена $f(x)$ на $p_1(x)$ визначається однозначно.

Доведення.

За теоремою про ділення з остачею частка $g(x)$ при діленні многочлена $f(x)$ на $p_1(x)$ визначається однозначно. Тому поділивши ліву і праві частини рівності (4) на $p_1(x)$ одержимо,

Доведення.

За теоремою про ділення з остачею частка $g(x)$ при діленні многочлена $f(x)$ на $p_1(x)$ визначається однозначно. Тому поділивши ліву і праві частини рівності (4) на $p_1(x)$ одержимо, що

$$g(x) = p_2(x)p_3(x)\cdots p_m(x) = c_1 q_2(x)q_3(x)\cdots q_s(x). \qquad (5)$$

Доведення.

За теоремою про ділення з остачею частка $g(x)$ при діленні многочлена $f(x)$ на $p_1(x)$ визначається однозначно. Тому поділивши ліву і праві частини рівності (4) на $p_1(x)$ одержимо, що

$$g(x) = p_2(x)p_3(x)\cdots p_m(x) = c_1 q_2(x)q_3(x)\cdots q_s(x). \tag{5}$$

Права і ліва частина рівності (5) є розкладами в добуток незвідних множників многочлена $g(x)$,

Доведення.

За теоремою про ділення з остачею частка $g(x)$ при діленні многочлена $f(x)$ на $p_1(x)$ визначається однозначно. Тому поділивши ліву і праві частини рівності (4) на $p_1(x)$ одержимо, що

$$g(x) = p_2(x)p_3(x)\cdots p_m(x) = c_1q_2(x)q_3(x)\cdots q_s(x). \tag{5}$$

Права і ліва частина рівності (5) є розкладами в добуток незвідних множників многочлена $g(x)$, степінь якого більший від нуля і менший від n.

Доведення.

За теоремою про ділення з остачею частка $g(x)$ при діленні многочлена $f(x)$ на $p_1(x)$ визначається однозначно. Тому поділивши ліву і праві частини рівності (4) на $p_1(x)$ одержимо, що

$$g(x) = p_2(x)p_3(x)\cdots p_m(x) = c_1 q_2(x)q_3(x)\cdots q_s(x). \tag{5}$$

Права і ліва частина рівності (5) є розкладами в добуток незвідних множників многочлена $g(x)$, степінь якого більший від нуля і менший від n. Тому за індуктивним припущенням для $g(x)$ теорема справджується,

Доведення.

За теоремою про ділення з остачею частка $g(x)$ при діленні многочлена $f(x)$ на $p_1(x)$ визначається однозначно. Тому поділивши ліву і праві частини рівності (4) на $p_1(x)$ одержимо, що

$$g(x) = p_2(x)p_3(x)\cdots p_m(x) = c_1q_2(x)q_3(x)\cdots q_s(x). \qquad (5)$$

Права і ліва частина рівності (5) є розкладами в добуток незвідних множників многочлена $g(x)$, степінь якого більший від нуля і менший від n. Тому за індуктивним припущенням для $g(x)$ теорема справджується, тобто $m-1=s-1$

Доведення.

За теоремою про ділення з остачею частка $g(x)$ при діленні многочлена $f(x)$ на $p_1(x)$ визначається однозначно. Тому поділивши ліву і праві частини рівності (4) на $p_1(x)$ одержимо, що

$$g(x) = p_2(x)p_3(x)\cdots p_m(x) = c_1q_2(x)q_3(x)\cdots q_s(x). \tag{5}$$

Права і ліва частина рівності (5) є розкладами в добуток незвідних множників многочлена $g(x)$, степінь якого більший від нуля і менший від n. Тому за індуктивним припущенням для $g(x)$ теорема справджується, тобто $m-1 = s-1$ і

$$c_1q_2(x) = c_2'p_2(x), \quad q_3(x) = c_3p_3(x), \quad \dots, \quad q_m(x) = c_mp_m(x).$$

Звідси випливає, що $m = s$ і

Доведення.

За теоремою про ділення з остачею частка $g(x)$ при діленні многочлена $f(x)$ на $p_1(x)$ визначається однозначно. Тому поділивши ліву і праві частини рівності (4) на $p_1(x)$ одержимо, що

$$g(x) = p_2(x)p_3(x)\cdots p_m(x) = c_1 q_2(x)q_3(x)\cdots q_s(x). \tag{5}$$

Права і ліва частина рівності (5) є розкладами в добуток незвідних множників многочлена $g(x)$, степінь якого більший від нуля і менший від n. Тому за індуктивним припущенням для $g(x)$ теорема справджується, тобто $m-1 = s-1$ і

$$c_1 q_2(x) = c_2' p_2(x), \quad q_3(x) = c_3 p_3(x), \quad \ldots, \quad q_m(x) = c_m p_m(x).$$

Звідси випливає, що $m = s$ і

$$q_2(x) = c_1^{-1} c_2' p_2(x), \quad q_3(x) = c_3 p_3(x), \quad \ldots, \quad q_m(x) = c_m p_m(x).$$

Доведення.

Приєднавши до цих рівностей рівність $q_1(x) = c_1 p_1(x)$ і позначивши $c_1^{-1} c_2'$ символом c_2, матимемо $m = s$ і

Доведення.

Приєднавши до цих рівностей рівність $q_1(x) = c_1p_1(x)$ і позначивши $c_1^{-1}c_2'$ символом c_2, матимемо $m = s$ і

$$q_1(x) = c_1p_1(x), \quad q_2(x) = c_2p_2(x), \quad \dots, \quad q_m(x) = c_mp_m(x).$$

Отже, для вибраного многочлена $f(x)$ степеня n теорема справджується.

Доведення.

Приєднавши до цих рівностей рівність $q_1(x) = c_1p_1(x)$ і позначивши $c_1^{-1}c_2'$ символом c_2, матимемо $m = s$ і

$$q_1(x) = c_1p_1(x), \quad q_2(x) = c_2p_2(x), \quad \ldots, \quad q_m(x) = c_mp_m(x).$$

Отже, для вибраного многочлена $f(x)$ степеня n теорема справджується. Тому за принципом математичної індукції теорема справджується для довільного многочлена з кільця $P[x]$ натурального степеня n.

Доведення.

Приєднавши до цих рівностей рівність $q_1(x) = c_1 p_1(x)$ і позначивши $c_1^{-1} c_2'$ символом c_2, матимемо $m = s$ і

$$q_1(x) = c_1 p_1(x), \quad q_2(x) = c_2 p_2(x), \quad \ldots, \quad q_m(x) = c_m p_m(x).$$

Отже, для вибраного многочлена $f(x)$ степеня n теорема справджується. Тому за принципом математичної індукції теорема справджується для довільного многочлена з кільця $P[x]$ натурального степеня n. Теорему доведено. □

Означення 3

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n будемо називати **нормованими**,

Означення 3

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n будемо називати **нормованими**, якщо його старший коефіцієнт дорівнює одиниці.

Означення 3

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n будемо називати **нормованими**, якщо його старший коефіцієнт дорівнює одиниці.

Наслідок 1

Будь-який многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ натурального степеня n

Означення 3

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n будемо називати **нормованими**, якщо його старший коефіцієнт дорівнює одиниці.

Наслідок 1

Будь-який многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ натурального степеня n можна єдиним способом з точністю до порядку слідування множників

Означення 3

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n будемо називати нормованими, якщо його старший коефіцієнт дорівнює одиниці.

Наслідок 1

Будь-який многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ натурального степеня n можна єдиним способом з точністю до порядку слідування множників записати у вигляді добутку елемента поля P

Означення 3

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n будемо називати нормованими, якщо його старший коефіцієнт дорівнює одиниці.

Наслідок 1

Будь-який многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ натурального степеня n можна єдиним способом з точністю до порядку слідування множників записати у вигляді добутку елемента поля P і нормованих незвідних у кільці $P[x]$ многочленів:

Означення 3

Многочлен $f(x) \in P[x]$ натурального степеня n будемо називати **нормованими**, якщо його старший коефіцієнт дорівнює одиниці.

Наслідок 1

Будь-який многочлен $f(x)$ із кільця $P[x]$ натурального степеня n можна єдиним способом з точністю до порядку слідування множників записати у вигляді добутку елемента поля P і нормованих незвідних у кільці $P[x]$ многочленів:

$$f(x) = a_0 p_1(x) p_2(x) \cdots p_m(x), \tag{6}$$

де a_0 — старший коефіцієнт многочлена $f(x)$.

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P.

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P. Найбільше натуральне число k,

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P. Найбільше натуральне число k, для якого многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P. Найбільше натуральне число k, для якого многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$ називається кратністю незвідного дільника $p(x)$.

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P. Найбільше натуральне число k, для якого многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$ називається кратністю незвідного дільника $p(x)$.

Нехай у розкладі (6) незвідні множники $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_s(x)$ — попарно різні

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P. Найбільше натуральне число k, для якого многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$ називається кратністю незвідного дільника $p(x)$.

Нехай у розкладі (6) незвідні множники $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ — попарно різні і будь-який інший множник дорівнює одному з них.

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P. Найбільше натуральне число k, для якого многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$ називається кратністю незвідного дільника $p(x)$.

Нехай у розкладі (6) незвідні множники $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_s(x)$ — попарно різні і будь-який інший множник дорівнює одному з них. Якщо $p_i(x)$ є k_i-кратним дільником многочлена $f(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$,

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P. Найбільше натуральне число k, для якого многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$ називається кратністю незвідного дільника $p(x)$.

Нехай у розкладі (6) незвідні множники $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\dots$, $p_s(x)$ — попарно різні і будь-який інший множник дорівнює одному з них. Якщо $p_i(x)$ є k_i-кратним дільником многочлена $f(x)$ $(i = 1, 2, \dots, s)$, то розклад (6) можна переписати у вигляді

$$f(x) = a_0 p_1^{k_1}(x) p_2^{k_2}(x) \cdots p_s^{k_s}(x). \tag{7}$$

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P. Найбільше натуральне число k, для якого многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$ називається кратністю незвідного дільника $p(x)$.

Нехай у розкладі (6) незвідні множники $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_s(x)$ — попарно різні і будь-який інший множник дорівнює одному з них. Якщо $p_i(x)$ є k_i-кратним дільником многочлена $f(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, то розклад (6) можна переписати у вигляді

$$f(x) = a_0 p_1^{k_1}(x) p_2^{k_2}(x) \cdots p_s^{k_s}(x). \quad (7)$$

Означення 5

Розклад (7) називається канонічним розкладом многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ на незвідні над P (нормовані) множники.

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P. Найбільше натуральне число k, для якого многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$ називається кратністю незвідного дільника $p(x)$.

Нехай у розкладі (6) незвідні множники $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_s(x)$ — попарно різні і будь-який інший множник дорівнює одному з них. Якщо $p_i(x)$ є k_i-кратним дільником многочлена $f(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, то розклад (6) можна переписати у вигляді

$$f(x) = a_0 p_1^{k_1}(x) p_2^{k_2}(x) \cdots p_s^{k_s}(x). \tag{7}$$

Означення 5

Розклад (7) називається канонічним розкладом многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ на незвідні над P (нормовані) множники.

Теорема 3

Якщо $p(x)$ є k-кратним незвідним дільником многочлена $f(x)$

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P. Найбільше натуральне число k, для якого многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$ називається кратністю незвідного дільника $p(x)$.

Нехай у розкладі (6) незвідні множники $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_s(x)$ — попарно різні і будь-який інший множник дорівнює одному з них. Якщо $p_i(x)$ є k_i-кратним дільником многочлена $f(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, то розклад (6) можна переписати у вигляді

$$f(x) = a_0 p_1^{k_1}(x) p_2^{k_2}(x) \cdots p_s^{k_s}(x). \qquad (7)$$

Означення 5

Розклад (7) називається канонічним розкладом многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ на незвідні над P (нормовані) множники.

Теорема 3

Якщо $p(x)$ є k-кратним незвідним дільником многочлена $f(x)$ і $k \geq 2$,

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P. Найбільше натуральне число k, для якого многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$ називається кратністю незвідного дільника $p(x)$.

Нехай у розкладі (6) незвідні множники $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_s(x)$ — попарно різні і будь-який інший множник дорівнює одному з них. Якщо $p_i(x)$ є k_i-кратним дільником многочлена $f(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, то розклад (6) можна переписати у вигляді

$$f(x) = a_0 p_1^{k_1}(x) p_2^{k_2}(x) \cdots p_s^{k_s}(x). \tag{7}$$

Означення 5

Розклад (7) називається канонічним розкладом многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ на незвідні над P (нормовані) множники.

Теорема 3

Якщо $p(x)$ є k-кратним незвідним дільником многочлена $f(x)$ і $k \geq 2$, тоді він є $(k-1)$-кратним дільником похідної цього многочлена.

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P. Найбільше натуральне число k, для якого многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$ називається кратністю незвідного дільника $p(x)$.

Нехай у розкладі (6) незвідні множники $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ — попарно різні і будь-який інший множник дорівнює одному з них. Якщо $p_i(x)$ є k_i-кратним дільником многочлена $f(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, то розклад (6) можна переписати у вигляді

$$f(x) = a_0 p_1^{k_1}(x) p_2^{k_2}(x) \cdots p_s^{k_s}(x). \tag{7}$$

Означення 5

Розклад (7) називається канонічним розкладом многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ на незвідні над P (нормовані) множники.

Теорема 3

Якщо $p(x)$ є k-кратним незвідним дільником многочлена $f(x)$ і $k \geq 2$, тоді він є $(k-1)$-кратним дільником похідної цього многочлена. Якщо ж $p(x)$ — простий (однократний) множник многочлена $f(x)$,

Означення 4

Нехай незвідний многочлен $p(x)$ є дільником многочлена $f(x)$ над полем P. Найбільше натуральне число k, для якого многочлен $f(x)$ ділиться на $p(x)^k$ називається кратністю незвідного дільника $p(x)$.

Нехай у розкладі (6) незвідні множники $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_s(x)$ — попарно різні і будь-який інший множник дорівнює одному з них. Якщо $p_i(x)$ є k_i-кратним дільником многочлена $f(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$, то розклад (6) можна переписати у вигляді

$$f(x) = a_0 p_1^{k_1}(x) p_2^{k_2}(x) \cdots p_s^{k_s}(x). \tag{7}$$

Означення 5

Розклад (7) називається канонічним розкладом многочлена $f(x)$ з кільця $P[x]$ на незвідні над P (нормовані) множники.

Теорема 3

Якщо $p(x)$ є k-кратним незвідним дільником многочлена $f(x)$ і $k \geq 2$, тоді він є $(k-1)$-кратним дільником похідної цього многочлена. Якщо ж $p(x)$ — простий (однократний) множник многочлена $f(x)$, тоді многочлени $f'(x)$ і $p(x)$ — взаємно прості.

Теорема 4

Якщо дано канонічні розклади многочленів $f(x)$ *і* $g(x)$ *на незвідні множники,*

Теорема 4

Якщо дано канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на незвідні множники, то найбільший спільний дільник $d(x)$ цих многочленів дорівнює добутку множників,

Теорема 4

Якщо дано канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на незвідні множники, то найбільший спільний дільник $d(x)$ цих многочленів дорівнює добутку множників, що одночасно входять в обидва розклади,

Теорема 4

Якщо дано канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на незвідні множники, то найбільший спільний дільник $d(x)$ цих многочленів дорівнює добутку множників, що одночасно входять в обидва розклади, причому кратність кожного із множників $p(x)$ многочлена $d(x)$ дорівнює меншій із кратностей $p(x)$ для многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Теорема 4

Якщо дано канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на незвідні множники, то найбільший спільний дільник $d(x)$ цих многочленів дорівнює добутку множників, що одночасно входять в обидва розклади, причому кратність кожного із множників $p(x)$ многочлена $d(x)$ дорівнює меншій із кратностей $p(x)$ для многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Якщо спільних незвідних множників у розкладах $f(x)$ і8 $g(x)$ немає,

Теорема 4

Якщо дано канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на незвідні множники, то найбільший спільний дільник $d(x)$ цих многочленів дорівнює добутку множників, що одночасно входять в обидва розклади, причому кратність кожного із множників $p(x)$ многочлена $d(x)$ дорівнює меншій із кратностей $p(x)$ для многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Якщо спільних незвідних множників у розкладах $f(x)$ і8 $g(x)$ немає, многочлени $f(x)$ і $g(x)$ є взаємно простими.

Теорема 4

Якщо дано канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на незвідні множники, то найбільший спільний дільник $d(x)$ цих многочленів дорівнює добутку множників, що одночасно входять в обидва розклади, причому кратність кожного із множників $p(x)$ многочлена $d(x)$ дорівнює меншій із кратностей $p(x)$ для многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Якщо спільних незвідних множників у розкладах $f(x)$ і8 $g(x)$ немає, многочлени $f(x)$ і $g(x)$ є взаємно простими.

Доведення.

Нехай $f(x) = a_0 p_1^{m_1}(x) p_2^{m_2}(x) \cdots p_j^{m_j}(x) u_1^{k_1}(x) u_2^{k_2}(x) \cdots u_s^{k_s}(x)$,

Теорема 4

Якщо дано канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на незвідні множники, то найбільший спільний дільник $d(x)$ цих многочленів дорівнює добутку множників, що одночасно входять в обидва розклади, причому кратність кожного із множників $p(x)$ многочлена $d(x)$ дорівнює меншій із кратностей $p(x)$ для многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Якщо спільних незвідних множників у розкладах $f(x)$ і8 $g(x)$ немає, многочлени $f(x)$ і $g(x)$ є взаємно простими.

Доведення.

Нехай $f(x) = a_0 p_1^{m_1}(x) p_2^{m_2}(x) \cdots p_j^{m_j}(x) u_1^{k_1}(x) u_2^{k_2}(x) \cdots u_s^{k_s}(x)$,

$$g(x) = b_0 p_1^{n_1}(x) p_2^{n_2}(x) \cdots p_j^{n_j}(x) v_1^{l_1}(x) v_2^{l_2}(x) \cdots v_t^{l_t}(x)$$

Теорема 4

Якщо дано канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на незвідні множники, то найбільший спільний дільник $d(x)$ цих многочленів дорівнює добутку множників, що одночасно входять в обидва розклади, причому кратність кожного із множників $p(x)$ многочлена $d(x)$ дорівнює меншій із кратностей $p(x)$ для многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Якщо спільних незвідних множників у розкладах $f(x)$ і8 $g(x)$ немає, многочлени $f(x)$ і $g(x)$ є взаємно простими.

Доведення.

Нехай $f(x) = a_0 p_1^{m_1}(x) p_2^{m_2}(x) \cdots p_j^{m_j}(x) u_1^{k_1}(x) u_2^{k_2}(x) \cdots u_s^{k_s}(x)$,

$$g(x) = b_0 p_1^{n_1}(x) p_2^{n_2}(x) \cdots p_j^{n_j}(x) v_1^{l_1}(x) v_2^{l_2}(x) \cdots v_t^{l_t}(x)$$

є канонічними розкладами многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на звідні над полем P множники.

Теорема 4

Якщо дано канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на незвідні множники, то найбільший спільний дільник $d(x)$ цих многочленів дорівнює добутку множників, що одночасно входять в обидва розклади, причому кратність кожного із множників $p(x)$ многочлена $d(x)$ дорівнює меншій із кратностей $p(x)$ для многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Якщо спільних незвідних множників у розкладах $f(x)$ і8 $g(x)$ немає, многочлени $f(x)$ і $g(x)$ є взаємно простими.

Доведення.

Нехай $f(x) = a_0 p_1^{m_1}(x) p_2^{m_2}(x) \cdots p_j^{m_j}(x) u_1^{k_1}(x) u_2^{k_2}(x) \cdots u_s^{k_s}(x)$,

$$g(x) = b_0 p_1^{n_1}(x) p_2^{n_2}(x) \cdots p_j^{n_j}(x) v_1^{l_1}(x) v_2^{l_2}(x) \cdots v_t^{l_t}(x)$$

є канонічними розкладами многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на звідні над полем P множники. Тоді за лемою 5 довільний нормований незвідний спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$

Теорема 4

Якщо дано канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на незвідні множники, то найбільший спільний дільник $d(x)$ цих многочленів дорівнює добутку множників, що одночасно входять в обидва розклади, причому кратність кожного із множників $p(x)$ многочлена $d(x)$ дорівнює меншій із кратностей $p(x)$ для многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Якщо спільних незвідних множників у розкладах $f(x)$ і8 $g(x)$ немає, многочлени $f(x)$ і $g(x)$ є взаємно простими.

Доведення.

Нехай $f(x) = a_0 p_1^{m_1}(x) p_2^{m_2}(x) \cdots p_j^{m_j}(x) u_1^{k_1}(x) u_2^{k_2}(x) \cdots u_s^{k_s}(x)$,

$$g(x) = b_0 p_1^{n_1}(x) p_2^{n_2}(x) \cdots p_j^{n_j}(x) v_1^{l_1}(x) v_2^{l_2}(x) \cdots v_t^{l_t}(x)$$

є канонічними розкладами многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на звідні над полем P множники. Тоді за лемою 5 довільний нормований незвідний спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює одному із многочленів $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_j(x)$.

Теорема 4

Якщо дано канонічні розклади многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на незвідні множники, то найбільший спільний дільник $d(x)$ цих многочленів дорівнює добутку множників, що одночасно входять в обидва розклади, причому кратність кожного із множників $p(x)$ многочлена $d(x)$ дорівнює меншій із кратностей $p(x)$ для многочленів $f(x)$ і $g(x)$. Якщо спільних незвідних множників у розкладах $f(x)$ і8 $g(x)$ немає, многочлени $f(x)$ і $g(x)$ є взаємно простими.

Доведення.

Нехай $f(x) = a_0 p_1^{m_1}(x) p_2^{m_2}(x) \cdots p_j^{m_j}(x) u_1^{k_1}(x) u_2^{k_2}(x) \cdots u_s^{k_s}(x)$,

$$g(x) = b_0 p_1^{n_1}(x) p_2^{n_2}(x) \cdots p_j^{n_j}(x) v_1^{l_1}(x) v_2^{l_2}(x) \cdots v_t^{l_t}(x)$$

є канонічними розкладами многочленів $f(x)$ і $g(x)$ на звідні над полем P множники. Тоді за лемою 5 довільний нормований незвідний спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ дорівнює одному із многочленів $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_j(x)$. Звідси, з леми 3 слідує, що будь-який нормований спільний дільник многочленів $f(x)$ і $g(x)$ має вигляд

$$p_1^{i_1}(x) p_2^{i_2}(x) \cdots p_j^{i_j}(x),$$

де $0 \le i_l \le \min\{m_l, n_l\}$ ($l = 1, 2, \ldots, j$).

Доведення.

Таким чином, за означенням найбільшого спільного дільника многочлен

$$d(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_j^{r_j}(x),$$

Доведення.

Таким чином, за означенням найбільшого спільного дільника многочлен

$$d(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_j^{r_j}(x),$$

де $r_l = \min\{m_l, n_l\}$

Доведення.

Таким чином, за означенням найбільшого спільного дільника многочлен

$$d(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_j^{r_j}(x),$$

де $r_l = \min\{m_l, n_l\}$ $(l = 1, 2, \ldots, j)$,

Доведення.

Таким чином, за означенням найбільшого спільного дільника многочлен

$$d(x) = p_1^{r_1}(x) p_2^{r_2}(x) \cdots p_j^{r_j}(x),$$

де $r_l = \min\{m_l, n_l\}$ $(l = 1,\, 2,\, \dots,\, j)$, є найбільшим спільним спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Доведення.

Таким чином, за означенням найбільшого спільного дільника многочлен

$$d(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_j^{r_j}(x),$$

де $r_l = \min\{m_l, n_l\}$ $(l = 1, 2, \ldots, j)$, є найбільшим спільним спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.
Якщо спільних незвідних множників у канонічних розкладах многочленів $f(x)$ і $g(x)$ немає,

Доведення.

Таким чином, за означенням найбільшого спільного дільника многочлен

$$d(x) = p_1^{r_1}(x) p_2^{r_2}(x) \cdots p_j^{r_j}(x),$$

де $r_l = \min\{m_l, n_l\}$ $(l = 1, 2, \dots, j)$, є найбільшим спільним спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.
Якщо спільних незвідних множників у канонічних розкладах многочленів $f(x)$ і $g(x)$ немає, то $f(x)$ і $g(x)$ — взаємно прості.

Доведення.

Таким чином, за означенням найбільшого спільного дільника многочлен

$$d(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_j^{r_j}(x),$$

де $r_l = \min\{m_l, n_l\}$ ($l = 1, 2, \ldots, j$), є найбільшим спільним спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Якщо спільних незвідних множників у канонічних розкладах многочленів $f(x)$ і $g(x)$ немає, то $f(x)$ і $g(x)$ — взаємно прості. Дійсно, у протилежному випадку, якби найбільший спільний дільник цих многочленів мав натуральний степінь,

Доведення.

Таким чином, за означенням найбільшого спільного дільника многочлен

$$d(x) = p_1^{r_1}(x) p_2^{r_2}(x) \cdots p_j^{r_j}(x),$$

де $r_l = \min\{m_l, n_l\}$ ($l = 1, 2, \ldots, j$), є найбільшим спільним спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Якщо спільних незвідних множників у канонічних розкладах многочленів $f(x)$ і $g(x)$ немає, то $f(x)$ і $g(x)$ — взаємно прості. Дійсно, у протилежному випадку, якби найбільший спільний дільник цих многочленів мав натуральний степінь, то $f(x)$ і $g(x)$ мали б принаймні один незвідний спільний дільник, що неможливо.

Доведення.

Таким чином, за означенням найбільшого спільного дільника многочлен

$$d(x) = p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_j^{r_j}(x),$$

де $r_l = \min\{m_l, n_l\}$ ($l = 1, 2, \ldots, j$), є найбільшим спільним спільним дільником многочленів $f(x)$ і $g(x)$.

Якщо спільних незвідних множників у канонічних розкладах многочленів $f(x)$ і $g(x)$ немає, то $f(x)$ і $g(x)$ — взаємно прості. Дійсно, у протилежному випадку, якби найбільший спільний дільник цих многочленів мав натуральний степінь, то $f(x)$ і $g(x)$ мали б принаймні один незвідний спільний дільник, що неможливо. Теорему доведено. $\square$

Теорема 5

Незвідними многочленами над полем комплексних чисел є лінійні многочлени і тільки вони.

Теорема 5

Незвідними многочленами над полем комплексних чисел є лінійні многочлени і тільки вони.

Теорема 6

Незвідними многочленами над полем дійсних чисел є лінійні многочлени та многочлени другого степеня, що не мають дійсних коренів, і тільки вони.

Приклад 4.

Розкласти на незвідні множники многочлен $x^5 - 1$ над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Приклад 4.

Розкласти на незвідні множники многочлен $x^5 - 1$ над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Розв'язання. Розкладемо спочатку многочлен $x^5 - 1$ на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел.

Приклад 4.

Розкласти на незвідні множники многочлен $x^5 - 1$ над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Розв'язання. Розкладемо спочатку многочлен $x^5 - 1$ на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Відомо, що довільний многочлен натурального степеня над полем $\mathbb{C}$

Приклад 4.

Розкласти на незвідні множники многочлен $x^5 - 1$ над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Розв'язання. Розкладемо спочатку многочлен $x^5 - 1$ на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Відомо, що довільний многочлен натурального степеня над полем $\mathbb{C}$ розкладається у добуток лінійних множників вигляду $x - \xi$,

Приклад 4.

Розкласти на незвідні множники многочлен $x^5 - 1$ над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Розв'язання. Розкладемо спочатку многочлен $x^5 - 1$ на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Відомо, що довільний многочлен натурального степеня над полем $\mathbb{C}$ розкладається у добуток лінійних множників вигляду $x - \xi$, де ξ — деяке комплексне число, що є коренем даного многочлена.

Приклад 4.

Розкласти на незвідні множники многочлен $x^5 - 1$ над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Розв'язання. Розкладемо спочатку многочлен $x^5 - 1$ на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Відомо, що довільний многочлен натурального степеня над полем $\mathbb{C}$ розкладається у добуток лінійних множників вигляду $x - \xi$, де ξ — деяке комплексне число, що є коренем даного многочлена. Коренями ж многочлена $x^5 - 1$

Приклад 4.

Розкласти на незвідні множники многочлен x^5-1 над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Розв'язання. Розкладемо спочатку многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Відомо, що довільний многочлен натурального степеня над полем $\mathbb{C}$ розкладається у добуток лінійних множників вигляду $x-\xi$, де ξ — деяке комплексне число, що є коренем даного многочлена. Коренями ж многочлена x^5-1 є корені 5-го степеня з 1:

Приклад 4.

Розкласти на незвідні множники многочлен x^5-1 над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Розв'язання. Розкладемо спочатку многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Відомо, що довільний многочлен натурального степеня над полем $\mathbb{C}$ розкладається у добуток лінійних множників вигляду $x-\xi$, де ξ — деяке комплексне число, що є коренем даного многочлена. Коренями ж многочлена x^5-1 є корені 5-го степеня з 1:

$$\varepsilon_0 = 1, \tag{8}$$

Приклад 4.

Розкласти на незвідні множники многочлен x^5-1 над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Розв'язання. Розкладемо спочатку многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Відомо, що довільний многочлен натурального степеня над полем $\mathbb{C}$ розкладається у добуток лінійних множників вигляду $x-\xi$, де ξ — деяке комплексне число, що є коренем даного многочлена. Коренями ж многочлена x^5-1 є корені 5-го степеня з 1:

$$\varepsilon_0 = 1, \tag{8}$$

$$\varepsilon_1 = \cos\tfrac{2\pi}{5} + i\sin\tfrac{2\pi}{5}$$

Приклад 4.

Розкласти на незвідні множники многочлен x^5-1 над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Розв'язання. Розкладемо спочатку многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Відомо, що довільний многочлен натурального степеня над полем $\mathbb{C}$ розкладається у добуток лінійних множників вигляду $x-\xi$, де ξ — деяке комплексне число, що є коренем даного многочлена. Коренями ж многочлена x^5-1 є корені 5-го степеня з 1:

$$\varepsilon_0 = 1, \tag{8}$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, \tag{9}$$

Приклад 4.

Розкласти на незвідні множники многочлен $x^5 - 1$ над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Розв'язання. Розкладемо спочатку многочлен $x^5 - 1$ на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Відомо, що довільний многочлен натурального степеня над полем $\mathbb{C}$ розкладається у добуток лінійних множників вигляду $x - \xi$, де ξ — деяке комплексне число, що є коренем даного многочлена. Коренями ж многочлена $x^5 - 1$ є корені 5-го степеня з 1:

$$\varepsilon_0 = 1, \tag{8}$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, \tag{9}$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5} = -\frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, \tag{10}$$

Приклад 4.

Розкласти на незвідні множники многочлен x^5-1 над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Розв'язання. Розкладемо спочатку многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Відомо, що довільний многочлен натурального степеня над полем $\mathbb{C}$ розкладається у добуток лінійних множників вигляду $x-\xi$, де ξ — деяке комплексне число, що є коренем даного многочлена. Коренями ж многочлена x^5-1 є корені 5-го степеня з 1:

$$\varepsilon_0 = 1, \tag{8}$$

$$\varepsilon_1 = \cos\tfrac{2\pi}{5} + i\sin\tfrac{2\pi}{5} = \tfrac{\sqrt{5}-1}{4} + \tfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, \tag{9}$$

$$\varepsilon_2 = \cos\tfrac{4\pi}{5} + i\sin\tfrac{4\pi}{5} = -\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} + \tfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, \tag{10}$$

$$\varepsilon_3 = \cos\tfrac{6\pi}{5} + i\sin\tfrac{6\pi}{5} = -\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} - \tfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, \tag{11}$$

Приклад 4.

Розкласти на незвідні множники многочлен x^5-1 над кожним із полів раціональних, дійсних та комплексних чисел.

Розв'язання. Розкладемо спочатку многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Відомо, що довільний многочлен натурального степеня над полем $\mathbb{C}$ розкладається у добуток лінійних множників вигляду $x-\xi$, де ξ — деяке комплексне число, що є коренем даного многочлена. Коренями ж многочлена x^5-1 є корені 5-го степеня з 1:

$$\varepsilon_0 = 1, \tag{8}$$

$$\varepsilon_1 = \cos\tfrac{2\pi}{5} + i\sin\tfrac{2\pi}{5} = \tfrac{\sqrt{5}-1}{4} + \tfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i, \tag{9}$$

$$\varepsilon_2 = \cos\tfrac{4\pi}{5} + i\sin\tfrac{4\pi}{5} = -\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} + \tfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, \tag{10}$$

$$\varepsilon_3 = \cos\tfrac{6\pi}{5} + i\sin\tfrac{6\pi}{5} = -\tfrac{\sqrt{5}+1}{4} - \tfrac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}i, \tag{11}$$

$$\varepsilon_4 = \cos\tfrac{8\pi}{5} + i\sin\tfrac{8\pi}{5} = \tfrac{\sqrt{5}-1}{4} - \tfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}i. \tag{12}$$

Через це

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

Через це

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)(x - \varepsilon_3)(x - \varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.

Через це

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.
Тепер, скориставшись цим розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$,

Через це

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.

Тепер, скориставшись цим розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$, знайдемо розклад цього многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

Через це

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.
Тепер, скориставшись цим розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$, знайдемо розклад цього многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлени 2-го степеня,

Через це

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.
Тепер, скориставшись цим розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$, знайдемо розклад цього многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлени 2-го степеня, коренями яких є пари комплексно спряжених чисел,

Через це

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.
Тепер, скориставшись цим розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$, знайдемо розклад цього многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлени 2-го степеня, коренями яких є пари комплексно спряжених чисел, відповідно ε_1, ε_4

Через це

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.

Тепер, скориставшись цим розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$, знайдемо розклад цього многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлени 2-го степеня, коренями яких є пари комплексно спряжених чисел, відповідно ε_1, ε_4 та ε_2, ε_3:

Через це

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.

Тепер, скориставшись цим розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$, знайдемо розклад цього многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлени 2-го степеня, коренями яких є пари комплексно спряжених чисел, відповідно ε_1, ε_4 та ε_2, ε_3:

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_4)$$

Через це

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.

Тепер, скориставшись цим розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$, знайдемо розклад цього многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлени 2-го степеня, коренями яких є пари комплексно спряжених чисел, відповідно ε_1, ε_4 та ε_2, ε_3:

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_4) = x^2 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1,$$

Через це

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.

Тепер, скориставшись цим розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$, знайдемо розклад цього многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлени 2-го степеня, коренями яких є пари комплексно спряжених чисел, відповідно ε_1, ε_4 та ε_2, ε_3:

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_4) = x^2 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1,$$

$$(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)$$

Через це

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_2)(x - \varepsilon_3)(x - \varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.

Тепер, скориставшись цим розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$, знайдемо розклад цього многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлени 2-го степеня, коренями яких є пари комплексно спряжених чисел, відповідно ε_1, ε_4 та ε_2, ε_3:

$$(x - \varepsilon_1)(x - \varepsilon_4) = x^2 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1,$$
$$(x - \varepsilon_2)(x - \varepsilon_3) = x^2 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1.$$

Через це

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.
Тепер, скориставшись цим розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$, знайдемо розклад цього многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлени 2-го степеня, коренями яких є пари комплексно спряжених чисел, відповідно ε_1, ε_4 та ε_2, ε_3:

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_4) = x^2 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1,$$
$$(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3) = x^2 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1.$$

Ці многочлени є незвідними над полем $\mathbb{R}$,

Через це

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.
Тепер, скориставшись цим розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$, знайдемо розклад цього многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлени 2-го степеня, коренями яких є пари комплексно спряжених чисел, відповідно ε_1, ε_4 та ε_2, ε_3:

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_4) = x^2 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1,$$
$$(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3) = x^2 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1.$$

Ці многочлени є незвідними над полем $\mathbb{R}$, а тому

$$x^5 - 1 = (x-1)\left(x^2 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1\right)$$

Через це

$$x^5 - 1 = (x-1)(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3)(x-\varepsilon_4)$$

є шуканим розкладом, даного в умові задачі многочлена, на незвідні множники над полем $\mathbb{C}$.

Тепер, скориставшись цим розкладом многочлена $x^5 - 1$ на лінійні множники над полем $\mathbb{C}$, знайдемо розклад цього многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлени 2-го степеня, коренями яких є пари комплексно спряжених чисел, відповідно ε_1, ε_4 та ε_2, ε_3:

$$(x-\varepsilon_1)(x-\varepsilon_4) = x^2 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1,$$
$$(x-\varepsilon_2)(x-\varepsilon_3) = x^2 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1.$$

Ці многочлени є незвідними над полем $\mathbb{R}$, а тому

$$x^5 - 1 = (x-1)\left(x^2 + \tfrac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1\right)\left(x^2 + \tfrac{1+\sqrt{5}}{2}x + 1\right)$$

є розкладом многочлена на незвідні множники над полем $\mathbb{R}$.

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел.

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$.

Нарешті розкладемо многочлен $x^5 - 1$ на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне,

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник,

Нарешті розкладемо многочлен $x^5 - 1$ на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f,

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \qquad (13)$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$.

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$. Перше не можливе через те,

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (див. (9)–(12)),

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (див. (9)–(12)), жодне з яких не є раціональним числом.

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4+x^3+x^2+x+1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a\neq 0$, $d\neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4+x^3+x^2+x+1$ є числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (див. (9)–(12)), жодне з яких не є раціональним числом. Інше також не є можливим через те,

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (див. (9)–(12)), жодне з яких не є раціональним числом. Інше також не є можливим через те, що коренями многочлена ax^2+bx+c

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \qquad (13)$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (див. (9)–(12)), жодне з яких не є раціональним числом. Інше також не є можливим через те, що коренями многочлена ax^2+bx+c з одного боку є два комплексні числа,

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (див. (9)–(12)), жодне з яких не є раціональним числом. Інше також не є можливим через те, що коренями многочлена ax^2+bx+c з одного боку є два комплексні числа, що спряжені один до одного,

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (див. (9)–(12)), жодне з яких не є раціональним числом. Інше також не є можливим через те, що коренями многочлена ax^2+bx+c з одного боку є два комплексні числа, що спряжені один до одного, а з іншого, ці числа є коренями 5-го степеня з 1, відмінними від 1,

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (див. (9)–(12)), жодне з яких не є раціональним числом. Інше також не є можливим через те, що коренями многочлена ax^2+bx+c з одного боку є два комплексні числа, що спряжені один до одного, а з іншого, ці числа є коренями 5-го степеня з 1, відмінними від 1, тобто або це або пара ε_1, ε_4, або пара ε_2, ε_3.

Нарешті розкладемо многочлен $x^5 - 1$ на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x - 1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (див. (9)–(12)), жодне з яких не є раціональним числом. Інше також не є можливим через те, що коренями многочлена $ax^2 + bx + c$ з одного боку є два комплексні числа, що спряжені один до одного, а з іншого, ці числа є коренями 5-го степеня з 1, відмінними від 1, тобто або це або пара ε_1, ε_4, або пара ε_2, ε_3. Тоді за формулами Вієта

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (див. (9)–(12)), жодне з яких не є раціональним числом. Інше також не є можливим через те, що коренями многочлена ax^2+bx+c з одного боку є два комплексні числа, що спряжені один до одного, а з іншого, ці числа є коренями 5-го степеня з 1, відмінними від 1, тобто або це або пара ε_1, ε_4, або пара ε_2, ε_3. Тоді за формулами Вієта або $\varepsilon_1 + \varepsilon_4 = -\frac{b}{a}$,

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5 - 1 = (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2 + bx + c)(dx^2 + ex + f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a \neq 0$, $d \neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ є числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (див. (9)–(12)), жодне з яких не є раціональним числом. Інше також не є можливим через те, що коренями многочлена ax^2+bx+c з одного боку є два комплексні числа, що спряжені один до одного, а з іншого, ці числа є коренями 5-го степеня з 1, відмінними від 1, тобто або це або пара ε_1, ε_4, або пара ε_2, ε_3. Тоді за формулами Вієта або $\varepsilon_1 + \varepsilon_4 = -\frac{b}{a}$, або ж $\varepsilon_2 + \varepsilon_3 = -\frac{b}{a}$,

Нарешті розкладемо многочлен x^5-1 на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$ раціональних чисел. Добре відомо, що

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1). \tag{13}$$

Многочлен $x^4+x^3+x^2+x+1$ є незвідним полем $\mathbb{Q}$. Дійсно, якщо припустити протилежне, то або він має лінійний дільник, або ж представляється у вигляді добутку

$$(ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f),$$

для деяких раціональних чисел a, b, c, d, e, f, де $a\neq 0$, $d\neq 0$. Перше не можливе через те, що коренями многочлена $x^4+x^3+x^2+x+1$ є числа ε_1, ε_2, ε_3, ε_4 (див. (9)–(12)), жодне з яких не є раціональним числом. Інше також не є можливим через те, що коренями многочлена ax^2+bx+c з одного боку є два комплексні числа, що спряжені один до одного, а з іншого, ці числа є коренями 5-го степеня з 1, відмінними від 1, тобто або це або пара ε_1, ε_4, або пара ε_2, ε_3. Тоді за формулами Вієта або $\varepsilon_1+\varepsilon_4=-\frac{b}{a}$, або ж $\varepsilon_2+\varepsilon_3=-\frac{b}{a}$, що не можливо. Тому рівність (13) є шуканим розкладом на незвідні множники над полем $\mathbb{Q}$.

Дякую за увагу!
До зустрічі на наступній лекції!