# Поле раціональних дробів

Лектор — доц. Шапочка Ігор

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

19 листопада 2022 року

Нехай до кінця цього параграфу $P$ — довільне поле;

Нехай до кінця цього параграфу $P$ — довільне поле; $P[x]$ — кільце многочленів від невідомої $x$ над полем $P$.

Нехай до кінця цього параграфу $P$ — довільне поле; $P[x]$ — кільце многочленів від невідомої $x$ над полем $P$.

### Означення 1

Дробово раціональною функцією

Нехай до кінця цього параграфу $P$ — довільне поле; $P[x]$ — кільце многочленів від невідомої $x$ над полем $P$.

**Означення 1**

Дробово раціональною функцією або просто раціональним дробом

Нехай до кінця цього параграфу $P$ — довільне поле; $P[x]$ — кільце многочленів від невідомої $x$ над полем $P$.

### Означення 1

Дробово раціональною функцією або просто раціональним дробом від невідомої (змінної) $x$

Нехай до кінця цього параграфу $P$ — довільне поле; $P[x]$ — кільце многочленів від невідомої $x$ над полем $P$.

**Означення 1**

Дробово раціональною функцією або просто раціональним дробом від невідомої (змінної) $x$ з коефіцієнтами із поля $P$

Нехай до кінця цього параграфу $P$ — довільне поле; $P[x]$ — кільце многочленів від невідомої $x$ над полем $P$.

### Означення 1

Дробово раціональною функцією або просто раціональним дробом від невідомої (змінної) $x$ з коефіцієнтами із поля $P$ називається алгебраїчний вираз (символ) $\frac{f(x)}{g(x)}$,

Нехай до кінця цього параграфу $P$ — довільне поле; $P[x]$ — кільце многочленів від невідомої $x$ над полем $P$.

### Означення 1

Дробово раціональною функцією або просто раціональним дробом від невідомої (змінної) $x$ з коефіцієнтами із поля $P$ називається алгебраїчний вираз (символ) $\frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ — довільний многочлен,

Нехай до кінця цього параграфу $P$ — довільне поле; $P[x]$ — кільце многочленів від невідомої $x$ над полем $P$.

### Означення 1

Дробово раціональною функцією або просто раціональним дробом від невідомої (змінної) $x$ з коефіцієнтами із поля $P$ називається алгебраїчний вираз (символ) $\frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ — довільний многочлен, а $g(x)$ — довільний ненульовий многочлен із кільця многочленів $P[x]$.

Нехай до кінця цього параграфу $P$ — довільне поле; $P[x]$ — кільце многочленів від невідомої $x$ над полем $P$.

### Означення 1

Дробово раціональною функцією або просто раціональним дробом від невідомої (змінної) $x$ з коефіцієнтами із поля $P$ називається алгебраїчний вираз (символ) $\frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ — довільний многочлен, а $g(x)$ — довільний ненульовий многочлен із кільця многочленів $P[x]$. При цьому многочлен $f(x)$ називається чисельником,

Нехай до кінця цього параграфу $P$ — довільне поле; $P[x]$ — кільце многочленів від невідомої $x$ над полем $P$.

**Означення 1**

Дробово раціональною функцією або просто раціональним дробом від невідомої (змінної) $x$ з коефіцієнтами із поля $P$ називається алгебраїчний вираз (символ) $\frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ — довільний многочлен, а $g(x)$ — довільний ненульовий многочлен із кільця многочленів $P[x]$. При цьому многочлен $f(x)$ називається чисельником, а $g(x)$ — знаменником раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Нехай до кінця цього параграфу $P$ — довільне поле; $P[x]$ — кільце многочленів від невідомої $x$ над полем $P$.

## Означення 1

Дробово раціональною функцією або просто раціональним дробом від невідомої (змінної) $x$ з коефіцієнтами із поля $P$ називається алгебраїчний вираз (символ) $\frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ — довільний многочлен, а $g(x)$ — довільний ненульовий многочлен із кільця многочленів $P[x]$. При цьому многочлен $f(x)$ називається чисельником, а $g(x)$ — знаменником раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Позначимо через $P(x)$

Нехай до кінця цього параграфу $P$ — довільне поле; $P[x]$ — кільце многочленів від невідомої $x$ над полем $P$.

**Означення 1**

Дробово раціональною функцією або просто раціональним дробом від невідомої (змінної) $x$ з коефіцієнтами із поля $P$ називається алгебраїчний вираз (символ) $\frac{f(x)}{g(x)}$, де $f(x)$ — довільний многочлен, а $g(x)$ — довільний ненульовий многочлен із кільця многочленів $P[x]$. При цьому многочлен $f(x)$ називається чисельником, а $g(x)$ — знаменником раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$.

Позначимо через $P(x)$ множину всіх раціональних дробів від невідомої $x$ з коефіцієнтами із множини $P$.

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються рівними,

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються рівними, якщо

$$f(x)v(x) = g(x)u(x). \tag{1}$$

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються **рівними**, якщо

$$f(x)v(x) = g(x)u(x). \tag{1}$$

Якщо раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ рівні,

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються **рівними**, якщо

$$f(x)v(x) = g(x)u(x). \tag{1}$$

Якщо раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ рівні, то писатимемо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються **рівними**, якщо

$$f(x)v(x) = g(x)u(x). \tag{1}$$

Якщо раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ рівні, то писатимемо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

## Приклад рівних дробів.

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються **рівними**, якщо

$$f(x)v(x) = g(x)u(x). \tag{1}$$

Якщо раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ рівні, то писатимемо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

## Приклад рівних дробів.

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} =$$

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються **рівними**, якщо

$$f(x)v(x) = g(x)u(x). \tag{1}$$

Якщо раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ рівні, то писатимемо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

## Приклад рівних дробів.

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{x^2-x+1}{x-1},$$

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються рівними, якщо

$$f(x)v(x) = g(x)u(x). \qquad (1)$$

Якщо раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ рівні, то писатимемо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

## Приклад рівних дробів.

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{x^2-x+1}{x-1},$$

бо $(x^3+1)(x-1) =$

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються рівними, якщо

$$f(x)v(x) = g(x)u(x). \tag{1}$$

Якщо раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ рівні, то писатимемо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

## Приклад рівних дробів.

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{x^2-x+1}{x-1},$$

бо $(x^3+1)(x-1) = x^4 - x^3 + x - 1$

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються **рівними**, якщо

$$f(x)v(x) = g(x)u(x). \quad (1)$$

Якщо раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ рівні, то писатимемо $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$.

## Приклад рівних дробів.

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{x^2-x+1}{x-1},$$

бо $(x^3+1)(x-1) = x^4 - x^3 + x - 1 = (x^2-1)(x^2-x+1)$,

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються рівними, якщо

$$f(x)v(x) = g(x)u(x). \quad (1)$$

Якщо раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ рівні, то писатимемо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

## Приклад рівних дробів.

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{x^2-x+1}{x-1},$$

бо $(x^3+1)(x-1) = x^4 - x^3 + x - 1 = (x^2-1)(x^2-x+1)$, або ж

$(x^3+1)(x-1) =$

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються **рівними**, якщо

$$f(x)v(x) = g(x)u(x). \tag{1}$$

Якщо раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ рівні, то писатимемо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

## Приклад рівних дробів.

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{x^2-x+1}{x-1},$$

бо $(x^3+1)(x-1) = x^4 - x^3 + x - 1 = (x^2-1)(x^2-x+1)$, або ж

$(x^3+1)(x-1) = \big((x+1)(x^2-x+1)\big)(x+1)$

## Означення 2

Раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називаються **рівними**, якщо

$$f(x)v(x) = g(x)u(x). \tag{1}$$

Якщо раціональні дроби $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ рівні, то писатимемо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}.$$

## Приклад рівних дробів.

$$\frac{x^3+1}{x^2-1} = \frac{x^2-x+1}{x-1},$$

бо $(x^3+1)(x-1) = x^4 - x^3 + x - 1 = (x^2-1)(x^2-x+1)$, або ж

$$(x^3+1)(x-1) = \big((x+1)(x^2-x+1)\big)(x+1) = \ldots = (x^2-1)(x^2-x+1).$$

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*

2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$,

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$,

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$,

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$ *(транзитивна властивість).*

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$ *(транзитивна властивість).*

## Зауваження 1

Із рефлективної,

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$ *(транзитивна властивість).*

## Зауваження 1

Із рефлективної, симетричної

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$ *(транзитивна властивість).*

## Зауваження 1

Із рефлективної, симетричної та транзитивної властивостей

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$ *(транзитивна властивість).*

## Зауваження 1

Із рефлективної, симетричної та транзитивної властивостей випливає, що множину $P(x)$

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$ *(транзитивна властивість).*

## Зауваження 1

Із рефлективної, симетричної та транзитивної властивостей випливає, що множину $P(x)$ всіх раціональних дробів

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$ *(транзитивна властивість).*

## Зауваження 1

Із рефлективної, симетричної та транзитивної властивостей випливає, що множину $P(x)$ всіх раціональних дробів можна розбити на підмножини,

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$ *(транзитивна властивість).*

## Зауваження 1

Із рефлективної, симетричної та транзитивної властивостей випливає, що множину $P(x)$ всіх раціональних дробів можна розбити на підмножини, такі що будь-які два елементи кожної з цих підмножин рівні між собою,

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$ *(транзитивна властивість).*

## Зауваження 1

Із рефлективної, симетричної та транзитивної властивостей випливає, що множину $P(x)$ всіх раціональних дробів можна розбити на підмножини, такі що будь-які два елементи кожної з цих підмножин рівні між собою, а самі ці підмножини при цьому не перетинаються.

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$ *(транзитивна властивість).*

## Зауваження 1

Із рефлективної, симетричної та транзитивної властивостей випливає, що множину $P(x)$ всіх раціональних дробів можна розбити на підмножини, такі що будь-які два елементи кожної з цих підмножин рівні між собою, а самі ці підмножини при цьому не перетинаються. Ці підмножини називають класами еквівалентності.

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$ *(транзитивна властивість).*

## Зауваження 1

Із рефлективної, симетричної та транзитивної властивостей випливає, що множину $P(x)$ всіх раціональних дробів можна розбити на підмножини, такі що будь-які два елементи кожної з цих підмножин рівні між собою, а самі ці підмножини при цьому не перетинаються. Ці підмножини називають класами еквівалентності. Тому кожен раціональний дріб можна трактувати як клас еквівалентності, представником якого він є.

## Лема 1

*Рівність раціональних дробів задовольняє наступним властивостям:*

1) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *для довільного раціонального дробу* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *(рефлексивна властивість);*
2) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, *то* $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)}{g(x)}$ *(симетрична властивість);*
3) *якщо* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$, *то* $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{q(x)}{r(x)}$ *(транзитивна властивість).*

## Зауваження 1

Із рефлективної, симетричної та транзитивної властивостей випливає, що множину $P(x)$ всіх раціональних дробів можна розбити на підмножини, такі що будь-які два елементи кожної з цих підмножин рівні між собою, а самі ці підмножини при цьому не перетинаються. Ці підмножини називають класами еквівалентності. Тому кожен раціональний дріб можна трактувати як клас еквівалентності, представником якого він є. Два рівні раціональні дроби представляють один і той клас еквівалентності.

## Означення 3

Сумою раціональних дробів

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб
$$\frac{f(x)v(x)+g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \qquad (2)$$

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) + g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \qquad (2)$$

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) + g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{2}$$

## Означення 4

Добутком раціональних дробів

### Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) + g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \qquad (2)$$

### Означення 4

Добутком раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$

### Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) + g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{2}$$

### Означення 4

Добутком раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) + g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{2}$$

## Означення 4

Добутком раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) + g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{2}$$

## Означення 4

Добутком раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{3}$$

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) + g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{2}$$

## Означення 4

Добутком раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{3}$$

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) + g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \qquad (2)$$

## Означення 4

Добутком раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \qquad (3)$$

## Зауваження 2

Операції додавання та множення раціональних дробів задано коректно.

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) + g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{2}$$

## Означення 4

Добутком раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{3}$$

## Зауваження 2

Операції додавання та множення раціональних дробів задано коректно. Можна показати (доведення залишаємо читачеві), що якщо $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$,

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) + g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{2}$$

## Означення 4

Добутком раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{3}$$

## Зауваження 2

Операції додавання та множення раціональних дробів задано коректно. Можна показати (доведення залишаємо читачеві), що якщо $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u_1(x)}{v_1(x)}$,

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) + g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{2}$$

## Означення 4

Добутком раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{3}$$

## Зауваження 2

Операції додавання та множення раціональних дробів задано коректно. Можна показати (доведення залишаємо читачеві), що якщо $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u_1(x)}{v_1(x)}$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{u_1(x)}{v_1(x)},$$

## Означення 3

Сумою раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x) + g(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{2}$$

## Означення 4

Добутком раціональних дробів $\frac{f(x)}{g(x)}$ і $\frac{u(x)}{v(x)}$ із $P(x)$ називається раціональний дріб

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}. \tag{3}$$

## Зауваження 2

Операції додавання та множення раціональних дробів задано коректно. Можна показати (доведення залишаємо читачеві), що якщо $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u_1(x)}{v_1(x)}$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{u_1(x)}{v_1(x)}, \qquad \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \cdot \frac{u_1(x)}{v_1(x)}.$$

### Теорема 1

*Множина* $P(x)$ *всіх раціональних дробів від невідомої* $x$ *над полем* $P$

## Теорема 1

*Множина* $P(x)$ *всіх раціональних дробів від невідомої* $x$ *над полем* $P$ *відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання та множення раціональних дробів є полем.*

## Теорема 1

*Множина* $P(x)$ *всіх раціональних дробів від невідомої* $x$ *над полем* $P$ *відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання та множення раціональних дробів є полем.*

## Доведення.

Доведемо спочатку комутативну властивість операції додавання дробів.

## Теорема 1

*Множина $P(x)$ всіх раціональних дробів від невідомої $x$ над полем $P$ відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання та множення раціональних дробів є полем.*

## Доведення.

Доведемо спочатку комутативну властивість операції додавання дробів. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$.

### Теорема 1

*Множина $P(x)$ всіх раціональних дробів від невідомої $x$ над полем $P$ відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання та множення раціональних дробів є полем.*

### Доведення.

Доведемо спочатку комутативну властивість операції додавання дробів. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$. Із означенням суми дробів та із комутативних властивостей операцій додавання і множення многочленів слідує,

## Теорема 1

*Множина $P(x)$ всіх раціональних дробів від невідомої $x$ над полем $P$ відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання та множення раціональних дробів є полем.*

## Доведення.

Доведемо спочатку комутативну властивість операції додавання дробів. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$. Із означенням суми дробів та із комутативних властивостей операцій додавання і множення многочленів слідує, що

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} =$$

### Теорема 1

*Множина $P(x)$ всіх раціональних дробів від невідомої $x$ над полем $P$ відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання та множення раціональних дробів є полем.*

### Доведення.

Доведемо спочатку комутативну властивість операції додавання дробів. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$. Із означенням суми дробів та із комутативних властивостей операцій додавання і множення многочленів слідує, що

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x)+g(x)u(x)}{g(x)v(x)}$$

### Теорема 1

*Множина $P(x)$ всіх раціональних дробів від невідомої $x$ над полем $P$ відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання та множення раціональних дробів є полем.*

### Доведення.

Доведемо спочатку комутативну властивість операції додавання дробів. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$. Із означенням суми дробів та із комутативних властивостей операцій додавання і множення многочленів слідує, що

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x)+g(x)u(x)}{g(x)v(x)} =$$

$$= \frac{u(x)g(x)+v(x)f(x)}{v(x)g(x)}$$

### Теорема 1

*Множина $P(x)$ всіх раціональних дробів від невідомої $x$ над полем $P$ відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання та множення раціональних дробів є полем.*

### Доведення.

Доведемо спочатку комутативну властивість операції додавання дробів. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$. Із означенням суми дробів та із комутативних властивостей операцій додавання і множення многочленів слідує, що

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)v(x)+g(x)u(x)}{g(x)v(x)} =$$

$$= \frac{u(x)g(x)+v(x)f(x)}{v(x)g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} + \frac{f(x)}{g(x)}.$$

**Доведення.**

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів,

**Доведення.**

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів

**Доведення.**

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів та дистрибутивну властивість.

## Доведення.

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів та дистрибутивну властивість. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{q(x)}{r(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$,

## Доведення.

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів та дистрибутивну властивість. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{q(x)}{r(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$, тоді:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} =$$

## Доведення.

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів та дистрибутивну властивість. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{q(x)}{r(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$, тоді:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}$$

## Доведення.

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів та дистрибутивну властивість. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{q(x)}{r(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$, тоді:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} = \frac{u(x)f(x)}{v(x)g(x)} =$$

## Доведення.

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів та дистрибутивну властивість. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{q(x)}{r(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$, тоді:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} = \frac{u(x)f(x)}{v(x)g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)};$$

## Доведення.

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів та дистрибутивну властивість. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{q(x)}{r(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$, тоді:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} = \frac{u(x)f(x)}{v(x)g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)};$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)}\right] + \frac{q(x)}{r(x)} =$$

## Доведення.

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів та дистрибутивну властивість. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{q(x)}{r(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$, тоді:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} = \frac{u(x)f(x)}{v(x)g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)};$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)}\right] + \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{f(x)v(x)+g(x)u(x)}{g(x)v(x)} + \frac{q(x)}{r(x)}$$

## Доведення.

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів та дистрибутивну властивість. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{q(x)}{r(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$, тоді:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} = \frac{u(x)f(x)}{v(x)g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)};$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)}\right] + \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{f(x)v(x)+g(x)u(x)}{g(x)v(x)} + \frac{q(x)}{r(x)} =$$
$$= \frac{[f(x)v(x)+g(x)u(x)]r(x)+[g(x)v(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)}$$

## Доведення.

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів та дистрибутивну властивість. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{q(x)}{r(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$, тоді:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} = \frac{u(x)f(x)}{v(x)g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)};$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)}\right] + \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{f(x)v(x)+g(x)u(x)}{g(x)v(x)} + \frac{q(x)}{r(x)} =$$
$$= \frac{[f(x)v(x)+g(x)u(x)]r(x)+[g(x)v(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)} =$$
$$= \frac{f(x)[v(x)r(x)]+g(x)[u(x)r(x)+v(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]}$$

## Доведення.

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів та дистрибутивну властивість. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{q(x)}{r(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$, тоді:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} = \frac{u(x)f(x)}{v(x)g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)};$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)}\right] + \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{f(x)v(x)+g(x)u(x)}{g(x)v(x)} + \frac{q(x)}{r(x)} =$$

$$= \frac{[f(x)v(x)+g(x)u(x)]r(x)+[g(x)v(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)} =$$

$$= \frac{f(x)[v(x)r(x)]+g(x)[u(x)r(x)+v(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]} =$$

$$= \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)r(x)+v(x)q(x)}{v(x)r(x)}$$

## Доведення.

Аналогічно доводимо комутативну властивість множення раціональних дробів, асоціатині властивості додавання і множення раціональних дробів та дистрибутивну властивість. Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$, $\frac{u(x)}{v(x)}$, $\frac{q(x)}{r(x)}$ довільні раціональні дроби із $P(x)$, тоді:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} = \frac{u(x)f(x)}{v(x)g(x)} = \frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)};$$

$$\begin{aligned}\left[\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)}{v(x)}\right] + \frac{q(x)}{r(x)} &= \frac{f(x)v(x)+g(x)u(x)}{g(x)v(x)} + \frac{q(x)}{r(x)} = \\ &= \frac{[f(x)v(x)+g(x)u(x)]r(x)+[g(x)v(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)} = \\ &= \frac{f(x)[v(x)r(x)]+g(x)[u(x)r(x)+v(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]} = \\ &= \frac{f(x)}{g(x)} + \frac{u(x)r(x)+v(x)q(x)}{v(x)r(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} + \left[\frac{u(x)}{v(x)} + \frac{q(x)}{r(x)}\right];\end{aligned}$$

## Доведення.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}\right] \cdot \frac{q(x)}{r(x)} =$$

## Доведення.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}\right] \cdot \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} \cdot \frac{q(x)}{r(x)}$$

## Доведення.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}\right] \cdot \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} \cdot \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{[f(x)u(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)}$$

## Доведення.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}\right]\cdot\frac{q(x)}{r(x)}=\frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}\cdot\frac{q(x)}{r(x)}=\frac{[f(x)u(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)}=$$

$$=\frac{f(x)[u(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]}$$

## Доведення.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}\right] \cdot \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} \cdot \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{[f(x)u(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)} =$$

$$= \frac{f(x)[u(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)q(x)}{v(x)r(x)}$$

## Доведення.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}\right]\cdot\frac{q(x)}{r(x)}=\frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}\cdot\frac{q(x)}{r(x)}=\frac{[f(x)u(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)}=$$

$$=\frac{f(x)[u(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)q(x)}{v(x)r(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\left[\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\frac{q(x)}{r(x)}\right];$$

## Доведення.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}\right]\cdot\frac{q(x)}{r(x)}=\frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}\cdot\frac{q(x)}{r(x)}=\frac{[f(x)u(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)}=$$
$$=\frac{f(x)[u(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)q(x)}{v(x)r(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\left[\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\frac{q(x)}{r(x)}\right];$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\left[\frac{u(x)}{v(x)}+\frac{q(x)}{r(x)}\right]=$$

## Доведення.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}\right] \cdot \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} \cdot \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{[f(x)u(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)} =$$

$$= \frac{f(x)[u(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)q(x)}{v(x)r(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left[\frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{q(x)}{r(x)}\right];$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left[\frac{u(x)}{v(x)} + \frac{q(x)}{r(x)}\right] = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)r(x)+v(x)q(x)}{v(x)r(x)}$$

## Доведення.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}\right] \cdot \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} \cdot \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{[f(x)u(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)} =$$

$$= \frac{f(x)[u(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)q(x)}{v(x)r(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left[\frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{q(x)}{r(x)}\right];$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left[\frac{u(x)}{v(x)} + \frac{q(x)}{r(x)}\right] = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)r(x)+v(x)q(x)}{v(x)r(x)} =$$

$$= \frac{f(x)[u(x)r(x)+v(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]}$$

## Доведення.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}\right] \cdot \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)} \cdot \frac{q(x)}{r(x)} = \frac{[f(x)u(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)} =$$

$$= \frac{f(x)[u(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)q(x)}{v(x)r(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left[\frac{u(x)}{v(x)} \cdot \frac{q(x)}{r(x)}\right];$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \left[\frac{u(x)}{v(x)} + \frac{q(x)}{r(x)}\right] = \frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{u(x)r(x)+v(x)q(x)}{v(x)r(x)} =$$

$$= \frac{f(x)[u(x)r(x)+v(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]} = \frac{f(x)u(x)r(x)+v(x)f(x)q(x)}{g(x)v(x)r(x)}$$

## Доведення.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}\right]\cdot\frac{q(x)}{r(x)}=\frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}\cdot\frac{q(x)}{r(x)}=\frac{[f(x)u(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)}=$$
$$=\frac{f(x)[u(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)q(x)}{v(x)r(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\left[\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\frac{q(x)}{r(x)}\right];$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\left[\frac{u(x)}{v(x)}+\frac{q(x)}{r(x)}\right]=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)r(x)+v(x)q(x)}{v(x)r(x)}=$$
$$=\frac{f(x)[u(x)r(x)+v(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]}=\frac{f(x)u(x)r(x)+v(x)f(x)q(x)}{g(x)v(x)r(x)}=$$
$$=\frac{f(x)u(x)r(x)}{g(x)v(x)r(x)}+\frac{v(x)f(x)q(x)}{g(x)v(x)r(x)}$$

## Доведення.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}\right]\cdot\frac{q(x)}{r(x)}=\frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}\cdot\frac{q(x)}{r(x)}=\frac{[f(x)u(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)}=$$

$$=\frac{f(x)[u(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)q(x)}{v(x)r(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\left[\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\frac{q(x)}{r(x)}\right];$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\left[\frac{u(x)}{v(x)}+\frac{q(x)}{r(x)}\right]=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)r(x)+v(x)q(x)}{v(x)r(x)}=$$

$$=\frac{f(x)[u(x)r(x)+v(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]}=\frac{f(x)u(x)r(x)+v(x)f(x)q(x)}{g(x)v(x)r(x)}=$$

$$=\frac{f(x)u(x)r(x)}{g(x)v(x)r(x)}+\frac{v(x)f(x)q(x)}{g(x)v(x)r(x)}=\frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}+\frac{f(x)q(x)}{g(x)r(x)}$$

## Доведення.

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}\right]\cdot\frac{q(x)}{r(x)}=\frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}\cdot\frac{q(x)}{r(x)}=\frac{[f(x)u(x)]q(x)}{[g(x)v(x)]r(x)}=$$
$$=\frac{f(x)[u(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)q(x)}{v(x)r(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\left[\frac{u(x)}{v(x)}\cdot\frac{q(x)}{r(x)}\right];$$

$$\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\left[\frac{u(x)}{v(x)}+\frac{q(x)}{r(x)}\right]=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)r(x)+v(x)q(x)}{v(x)r(x)}=$$
$$=\frac{f(x)[u(x)r(x)+v(x)q(x)]}{g(x)[v(x)r(x)]}=\frac{f(x)u(x)r(x)+v(x)f(x)q(x)}{g(x)v(x)r(x)}=$$
$$=\frac{f(x)u(x)r(x)}{g(x)v(x)r(x)}+\frac{v(x)f(x)q(x)}{g(x)v(x)r(x)}=\frac{f(x)u(x)}{g(x)v(x)}+\frac{f(x)q(x)}{g(x)r(x)}=$$
$$=\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{u(x)}{v(x)}+\frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{q(x)}{r(x)}.$$

## Доведення.

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль).

### Доведення.

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$.

## Доведення.

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$. Дійсно для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

## Доведення.

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$. Дійсно для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{1} =$$

## Доведення.

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$. Дійсно для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{1} = \frac{f(x) \cdot 1 + g(x) \cdot 0}{g(x) \cdot 1}$$

## Доведення.

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$. Дійсно для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{1} = \frac{f(x) \cdot 1 + g(x) \cdot 0}{g(x) \cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

## Доведення.

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$. Дійсно для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{1} = \frac{f(x) \cdot 1 + g(x) \cdot 0}{g(x) \cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Очевидно будь-який раціональний дріб вигляду $\frac{0}{g(x)}$ є нульовим раціональним дробом.

## Доведення.

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$. Дійсно для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{1} = \frac{f(x)\cdot 1 + g(x)\cdot 0}{g(x)\cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Очевидно будь-який раціональний дріб вигляду $\frac{0}{g(x)}$ є нульовим раціональним дробом.

Також у множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є одиниця.

## Доведення.

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$. Дійсно для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{1} = \frac{f(x)\cdot 1 + g(x)\cdot 0}{g(x)\cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Очевидно будь-який раціональний дріб вигляду $\frac{0}{g(x)}$ є нульовим раціональним дробом.
Також у множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є одиниця. Це раціональний дріб $\frac{1}{1}$,

## Доведення.

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$. Дійсно для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{1} = \frac{f(x)\cdot 1 + g(x)\cdot 0}{g(x)\cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Очевидно будь-який раціональний дріб вигляду $\frac{0}{g(x)}$ є нульовим раціональним дробом.

Також у множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є одиниця. Це раціональний дріб $\frac{1}{1}$, тому що для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$

## Доведення.

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$. Дійсно для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{1} = \frac{f(x) \cdot 1 + g(x) \cdot 0}{g(x) \cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Очевидно будь-який раціональний дріб вигляду $\frac{0}{g(x)}$ є нульовим раціональним дробом.

Також у множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є одиниця. Це раціональний дріб $\frac{1}{1}$, тому що для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{1} =$$

## Доведення.

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$. Дійсно для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{1} = \frac{f(x) \cdot 1 + g(x) \cdot 0}{g(x) \cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Очевидно будь-який раціональний дріб вигляду $\frac{0}{g(x)}$ є нульовим раціональним дробом.

Також у множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є одиниця. Це раціональний дріб $\frac{1}{1}$, тому що для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{1} = \frac{f(x) \cdot 1}{g(x) \cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

## Доведення.

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$. Дійсно для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{1} = \frac{f(x)\cdot 1 + g(x)\cdot 0}{g(x)\cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Очевидно будь-який раціональний дріб вигляду $\frac{0}{g(x)}$ є нульовим раціональним дробом.

Також у множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є одиниця. Це раціональний дріб $\frac{1}{1}$, тому що для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{1} = \frac{f(x)\cdot 1}{g(x)\cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Будь-який раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{f(x)}$ є одиничним раціональним дробом.

**Доведення.**

У множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є нульовий елемент (або просто нуль). Це раціональний дріб $\frac{0}{1}$. Дійсно для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} + \frac{0}{1} = \frac{f(x)\cdot 1 + g(x)\cdot 0}{g(x)\cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Очевидно будь-який раціональний дріб вигляду $\frac{0}{g(x)}$ є нульовим раціональним дробом.

Також у множині $P(x)$ всіх раціональних дробів є одиниця. Це раціональний дріб $\frac{1}{1}$, тому що для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ справджується рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} \cdot \frac{1}{1} = \frac{f(x)\cdot 1}{g(x)\cdot 1} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Будь-який раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{f(x)}$ є одиничним раціональним дробом.

### Доведення.

Для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує протилежний раціональний дріб із $P(x)$,

### Доведення.

Для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує протилежний раціональний дріб із $P(x)$, а саме $\frac{-f(x)}{g(x)}$.

## Доведення.

Для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує протилежний раціональний дріб із $P(x)$, а саме $\frac{-f(x)}{g(x)}$. Дійсно

$$\frac{-f(x)}{g(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} =$$

### Доведення.

Для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує протилежний раціональний дріб із $P(x)$, а саме $\frac{-f(x)}{g(x)}$. Дійсно

$$\frac{-f(x)}{g(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)+f(x)}{g(x)}$$

**Доведення.**

Для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує протилежний раціональний дріб із $P(x)$, а саме $\frac{-f(x)}{g(x)}$. Дійсно

$$\frac{-f(x)}{g(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)+f(x)}{g(x)} = \frac{0}{g(x)} = \frac{0}{1}.$$

## Доведення.

Для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує протилежний раціональний дріб із $P(x)$, а саме $\frac{-f(x)}{g(x)}$. Дійсно

$$\frac{-f(x)}{g(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)+f(x)}{g(x)} = \frac{0}{g(x)} = \frac{0}{1}.$$

Для довільного ненульового раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує обернений раціональний дріб із $P(x)$.

### Доведення.

Для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує протилежний раціональний дріб із $P(x)$, а саме $\frac{-f(x)}{g(x)}$. Дійсно

$$\frac{-f(x)}{g(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)+f(x)}{g(x)} = \frac{0}{g(x)} = \frac{0}{1}.$$

Для довільного ненульового раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує обернений раціональний дріб із $P(x)$. Оскільки $f(x) \neq 0$, то можна розглянути раціональний дріб $\frac{g(x)}{f(x)}$ із $P(x)$.

### Доведення.

Для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує протилежний раціональний дріб із $P(x)$, а саме $\frac{-f(x)}{g(x)}$. Дійсно

$$\frac{-f(x)}{g(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)+f(x)}{g(x)} = \frac{0}{g(x)} = \frac{0}{1}.$$

Для довільного ненульового раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує обернений раціональний дріб із $P(x)$. Оскільки $f(x) \neq 0$, то можна розглянути раціональний дріб $\frac{g(x)}{f(x)}$ із $P(x)$. Тоді

$$\frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} =$$

## Доведення.

Для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує протилежний раціональний дріб із $P(x)$, а саме $\frac{-f(x)}{g(x)}$. Дійсно

$$\frac{-f(x)}{g(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)+f(x)}{g(x)} = \frac{0}{g(x)} = \frac{0}{1}.$$

Для довільного ненульового раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує обернений раціональний дріб із $P(x)$. Оскільки $f(x) \neq 0$, то можна розглянути раціональний дріб $\frac{g(x)}{f(x)}$ із $P(x)$. Тоді

$$\frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f(x)}{f(x)g(x)}$$

## Доведення.

Для довільного раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує протилежний раціональний дріб із $P(x)$, а саме $\frac{-f(x)}{g(x)}$. Дійсно

$$\frac{-f(x)}{g(x)} + \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{-f(x)+f(x)}{g(x)} = \frac{0}{g(x)} = \frac{0}{1}.$$

Для довільного ненульового раціонального дробу $\frac{f(x)}{g(x)}$ із $P(x)$ існує обернений раціональний дріб із $P(x)$. Оскільки $f(x) \neq 0$, то можна розглянути раціональний дріб $\frac{g(x)}{f(x)}$ із $P(x)$. Тоді

$$\frac{g(x)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)f(x)}{f(x)g(x)} = \frac{1}{1}.$$

Теорему доведено. □

Розглянемо множину

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$

всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

Розглянемо множину

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$

всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

## Означення 5

Раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ називається цілим раціональним дробом.

Розглянемо множину

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$

всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

### Означення 5

Раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ називається цілим раціональним дробом.

Оскільки для довільних цілих раціональних дробів $\frac{f(x)}{1}$, $\frac{g(x)}{1}$ $\in$ $R$

Розглянемо множину

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$

всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

**Означення 5**

Раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ називається **цілим раціональним дробом**.

Оскільки для довільних цілих раціональних дробів $\frac{f(x)}{1}$, $\frac{g(x)}{1} \in R$ справджуються відношення

$$\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} =$$

Розглянемо множину

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$

всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

### Означення 5

Раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ називається цілим раціональним дробом.

Оскільки для довільних цілих раціональних дробів $\frac{f(x)}{1}$, $\frac{g(x)}{1} \in R$ справджуються відношення

$$\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)+g(x)}{1}$$

Розглянемо множину

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$

всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

### Означення 5

Раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ називається цілим раціональним дробом.

Оскільки для довільних цілих раціональних дробів $\frac{f(x)}{1}$, $\frac{g(x)}{1} \in R$ справджуються відношення

$$\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)+g(x)}{1} \in R,$$

Розглянемо множину

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$

всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

## Означення 5

Раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ називається цілим раціональним дробом.

Оскільки для довільних цілих раціональних дробів $\frac{f(x)}{1}, \frac{g(x)}{1} \in R$ справджуються відношення

$$\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)+g(x)}{1} \in R, \qquad \frac{f(x)}{1} \cdot \frac{g(x)}{1}$$

Розглянемо множину

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$

всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

### Означення 5

Раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ називається цілим раціональним дробом.

Оскільки для довільних цілих раціональних дробів $\frac{f(x)}{1}, \frac{g(x)}{1} \in R$ справджуються відношення

$$\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)+g(x)}{1} \in R, \qquad \frac{f(x)}{1} \cdot \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)g(x)}{1}$$

Розглянемо множину

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$

всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

### Означення 5

Раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ називається цілим раціональним дробом.

Оскільки для довільних цілих раціональних дробів $\frac{f(x)}{1}, \frac{g(x)}{1} \in R$ справджуються відношення

$$\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)+g(x)}{1} \in R, \qquad \frac{f(x)}{1} \cdot \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)g(x)}{1} \in R$$

Розглянемо множину

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$

всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

### Означення 5

Раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ називається цілим раціональним дробом.

Оскільки для довільних цілих раціональних дробів $\frac{f(x)}{1}$, $\frac{g(x)}{1} \in R$ справджуються відношення

$$\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)+g(x)}{1} \in R, \qquad \frac{f(x)}{1} \cdot \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)g(x)}{1} \in R$$

і $R$ є підмножиною поля $P(x)$,

Розглянемо множину

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$

всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

### Означення 5

Раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ називається цілим раціональним дробом.

Оскільки для довільних цілих раціональних дробів $\frac{f(x)}{1}, \frac{g(x)}{1} \in R$ справджуються відношення

$$\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)+g(x)}{1} \in R, \qquad \frac{f(x)}{1} \cdot \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)g(x)}{1} \in R$$

і $R$ є підмножиною поля $P(x)$, то $R$ є кільцем відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення раціональних дробів.

Розглянемо множину
$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$
всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

## Означення 5

Раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ називається цілим раціональним дробом.

Оскільки для довільних цілих раціональних дробів $\frac{f(x)}{1}, \frac{g(x)}{1} \in R$ справджуються відношення
$$\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)+g(x)}{1} \in R, \qquad \frac{f(x)}{1} \cdot \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)g(x)}{1} \in R$$
і $R$ є підмножиною поля $P(x)$, то $R$ є кільцем відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення раціональних дробів.
Неважко показати, що відображення $\varphi : R \to P[x]$, яке задається за правилом
$$\varphi\left(\frac{f(x)}{1}\right) = f(x), \qquad \left(\frac{f(x)}{1} \in R\right),$$

Розглянемо множину

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$

всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

### Означення 5

Раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ називається цілим раціональним дробом.

Оскільки для довільних цілих раціональних дробів $\frac{f(x)}{1}, \frac{g(x)}{1} \in R$ справджуються відношення

$$\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)+g(x)}{1} \in R, \qquad \frac{f(x)}{1} \cdot \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)g(x)}{1} \in R$$

і $R$ є підмножиною поля $P(x)$, то $R$ є кільцем відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення раціональних дробів.

Неважко показати, що відображення $\varphi : R \to P[x]$, яке задається за правилом

$$\varphi\left(\frac{f(x)}{1}\right) = f(x), \qquad \left(\frac{f(x)}{1} \in R\right),$$

є ізоморфізмом кілець $R$ і $P[x]$.

Розглянемо множину

$$R = \left\{ \frac{f(x)}{1} \mid f(x) \in P[x] \right\}$$

всіх раціональних дробів над полем $P$ із знаменником $1$.

### Означення 5

Раціональний дріб вигляду $\frac{f(x)}{1}$ називається цілим раціональним дробом.

Оскільки для довільних цілих раціональних дробів $\frac{f(x)}{1}$, $\frac{g(x)}{1} \in R$ справджуються відношення

$$\frac{f(x)}{1} + \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)+g(x)}{1} \in R, \qquad \frac{f(x)}{1} \cdot \frac{g(x)}{1} = \frac{f(x)g(x)}{1} \in R$$

і $R$ є підмножиною поля $P(x)$, то $R$ є кільцем відносно бінарних алгебраїчних операцій додавання і множення раціональних дробів.

Неважко показати, що відображення $\varphi : R \to P[x]$, яке задається за правилом

$$\varphi\left(\frac{f(x)}{1}\right) = f(x), \qquad \left(\frac{f(x)}{1} \in R\right),$$

є ізоморфізмом кілець $R$ і $P[x]$. Тому, надалі, за домовленістю ми будемо ототожнювати цілий раціональний дріб $\frac{f(x)}{1}$ з многочленом $f(x)$.

## Означення 6

Раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається **правильним**,

## Означення 6

Раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається **правильним**, якщо степінь чисельника $f(x)$ менший за степінь знаменника $g(x)$.

## Означення 6

Раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається правильним, якщо степінь чисельника $f(x)$ менший за степінь знаменника $g(x)$. У протилежному випадку раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається неправильним.

## Означення 6

Раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається правильним, якщо степінь чисельника $f(x)$ менший за степінь знаменника $g(x)$. У протилежному випадку раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається неправильним. Нульовий многочлен відносять до правильних раціональних дробів.

## Означення 6

Раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається **правильним**, якщо степінь чисельника $f(x)$ менший за степінь знаменника $g(x)$. У протилежному випадку раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається **неправильним**. Нульовий многочлен відносять до правильних раціональних дробів.

## Теорема 2

*Будь-який раціональний дріб* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$

## Означення 6

Раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається **правильним**, якщо степінь чисельника $f(x)$ менший за степінь знаменника $g(x)$. У протилежному випадку раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається **неправильним**. Нульовий многочлен відносять до правильних раціональних дробів.

## Теорема 2

*Будь-який раціональний дріб* $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ *можна записати, притому єдиним способом,*

**Означення 6**

Раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається правильним, якщо степінь чисельника $f(x)$ менший за степінь знаменника $g(x)$. У протилежному випадку раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ називається неправильним. Нульовий многочлен відносять до правильних раціональних дробів.

**Теорема 2**

*Будь-який раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ можна записати, притому єдиним способом, у вигляді суми многочлена і правильного раціонального дробу.*

**Доведення.**

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$.

## Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$. За теоремою про ділення з остачею,

## Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$. За теоремою про ділення з остачею, у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$,

### Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$. За теоремою про ділення з остачею, у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$,

### Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$. За теоремою про ділення з остачею, у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, причому степінь многочлена $r(x)$ менший за степінь $g(x)$ або $r(x) = 0$.

### Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$. За теоремою про ділення з остачею, у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, причому степінь многочлена $r(x)$ менший за степінь $g(x)$ або $r(x) = 0$. Тоді

$$\frac{f(x)}{g(x)} =$$

## Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$. За теоремою про ділення з остачею, у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, причому степінь многочлена $r(x)$ менший за степінь $g(x)$ або $r(x) = 0$. Тоді

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)+r(x)}{g(x)}$$

### Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$. За теоремою про ділення з остачею, у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, причому степінь многочлена $r(x)$ менший за степінь $g(x)$ або $r(x) = 0$. Тоді

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)+r(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)}{g(x)} + \frac{r(x)}{g(x)}$$

### Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$. За теоремою про ділення з остачею, у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, причому степінь многочлена $r(x)$ менший за степінь $g(x)$ або $r(x) = 0$. Тоді

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)+r(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)}{g(x)} + \frac{r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

## Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$. За теоремою про ділення з остачею, у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, причому степінь многочлена $r(x)$ менший за степінь $g(x)$ або $r(x) = 0$. Тоді

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)+r(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)}{g(x)} + \frac{r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Доведемо, що многочлен $q(x)$ і правильний дріб $\frac{r(x)}{g(x)}$ визначаються однозначно.

### Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$. За теоремою про ділення з остачею, у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, причому степінь многочлена $r(x)$ менший за степінь $g(x)$ або $r(x) = 0$. Тоді

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)+r(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)}{g(x)} + \frac{r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Доведемо, що многочлен $q(x)$ і правильний дріб $\frac{r(x)}{g(x)}$ визначаються однозначно. Припустимо, що справджується також рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)},$$

**Доведення.**

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$. За теоремою про ділення з остачею, у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, причому степінь многочлена $r(x)$ менший за степінь $g(x)$ або $r(x) = 0$. Тоді

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)+r(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)}{g(x)} + \frac{r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Доведемо, що многочлен $q(x)$ і правильний дріб $\frac{r(x)}{g(x)}$ визначаються однозначно. Припустимо, що справджується також рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)},$$

де $\bar{q}(x)$ — деякий многочлен із $P[x]$,

## Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний раціональний дріб із $P(x)$. За теоремою про ділення з остачею, у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $q(x)$ і $r(x)$, що $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$, причому степінь многочлена $r(x)$ менший за степінь $g(x)$ або $r(x) = 0$. Тоді

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)+r(x)}{g(x)} = \frac{g(x)q(x)}{g(x)} + \frac{r(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}.$$

Доведемо, що многочлен $q(x)$ і правильний дріб $\frac{r(x)}{g(x)}$ визначаються однозначно. Припустимо, що справджується також рівність

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)},$$

де $\bar{q}(x)$ — деякий многочлен із $P[x]$, $\frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)}$ — деякий правильний дріб.

## Доведення.

## Доведення.

Тоді матимемо рівність

$$q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

## Доведення.

Тоді матимемо рівність

$$q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

Звідси

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)} - \frac{r(x)}{g(x)}$$

## Доведення.

Тоді матимемо рівність

$$q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

Звідси

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)} - \frac{r(x)}{g(x)}$$

або

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)g(x) - r(x)\bar{g}(x)}{\bar{g}(x)g(x)}.$$

## Доведення.

Тоді матимемо рівність

$$q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

Звідси

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)} - \frac{r(x)}{g(x)}$$

або

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)g(x) - r(x)\bar{g}(x)}{\bar{g}(x)g(x)}.$$

Ліва частина цієї рівності — многочлен,

## Доведення.

Тоді матимемо рівність

$$q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

Звідси

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)} - \frac{r(x)}{g(x)}$$

або

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)g(x) - r(x)\bar{g}(x)}{\bar{g}(x)g(x)}.$$

Ліва частина цієї рівності — многочлен, а права, як легко зрозуміти, — правильний дріб.

## Доведення.

Тоді матимемо рівність

$$q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

Звідси

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)} - \frac{r(x)}{g(x)}$$

або

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)g(x) - r(x)\bar{g}(x)}{\bar{g}(x)g(x)}.$$

Ліва частина цієї рівності — многочлен, а права, як легко зрозуміти, — правильний дріб. Рівність ця може справджуватися тоді і тільки тоді,

## Доведення.

Тоді матимемо рівність

$$q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

Звідси

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)} - \frac{r(x)}{g(x)}$$

або

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)g(x) - r(x)\bar{g}(x)}{\bar{g}(x)g(x)}.$$

Ліва частина цієї рівності — многочлен, а права, як легко зрозуміти, — правильний дріб. Рівність ця може справджуватися тоді і тільки тоді, коли

$$q(x) - \bar{q}(x) = 0,$$

## Доведення.

Тоді матимемо рівність

$$q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

Звідси

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)} - \frac{r(x)}{g(x)}$$

або

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)g(x) - r(x)\bar{g}(x)}{\bar{g}(x)g(x)}.$$

Ліва частина цієї рівності — многочлен, а права, як легко зрозуміти, — правильний дріб. Рівність ця може справджуватися тоді і тільки тоді, коли

$$q(x) - \bar{q}(x) = 0, \qquad \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)} - \frac{r(x)}{g(x)} = 0.$$

## Доведення.

Тоді матимемо рівність

$$q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

Звідси

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)} - \frac{r(x)}{g(x)}$$

або

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)g(x) - r(x)\bar{g}(x)}{\bar{g}(x)g(x)}.$$

Ліва частина цієї рівності — многочлен, а права, як легко зрозуміти, — правильний дріб. Рівність ця може справджуватися тоді і тільки тоді, коли

$$q(x) - \bar{q}(x) = 0, \qquad \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)} - \frac{r(x)}{g(x)} = 0.$$

Таким чином,

$$q(x) = \bar{q}(x), \qquad \frac{r(x)}{g(x)} = \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

## Доведення.

Тоді матимемо рівність

$$q(x) + \frac{r(x)}{g(x)} = \bar{q}(x) + \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

Звідси

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)} - \frac{r(x)}{g(x)}$$

або

$$q(x) - \bar{q}(x) = \frac{\bar{r}(x)g(x) - r(x)\bar{g}(x)}{\bar{g}(x)g(x)}.$$

Ліва частина цієї рівності — многочлен, а права, як легко зрозуміти, — правильний дріб. Рівність ця може справджуватися тоді і тільки тоді, коли

$$q(x) - \bar{q}(x) = 0, \qquad \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)} - \frac{r(x)}{g(x)} = 0.$$

Таким чином,

$$q(x) = \bar{q}(x), \qquad \frac{r(x)}{g(x)} = \frac{\bar{r}(x)}{\bar{g}(x)}.$$

Теорему доведено. □

## Теорема 3

*Якщо* $g_1(x)$ *і* $g_2(x)$ *— взаємно прості многочлени над полем* $P$

## Теорема 3

*Якщо* $g_1(x)$ *і* $g_2(x)$ *— взаємно прості многочлени над полем* $P$ *і* $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$ *— правильний раціональний дріб над цим полем,*

## Теорема 3

*Якщо* $g_1(x)$ *і* $g_2(x)$ *— взаємно прості многочлени над полем* $P$ *і* $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$ *— правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці* $P[x]$ *є такі многочлени* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$*,*

## Теорема 3

*Якщо* $g_1(x)$ *і* $g_2(x)$ *— взаємно прості многочлени над полем* $P$ *і* $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$ *— правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці* $P[x]$ *є такі многочлени* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$*, що*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

## Теорема 3

*Якщо* $g_1(x)$ *і* $g_2(x)$ *— взаємно прості многочлени над полем* $P$ *і* $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$ *— правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці* $P[x]$ *є такі многочлени* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$*, що*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

*причому дроби* $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ *і* $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ *— правильні.*

## Теорема 3

*Якщо* $g_1(x)$ *і* $g_2(x)$ *— взаємно прості многочлени над полем* $P$ *і* $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$ *— правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці* $P[x]$ *є такі многочлени* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$*, що*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

*причому дроби* $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ *і* $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ *— правильні.*

## Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

### Теорема 3

*Якщо* $g_1(x)$ *і* $g_2(x)$ *— взаємно прості многочлени над полем* $P$ *і* $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$ *— правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці* $P[x]$ *є такі многочлени* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$*, що*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

*причому дроби* $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ *і* $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ *— правильні.*

### Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки многочлени $g_1(x)$ і $g_2(x)$ — взаємно прості,

## Теорема 3

*Якщо $g_1(x)$ і $g_2(x)$ — взаємно прості многочлени над полем $P$ і $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$ — правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці $P[x]$ є такі многочлени $f_1(x)$ і $f_2(x)$, що*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

*причому дроби $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ і $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ — правильні.*

## Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки многочлени $g_1(x)$ і $g_2(x)$ — взаємно прості, то за ознакою взаємної простоти многочленів у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$,

## Теорема 3

*Якщо* $g_1(x)$ *і* $g_2(x)$ *— взаємно прості многочлени над полем* $P$ *і* $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$ *— правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці* $P[x]$ *є такі многочлени* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$, *що*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

*причому дроби* $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ *і* $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ *— правильні.*

## Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки многочлени $g_1(x)$ і $g_2(x)$ — взаємно прості, то за ознакою взаємної простоти многочленів у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що

$$g_1(x)u(x) + g_2(x)v(x) = 1.$$

## Теорема 3

*Якщо $g_1(x)$ і $g_2(x)$ — взаємно прості многочлени над полем $P$ і $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$ — правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці $P[x]$ є такі многочлени $f_1(x)$ і $f_2(x)$, що*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

*причому дроби $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ і $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ — правильні.*

## Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки многочлени $g_1(x)$ і $g_2(x)$ — взаємно прості, то за ознакою взаємної простоти многочленів у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що

$$g_1(x)u(x) + g_2(x)v(x) = 1.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $f(x)$,

## Теорема 3

*Якщо* $g_1(x)$ *і* $g_2(x)$ *— взаємно прості многочлени над полем* $P$ *і* $\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)}$ *— правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці* $P[x]$ *є такі многочлени* $f_1(x)$ *і* $f_2(x)$*, що*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

*причому дроби* $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ *і* $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ *— правильні.*

## Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Оскільки многочлени $g_1(x)$ і $g_2(x)$ — взаємно прості, то за ознакою взаємної простоти многочленів у кільці $P[x]$ існують такі многочлени $u(x)$ і $v(x)$, що

$$g_1(x)u(x) + g_2(x)v(x) = 1.$$

Помножимо обидві частини цієї рівності на $f(x)$, одержимо

$$g_1(x)[u(x)f(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x). \tag{4}$$

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$,

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$.

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4).

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)[g_2(x)q(x) + f_2(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x)$$

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)[g_2(x)q(x) + f_2(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x)$$

або

$$g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x) = f(x), \tag{5}$$

де $f_1(x) = g_1(x)q(x) + v(x)f(x)$.

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)[g_2(x)q(x) + f_2(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x)$$

або

$$g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x) = f(x), \tag{5}$$

де $f_1(x) = g_1(x)q(x) + v(x)f(x)$. Оскільки степінь $g_1(x)f_2(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)[g_2(x)q(x) + f_2(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x)$$

або

$$g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x) = f(x), \tag{5}$$

де $f_1(x) = g_1(x)q(x) + v(x)f(x)$. Оскільки степінь $g_1(x)f_2(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$ і за умовою степінь $f(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$,

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)[g_2(x)q(x) + f_2(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x)$$

або

$$g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x) = f(x), \tag{5}$$

де $f_1(x) = g_1(x)q(x) + v(x)f(x)$. Оскільки степінь $g_1(x)f_2(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$ і за умовою степінь $f(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, то і степінь $g_2(x)f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$,

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)[g_2(x)q(x) + f_2(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x)$$

або

$$g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x) = f(x), \tag{5}$$

де $f_1(x) = g_1(x)q(x) + v(x)f(x)$. Оскільки степінь $g_1(x)f_2(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$ і за умовою степінь $f(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, то і степінь $g_2(x)f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, а тому степінь $f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)$.

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)[g_2(x)q(x) + f_2(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x)$$

або

$$g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x) = f(x), \tag{5}$$

де $f_1(x) = g_1(x)q(x) + v(x)f(x)$. Оскільки степінь $g_1(x)f_2(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$ і за умовою степінь $f(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, то і степінь $g_2(x)f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, а тому степінь $f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)$. Тепер із рівності (5) одержимо рівність

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} =$$

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)[g_2(x)q(x) + f_2(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x)$$

або

$$g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x) = f(x), \tag{5}$$

де $f_1(x) = g_1(x)q(x) + v(x)f(x)$. Оскільки степінь $g_1(x)f_2(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$ і за умовою степінь $f(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, то і степінь $g_2(x)f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, а тому степінь $f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)$. Тепер із рівності (5) одержимо рівність

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{g_1(x)f_2(x)+g_2(x)f_1(x)}{g_1(x)g_2(x)}$$

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)[g_2(x)q(x) + f_2(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x)$$

або

$$g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x) = f(x), \tag{5}$$

де $f_1(x) = g_1(x)q(x) + v(x)f(x)$. Оскільки степінь $g_1(x)f_2(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$ і за умовою степінь $f(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, то і степінь $g_2(x)f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, а тому степінь $f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)$. Тепер із рівності (5) одержимо рівність

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{g_1(x)f_2(x)+g_2(x)f_1(x)}{g_1(x)g_2(x)} =$$

$$= \frac{g_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} + \frac{g_2(x)f_1(x)}{g_1(x)g_2(x)}$$

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)[g_2(x)q(x) + f_2(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x)$$

або

$$g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x) = f(x), \tag{5}$$

де $f_1(x) = g_1(x)q(x) + v(x)f(x)$. Оскільки степінь $g_1(x)f_2(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$ і за умовою степінь $f(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, то і степінь $g_2(x)f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, а тому степінь $f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)$. Тепер із рівності (5) одержимо рівність

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{g_1(x)f_2(x)+g_2(x)f_1(x)}{g_1(x)g_2(x)} =$$

$$= \frac{g_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} + \frac{g_2(x)f_1(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \frac{f_1(x)}{g_1(x)} =$$

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)[g_2(x)q(x) + f_2(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x)$$

або

$$g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x) = f(x), \tag{5}$$

де $f_1(x) = g_1(x)q(x) + v(x)f(x)$. Оскільки степінь $g_1(x)f_2(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$ і за умовою степінь $f(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, то і степінь $g_2(x)f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, а тому степінь $f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)$. Тепер із рівності (5) одержимо рівність

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{g_1(x)f_2(x)+g_2(x)f_1(x)}{g_1(x)g_2(x)} =$$

$$= \frac{g_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} + \frac{g_2(x)f_1(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)[g_2(x)q(x) + f_2(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x)$$

або

$$g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x) = f(x), \tag{5}$$

де $f_1(x) = g_1(x)q(x) + v(x)f(x)$. Оскільки степінь $g_1(x)f_2(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$ і за умовою степінь $f(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, то і степінь $g_2(x)f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, а тому степінь $f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)$. Тепер із рівності (5) одержимо рівність

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{g_1(x)f_2(x)+g_2(x)f_1(x)}{g_1(x)g_2(x)} =$$

$$= \frac{g_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} + \frac{g_2(x)f_1(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

у правій частині якої стоять правильні дроби.

## Доведення.

Поділивши многочлен $u(x)f(x)$ на $g_2(x)$, матимемо

$$u(x)f(x) = g_2(x)q(x) + f_2(x),$$

де $f_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь $g_2(x)$. Добутий вираз для $u(x)f(x)$ підставимо у рівність (4). Тоді матимемо

$$g_1(x)[g_2(x)q(x) + f_2(x)] + g_2(x)[v(x)f(x)] = f(x)$$

або

$$g_1(x)f_2(x) + g_2(x)f_1(x) = f(x), \tag{5}$$

де $f_1(x) = g_1(x)q(x) + v(x)f(x)$. Оскільки степінь $g_1(x)f_2(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$ і за умовою степінь $f(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, то і степінь $g_2(x)f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)g_2(x)$, а тому степінь $f_1(x)$ менший ніж степінь $g_1(x)$. Тепер із рівності (5) одержимо рівність

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{g_1(x)f_2(x)+g_2(x)f_1(x)}{g_1(x)g_2(x)} =$$

$$= \frac{g_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} + \frac{g_2(x)f_1(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)},$$

у правій частині якої стоять правильні дроби. Теорему доведено. □

Методом математичної індукції теорему 3 нескладно узагальнити на випадок, коли знаменник правильного раціонального дробу розкладається у добуток довільного натурального числа взаємно простих множників.

Методом математичної індукції теорему 3 нескладно узагальнити на випадок, коли знаменник правильного раціонального дробу розкладається у добуток довільного натурального числа взаємно простих множників. Тобто справджується наступна теорема.

Методом математичної індукції теорему 3 нескладно узагальнити на випадок, коли знаменник правильного раціонального дробу розкладається у добуток довільного натурального числа взаємно простих множників. Тобто справджується наступна теорема.

### Теорема 4

*Якщо* $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\ldots$, $g_n(x)$ *— попарно взаємно прості многочлени над полем* $P$

Методом математичної індукції теорему 3 нескладно узагальнити на випадок, коли знаменник правильного раціонального дробу розкладається у добуток довільного натурального числа взаємно простих множників. Тобто справджується наступна теорема.

### Теорема 4

*Якщо* $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\ldots$, $g_n(x)$ *— попарно взаємно прості многочлени над полем* $P$ *і*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)}$$

*— правильний раціональний дріб над цим полем,*

Методом математичної індукції теорему 3 нескладно узагальнити на випадок, коли знаменник правильного раціонального дробу розкладається у добуток довільного натурального числа взаємно простих множників. Тобто справджується наступна теорема.

### Теорема 4

*Якщо* $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\ldots$, $g_n(x)$ *— попарно взаємно прості многочлени над полем* $P$ *і*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)}$$

*— правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці* $P[x]$ *є такі многочлени* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$,

Методом математичної індукції теорему 3 нескладно узагальнити на випадок, коли знаменник правильного раціонального дробу розкладається у добуток довільного натурального числа взаємно простих множників. Тобто справджується наступна теорема.

### Теорема 4

*Якщо* $g_1(x)$, $g_2(x)$, $\ldots$, $g_n(x)$ *— попарно взаємно прості многочлени над полем* $P$ *і*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)}$$

*— правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці* $P[x]$ *є такі многочлени* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots$, $f_n(x)$, *що*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \cdots + \frac{f_n(x)}{g_n(x)},$$

Методом математичної індукції теорему 3 нескладно узагальнити на випадок, коли знаменник правильного раціонального дробу розкладається у добуток довільного натурального числа взаємно простих множників. Тобто справджується наступна теорема.

**Теорема 4**

*Якщо $g_1(x)$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$ — попарно взаємно прості многочлени над полем $P$ і*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)}$$

*— правильний раціональний дріб над цим полем, то в кільці $P[x]$ є такі многочлени $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, що*

$$\frac{f(x)}{g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} + \frac{f_2(x)}{g_2(x)} + \cdots + \frac{f_n(x)}{g_n(x)},$$

*причому кожний дріб $\frac{f_i(x)}{g_i(x)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — правильний.*

## Означення 7

Правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$

## Означення 7

Правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ називається елементарним над полем P,

## Означення 7

Правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ називається елементарним над полем P, якщо його знаменник $g(x)$ є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$,

### Означення 7

Правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ називається елементарним над полем P, якщо його знаменник $g(x)$ є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p^k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$,

## Означення 7

Правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ називається елементарним над полем P, якщо його знаменник $g(x)$ є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p^k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$, а степінь чисельника $f(x)$ менший ніж степінь $p(x)$.

## Означення 7

Правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ називається **елементарним над полем P**, якщо його знаменник $g(x)$ є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p^k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$, а степінь чисельника $f(x)$ менший ніж степінь $p(x)$.

## Теорема 5

*Довільний правильний раціональний дріб над полем $P$ можна представити у вигляді суми елементарних дробів.*

## Означення 7

Правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ називається елементарним над полем P, якщо його знаменник $g(x)$ є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p^k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$, а степінь чисельника $f(x)$ менший ніж степінь $p(x)$.

## Теорема 5

*Довільний правильний раціональний дріб над полем $P$ можна представити у вигляді суми елементарних дробів.*

## Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний правильний раціональний дріб над полем $P$.

## Означення 7

Правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ називається елементарним над полем P, якщо його знаменник $g(x)$ є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p^k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$, а степінь чисельника $f(x)$ менший ніж степінь $p(x)$.

## Теорема 5

*Довільний правильний раціональний дріб над полем $P$ можна представити у вигляді суми елементарних дробів.*

## Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний правильний раціональний дріб над полем $P$. Якщо знаменник цього дробу незвідний над полем $P$,

### Означення 7

Правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ називається елементарним над полем P, якщо його знаменник $g(x)$ є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p^k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$, а степінь чисельника $f(x)$ менший ніж степінь $p(x)$.

### Теорема 5

*Довільний правильний раціональний дріб над полем $P$ можна представити у вигляді суми елементарних дробів.*

### Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний правильний раціональний дріб над полем $P$. Якщо знаменник цього дробу незвідний над полем $P$, то цей дріб уже елементарний.

## Означення 7

Правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ називається **елементарним над полем Р**, якщо його знаменник $g(x)$ є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p^k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$, а степінь чисельника $f(x)$ менший ніж степінь $p(x)$.

## Теорема 5

*Довільний правильний раціональний дріб над полем $P$ можна представити у вигляді суми елементарних дробів.*

## Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний правильний раціональний дріб над полем $P$. Якщо знаменник цього дробу незвідний над полем $P$, то цей дріб уже елементарний. Якщо многочлен $g(x)$ — звідний над полем $P$,

## Означення 7

Правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ називається **елементарним над полем P**, якщо його знаменник $g(x)$ є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p^k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$, а степінь чисельника $f(x)$ менший ніж степінь $p(x)$.

## Теорема 5

*Довільний правильний раціональний дріб над полем $P$ можна представити у вигляді суми елементарних дробів.*

## Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний правильний раціональний дріб над полем $P$. Якщо знаменник цього дробу незвідний над полем $P$, то цей дріб уже елементарний. Якщо многочлен $g(x)$ — звідний над полем $P$, то розкладемо його у добуток незвідних над полем $P$ множників:

## Означення 7

Правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)} \in P(x)$ називається елементарним над полем P, якщо його знаменник $g(x)$ є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p^k(x)$ $(k \in \mathbb{N})$, а степінь чисельника $f(x)$ менший ніж степінь $p(x)$.

## Теорема 5

*Довільний правильний раціональний дріб над полем $P$ можна представити у вигляді суми елементарних дробів.*

## Доведення.

Нехай $\frac{f(x)}{g(x)}$ — довільний правильний раціональний дріб над полем $P$. Якщо знаменник цього дробу незвідний над полем $P$, то цей дріб уже елементарний. Якщо многочлен $g(x)$ — звідний над полем $P$, то розкладемо його у добуток незвідних над полем $P$ множників:

$$g(x) = p_1^{k_1}(x) p_2^{k_2}(x) \cdots p_s^{k_s}(x).$$

**Доведення.**

Оскільки $p_1(x), p_2(x), \ldots, p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими,

**Доведення.**

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, ..., $p_s^{k_s}(x)$.

## Доведення.

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, ..., $p_s^{k_s}(x)$. Тоді за теоремою 4 маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \cdots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}, \qquad (6)$$

## Доведення.

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\dots$, $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, $\dots$, $p_s^{k_s}(x)$. Тоді за теоремою 4 маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \cdots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}, \qquad (6)$$

де $\frac{f_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}$ — правильний дріб $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ s)$.

## Доведення.

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, ..., $p_s^{k_s}(x)$. Тоді за теоремою 4 маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \cdots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}, \qquad (6)$$

де $\frac{f_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}$ — правильний дріб $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, s)$.
З огляду на рівність (6) теорему досить для випадку,

## Доведення.

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, ..., $p_s^{k_s}(x)$. Тоді за теоремою 4 маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \cdots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}, \tag{6}$$

де $\frac{f_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}$ — правильний дріб $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

З огляду на рівність (6) теорему досить для випадку, коли правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ має знаменник, який є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$,

## Доведення.

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, ..., $p_s^{k_s}(x)$. Тоді за теоремою 4 маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \cdots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}, \qquad (6)$$

де $\frac{f_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}$ — правильний дріб $(i = 1, 2, \dots, s)$.

З огляду на рівність (6) теорему досить для випадку, коли правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ має знаменник, який є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p(x)^k$ $(k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2)$.

## Доведення.

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, ..., $p_s^{k_s}(x)$. Тоді за теоремою 4 маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \cdots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}, \qquad (6)$$

де $\frac{f_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}$ — правильний дріб $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

З огляду на рівність (6) теорему досить для випадку, коли правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ має знаменник, який є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p(x)^k$ $(k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2)$.

Розглянемо правильний дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$,

## Доведення.

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, $\ldots$, $p_s^{k_s}(x)$. Тоді за теоремою 4 маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \cdots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}, \qquad (6)$$

де $\frac{f_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}$ — правильний дріб $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

З огляду на рівність (6) теорему досить для випадку, коли правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ має знаменник, який є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p(x)^k$ $(k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2)$.

Розглянемо правильний дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$, де $p(x)$ — незвідний многочлен,

## Доведення.

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, ..., $p_s^{k_s}(x)$. Тоді за теоремою 4 маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \cdots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}, \qquad (6)$$

де $\frac{f_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}$ — правильний дріб $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ s)$.

З огляду на рівність (6) теорему досить для випадку, коли правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ має знаменник, який є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p(x)^k$ $(k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2)$.

Розглянемо правильний дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$, де $p(x)$ — незвідний многочлен, $k$ — деяке відмінне від одиниці натуральне число.

## Доведення.

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, $\ldots$, $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, $\ldots$, $p_s^{k_s}(x)$. Тоді за теоремою 4 маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \cdots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}, \qquad (6)$$

де $\frac{f_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}$ — правильний дріб $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

З огляду на рівність (6) теорему досить для випадку, коли правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ має знаменник, який є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p(x)^k$ $(k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2)$.

Розглянемо правильний дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$, де $p(x)$ — незвідний многочлен, $k$ — деяке відмінне від одиниці натуральне число. Поділимо $f(x)$ на $p^{k-1}(x)$,

## Доведення.

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, ..., $p_s^{k_s}(x)$. Тоді за теоремою 4 маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \cdots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}, \qquad (6)$$

де $\frac{f_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}$ — правильний дріб $(i = 1, 2, \dots, s)$.

З огляду на рівність (6) теорему досить для випадку, коли правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ має знаменник, який є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p(x)^k$ $(k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2)$.

Розглянемо правильний дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$, де $p(x)$ — незвідний многочлен, $k$ — деяке відмінне від одиниці натуральне число. Поділимо $f(x)$ на $p^{k-1}(x)$, застосовуючи алгоритм ділення з остачею.

## Доведення.

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, ..., $p_s^{k_s}(x)$. Тоді за теоремою 4 маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \cdots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}, \qquad (6)$$

де $\frac{f_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}$ — правильний дріб $(i = 1, 2, \ldots, s)$.
З огляду на рівність (6) теорему досить для випадку, коли правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ має знаменник, який є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p(x)^k$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$.
Розглянемо правильний дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$, де $p(x)$ — незвідний многочлен, $k$ — деяке відмінне від одиниці натуральне число. Поділимо $f(x)$ на $p^{k-1}(x)$, застосовуючи алгоритм ділення з остачею. Одержимо

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + r_1(x), \qquad (7)$$

## Доведення.

Оскільки $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_s(x)$ як попарно різні незвідні многочлени є попарно взаємно простими, то такими є і многочлени $p_1^{k_1}(x)$, $p_2^{k_2}(x)$, ..., $p_s^{k_s}(x)$. Тоді за теоремою 4 маємо

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)}{p_1^{k_1}(x)p_2^{k_2}(x)\cdots p_s^{k_s}(x)} = \frac{f_1(x)}{p_1^{k_1}(x)} + \frac{f_2(x)}{p_2^{k_2}(x)} + \cdots + \frac{f_s(x)}{p_s^{k_s}(x)}, \qquad (6)$$

де $\frac{f_i(x)}{p_i^{k_i}(x)}$ — правильний дріб $(i = 1, 2, \ldots, s)$.

З огляду на рівність (6) теорему досить для випадку, коли правильний раціональний дріб $\frac{f(x)}{g(x)}$ має знаменник, який є степенем деякого незвідного над полем $P$ многочлена $p(x)$, тобто $g(x) = p(x)^k$ $(k \in \mathbb{N}, k \geq 2)$.

Розглянемо правильний дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$, де $p(x)$ — незвідний многочлен, $k$ — деяке відмінне від одиниці натуральне число. Поділимо $f(x)$ на $p^{k-1}(x)$, застосовуючи алгоритм ділення з остачею. Одержимо

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + r_1(x), \qquad (7)$$

де $r_1(x)$ — многочлен степеня, меншого ніж степінь $p^{k-1}(x)$.

## Доведення.

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$.

## Доведення.

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$

## Доведення.

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$,

## Доведення.

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$, а тому степінь правої частини рівності (7),

**Доведення.**

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$, а тому степінь правої частини рівності (7), а, отже, і $f(x)$, був би не менший ніж степінь $p^k(x)$.

**Доведення.**

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$, а тому степінь правої частини рівності (7), а, отже, і $f(x)$, був би не менший ніж степінь $p^k(x)$. Останнє суперечить тому, що дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$ — правильний.

## Доведення.

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$, а тому степінь правої частини рівності (7), а, отже, і $f(x)$, був би не менший ніж степінь $p^k(x)$. Останнє суперечить тому, що дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$ — правильний.

Якщо $3 \leq k$, то поділимо остачу $r_1(x)$ на $p^{k-2}(x)$,

## Доведення.

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$, а тому степінь правої частини рівності (7), а, отже, і $f(x)$, був би не менший ніж степінь $p^k(x)$. Останнє суперечить тому, що дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$ — правильний.

Якщо $3 \leq k$, то поділимо остачу $r_1(x)$ на $p^{k-2}(x)$, матимемо

$$r_1(x) = p^{k-2}(x)u_2(x) + r_2(x),$$

## Доведення.

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$, а тому степінь правої частини рівності (7), а, отже, і $f(x)$, був би не менший ніж степінь $p^k(x)$. Останнє суперечить тому, що дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$ — правильний.

Якщо $3 \leq k$, то поділимо остачу $r_1(x)$ на $p^{k-2}(x)$, матимемо

$$r_1(x) = p^{k-2}(x)u_2(x) + r_2(x),$$

де $r_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь многочлена $p^{k-2}(x)$,

## Доведення.

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$, а тому степінь правої частини рівності (7), а, отже, і $f(x)$, був би не менший ніж степінь $p^k(x)$. Останнє суперечить тому, що дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$ — правильний.

Якщо $3 \leq k$, то поділимо остачу $r_1(x)$ на $p^{k-2}(x)$, матимемо

$$r_1(x) = p^{k-2}(x)u_2(x) + r_2(x),$$

де $r_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь многочлена $p^{k-2}(x)$, а $u_2(x)$, аналогічно як у попередньому випадку, многочлен, степінь якого менший за степінь $p(x)$

## Доведення.

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$, а тому степінь правої частини рівності (7), а, отже, і $f(x)$, був би не менший ніж степінь $p^k(x)$. Останнє суперечить тому, що дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$ — правильний.

Якщо $3 \leq k$, то поділимо остачу $r_1(x)$ на $p^{k-2}(x)$, матимемо

$$r_1(x) = p^{k-2}(x)u_2(x) + r_2(x),$$

де $r_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь многочлена $p^{k-2}(x)$, а $u_2(x)$, аналогічно як у попередньому випадку, многочлен, степінь якого менший за степінь $p(x)$ і т. д.

## Доведення.

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$, а тому степінь правої частини рівності (7), а, отже, і $f(x)$, був би не менший ніж степінь $p^k(x)$. Останнє суперечить тому, що дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$ — правильний.

Якщо $3 \leq k$, то поділимо остачу $r_1(x)$ на $p^{k-2}(x)$, матимемо

$$r_1(x) = p^{k-2}(x)u_2(x) + r_2(x),$$

де $r_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь многочлена $p^{k-2}(x)$, а $u_2(x)$, аналогічно як у попередньому випадку, многочлен, степінь якого менший за степінь $p(x)$ і т. д. У результаті одержимо рівності:

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + r_1(x),$$

## Доведення.

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$, а тому степінь правої частини рівності (7), а, отже, і $f(x)$, був би не менший ніж степінь $p^k(x)$. Останнє суперечить тому, що дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$ — правильний.

Якщо $3 \leq k$, то поділимо остачу $r_1(x)$ на $p^{k-2}(x)$, матимемо

$$r_1(x) = p^{k-2}(x)u_2(x) + r_2(x),$$

де $r_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь многочлена $p^{k-2}(x)$, а $u_2(x)$, аналогічно як у попередньому випадку, многочлен, степінь якого менший за степінь $p(x)$ і т. д. У результаті одержимо рівності:

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + r_1(x),$$
$$r_1(x) = p^{k-2}(x)u_2(x) + r_2(x),$$

## Доведення.

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$, а тому степінь правої частини рівності (7), а, отже, і $f(x)$, був би не менший ніж степінь $p^k(x)$. Останнє суперечить тому, що дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$ — правильний.

Якщо $3 \leq k$, то поділимо остачу $r_1(x)$ на $p^{k-2}(x)$, матимемо

$$r_1(x) = p^{k-2}(x)u_2(x) + r_2(x),$$

де $r_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь многочлена $p^{k-2}(x)$, а $u_2(x)$, аналогічно як у попередньому випадку, многочлен, степінь якого менший за степінь $p(x)$ і т. д. У результаті одержимо рівності:

$$\begin{aligned} f(x) &= p^{k-1}(x)u_1(x) + r_1(x), \\ r_1(x) &= p^{k-2}(x)u_2(x) + r_2(x), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{k-2}(x) &= p(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x), \end{aligned}$$

## Доведення.

Степінь частки $u_1(x)$ менший за степінь $p(x)$. Оскільки у протилежному випадку степінь добутку $p^{k-1}(x)u_1(x)$ був би не менший за степінь $p^k(x)$, а тому степінь правої частини рівності (7), а, отже, і $f(x)$, був би не менший ніж степінь $p^k(x)$. Останнє суперечить тому, що дріб $\frac{f(x)}{p^k(x)}$ — правильний.

Якщо $3 \leq k$, то поділимо остачу $r_1(x)$ на $p^{k-2}(x)$, матимемо

$$r_1(x) = p^{k-2}(x)u_2(x) + r_2(x),$$

де $r_2(x)$ — многочлен степеня меншого ніж степінь многочлена $p^{k-2}(x)$, а $u_2(x)$, аналогічно як у попередньому випадку, многочлен, степінь якого менший за степінь $p(x)$ і т. д. У результаті одержимо рівності:

$$\begin{aligned} f(x) &= p^{k-1}(x)u_1(x) + r_1(x), \\ r_1(x) &= p^{k-2}(x)u_2(x) + r_2(x), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{k-2}(x) &= p(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x), \end{aligned} \tag{8}$$

де нагадаємо $u_1(x), u_2(x), \dots, u_{k-1}(x), r_{k-1}(x)$ — многочлена, степінь яких менший ніж степінь $p(x)$.

## Доведення.

З рівностей (8) випливає, що

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + p^{k-2}(x)u_2(x) + \dots + p(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x).$$

## Доведення.

З рівностей (8) випливає, що

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + p^{k-2}(x)u_2(x) + \cdots + p(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x).$$

Звідси

$$\frac{f(x)}{p^k(x)} =$$

## Доведення.

З рівностей (8) випливає, що

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + p^{k-2}(x)u_2(x) + \cdots + p(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x).$$

Звідси

$$\frac{f(x)}{p^k(x)} = \frac{p^{k-1}(x)u_1(x)+p^{k-2}(x)u_2(x)+\cdots+p(x)u_{k-1}(x)+r_{k-1}(x)}{p^k(x)} =$$

## Доведення.

З рівностей (8) випливає, що

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + p^{k-2}(x)u_2(x) + \cdots + p(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x).$$

Звідси

$$\frac{f(x)}{p^k(x)} = \frac{p^{k-1}(x)u_1(x)+p^{k-2}(x)u_2(x)+\cdots+p(x)u_{k-1}(x)+r_{k-1}(x)}{p^k(x)} =$$

$$= \frac{p^{k-1}(x)u_1(x)}{p^k(x)} + \frac{p^{k-2}(x)u_2(x)}{p^k(x)} + \cdots + \frac{p(x)u_{k-1}(x)}{p^k(x)} + \frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)}$$

## Доведення.

З рівностей (8) випливає, що

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + p^{k-2}(x)u_2(x) + \cdots + p(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x).$$

Звідси

$$\frac{f(x)}{p^k(x)} = \frac{p^{k-1}(x)u_1(x)+p^{k-2}(x)u_2(x)+\cdots+p(x)u_{k-1}(x)+r_{k-1}(x)}{p^k(x)} =$$

$$= \frac{p^{k-1}(x)u_1(x)}{p^k(x)} + \frac{p^{k-2}(x)u_2(x)}{p^k(x)} + \cdots + \frac{p(x)u_{k-1}(x)}{p^k(x)} + \frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)} =$$

$$= \frac{u_1(x)}{p(x)} + \frac{u_2(x)}{p^2(x)} + \cdots + \frac{u_{k-1}(x)}{p^{k-1}(x)} + \frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)},$$

## Доведення.

З рівностей (8) випливає, що

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + p^{k-2}(x)u_2(x) + \cdots + p(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x).$$

Звідси

$$\frac{f(x)}{p^k(x)} = \frac{p^{k-1}(x)u_1(x)+p^{k-2}(x)u_2(x)+\cdots+p(x)u_{k-1}(x)+r_{k-1}(x)}{p^k(x)} =$$

$$= \frac{p^{k-1}(x)u_1(x)}{p^k(x)} + \frac{p^{k-2}(x)u_2(x)}{p^k(x)} + \cdots + \frac{p(x)u_{k-1}(x)}{p^k(x)} + \frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)} =$$

$$= \frac{u_1(x)}{p(x)} + \frac{u_2(x)}{p^2(x)} + \cdots + \frac{u_{k-1}(x)}{p^{k-1}(x)} + \frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)},$$

де $\frac{u_i(x)}{p^j(x)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, $\frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)}$ є елементарними раціональними дробами.

## Доведення.

З рівностей (8) випливає, що

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + p^{k-2}(x)u_2(x) + \cdots + p(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x).$$

Звідси

$$\frac{f(x)}{p^k(x)} = \frac{p^{k-1}(x)u_1(x)+p^{k-2}(x)u_2(x)+\cdots+p(x)u_{k-1}(x)+r_{k-1}(x)}{p^k(x)} =$$

$$= \frac{p^{k-1}(x)u_1(x)}{p^k(x)} + \frac{p^{k-2}(x)u_2(x)}{p^k(x)} + \cdots + \frac{p(x)u_{k-1}(x)}{p^k(x)} + \frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)} =$$

$$= \frac{u_1(x)}{p(x)} + \frac{u_2(x)}{p^2(x)} + \cdots + \frac{u_{k-1}(x)}{p^{k-1}(x)} + \frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)},$$

де $\frac{u_i(x)}{p^j(x)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, $\frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)}$ є елементарними раціональними дробами. Теорему доведено. □

## Доведення.

З рівностей (8) випливає, що

$$f(x) = p^{k-1}(x)u_1(x) + p^{k-2}(x)u_2(x) + \cdots + p(x)u_{k-1}(x) + r_{k-1}(x).$$

Звідси

$$\frac{f(x)}{p^k(x)} = \frac{p^{k-1}(x)u_1(x)+p^{k-2}(x)u_2(x)+\cdots+p(x)u_{k-1}(x)+r_{k-1}(x)}{p^k(x)} =$$

$$= \frac{p^{k-1}(x)u_1(x)}{p^k(x)} + \frac{p^{k-2}(x)u_2(x)}{p^k(x)} + \cdots + \frac{p(x)u_{k-1}(x)}{p^k(x)} + \frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)} =$$

$$= \frac{u_1(x)}{p(x)} + \frac{u_2(x)}{p^2(x)} + \cdots + \frac{u_{k-1}(x)}{p^{k-1}(x)} + \frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)},$$

де $\frac{u_i(x)}{p^j(x)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k-1)$, $\frac{r_{k-1}(x)}{p^k(x)}$ є елементарними раціональними дробами. Теорему доведено. □

## Зауваження 3

Можна довести, що розклад правильного раціонального дробу в суму елементарних раціональних дробів є однозначним з точністю до порядку слідування доданків.

## Приклад 1.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем дійсних чисел раціональний дріб
$$\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}.$$

## Приклад 1.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем дійсних чисел раціональний дріб

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27}.$$

***Розв'язання.*** Розкладемо знаменник даного в умові раціонального дробу у добуток незвідних многочленів над полем дійсних чисел:

## Приклад 1.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем дійсних чисел раціональний дріб
$$\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}.$$

***Розв'язання.*** Розкладемо знаменник даного в умові раціонального дробу у добуток незвідних многочленів над полем дійсних чисел:
$$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9).$$

## Приклад 1.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем дійсних чисел раціональний дріб
$$\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}.$$

***Розв'язання.*** Розкладемо знаменник даного в умові раціонального дробу у добуток незвідних многочленів над полем дійсних чисел:
$$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9).$$
Раціональний дріб $\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}$ є правильним,

## Приклад 1.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем дійсних чисел раціональний дріб
$$\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}.$$

***Розв'язання.*** Розкладемо знаменник даного в умові раціонального дробу у добуток незвідних многочленів над полем дійсних чисел:
$$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9).$$
Раціональний дріб $\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}$ є правильним, а тому за теоремами 3 і 5 його можна представити у вигляді суми елементарних дробів

## Приклад 1.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем дійсних чисел раціональний дріб
$$\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}.$$

***Розв'язання.*** Розкладемо знаменник даного в умові раціонального дробу у добуток незвідних многочленів над полем дійсних чисел:
$$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9).$$

Раціональний дріб $\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}$ є правильним, а тому за теоремами 3 і 5 його можна представити у вигляді суми елементарних дробів
$$\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}=\frac{f(x)}{x-3}+\frac{g(x)}{x^2+3x+9},$$

## Приклад 1.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем дійсних чисел раціональний дріб
$$\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}.$$

***Розв'язання.*** Розкладемо знаменник даного в умові раціонального дробу у добуток незвідних многочленів над полем дійсних чисел:
$$x^3-27=(x-3)(x^2+3x+9).$$
Раціональний дріб $\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}$ є правильним, а тому за теоремами 3 і 5 його можна представити у вигляді суми елементарних дробів
$$\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}=\frac{f(x)}{x-3}+\frac{g(x)}{x^2+3x+9},$$
де $f(x)$, $g(x)$ — деякі многочлени над полем $\mathbb{R}$, степені яких відповідно менші за 1 і 2.

## Приклад 1.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем дійсних чисел раціональний дріб

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27}.$$

***Розв'язання.*** Розкладемо знаменник даного в умові раціонального дробу у добуток незвідних многочленів над полем дійсних чисел:

$$x^3 - 27 = (x - 3)(x^2 + 3x + 9).$$

Раціональний дріб $\frac{3x^2+4x+15}{x^3-27}$ є правильним, а тому за теоремами 3 і 5 його можна представити у вигляді суми елементарних дробів

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27} = \frac{f(x)}{x - 3} + \frac{g(x)}{x^2 + 3x + 9},$$

де $f(x)$, $g(x)$ — деякі многочлени над полем $\mathbb{R}$, степені яких відповідно менші за 1 і 2. На відміну від доведення теорем 3 і 5, многочлени $f(x)$ і $g(x)$ будемо шукати, так званим, методом невизначених коефіцієнтів.

Нехай $f(x) = a$,

Нехай $f(x) = a$, $g(x) = bx + c$,

Нехай $f(x) = a$, $g(x) = bx + c$, де $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$.

Нехай $f(x) = a$, $g(x) = bx + c$, де $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. Із рівності

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27} = \frac{a}{x - 3} + \frac{bx + c}{x^2 + 3x + 9}$$

Нехай $f(x) = a$, $g(x) = bx + c$, де $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. Із рівності

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27} = \frac{a}{x - 3} + \frac{bx + c}{x^2 + 3x + 9}$$

слідує, що

$$3x^2 + 4x + 15 = a(x^2 + 3x + 9) + (bx + c)(x - 3).$$

Нехай $f(x) = a$, $g(x) = bx + c$, де $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. Із рівності

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27} = \frac{a}{x-3} + \frac{bx + c}{x^2 + 3x + 9}$$

слідує, що

$$3x^2 + 4x + 15 = a(x^2 + 3x + 9) + (bx + c)(x - 3).$$

Звідси дістаємо

$$3x^2 + 4x + 15 =$$

Нехай $f(x) = a$, $g(x) = bx + c$, де $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. Із рівності

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27} = \frac{a}{x - 3} + \frac{bx + c}{x^2 + 3x + 9}$$

слідує, що

$$3x^2 + 4x + 15 = a(x^2 + 3x + 9) + (bx + c)(x - 3).$$

Звідси дістаємо

$$3x^2 + 4x + 15 = (a + b)x^2 + (3a - 3b + c)x + (9a - 3c).$$

Нехай $f(x) = a$, $g(x) = bx + c$, де $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. Із рівності

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27} = \frac{a}{x-3} + \frac{bx + c}{x^2 + 3x + 9}$$

слідує, що

$$3x^2 + 4x + 15 = a(x^2 + 3x + 9) + (bx + c)(x - 3).$$

Звідси дістаємо

$$3x^2 + 4x + 15 = (a + b)x^2 + (3a - 3b + c)x + (9a - 3c).$$

Отже,

$$a + b = 3,$$

Нехай $f(x) = a$, $g(x) = bx + c$, де $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. Із рівності

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27} = \frac{a}{x-3} + \frac{bx + c}{x^2 + 3x + 9}$$

слідує, що

$$3x^2 + 4x + 15 = a(x^2 + 3x + 9) + (bx + c)(x - 3).$$

Звідси дістаємо

$$3x^2 + 4x + 15 = (a + b)x^2 + (3a - 3b + c)x + (9a - 3c).$$

Отже,

$$a + b = 3, \qquad 3a - 3b + c = 4,$$

Нехай $f(x) = a$, $g(x) = bx + c$, де $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. Із рівності

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27} = \frac{a}{x - 3} + \frac{bx + c}{x^2 + 3x + 9}$$

слідує, що

$$3x^2 + 4x + 15 = a(x^2 + 3x + 9) + (bx + c)(x - 3).$$

Звідси дістаємо

$$3x^2 + 4x + 15 = (a + b)x^2 + (3a - 3b + c)x + (9a - 3c).$$

Отже,

$$a + b = 3, \qquad 3a - 3b + c = 4, \qquad 9a - 3c = 15.$$

Нехай $f(x) = a$, $g(x) = bx + c$, де $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. Із рівності

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27} = \frac{a}{x-3} + \frac{bx + c}{x^2 + 3x + 9}$$

слідує, що

$$3x^2 + 4x + 15 = a(x^2 + 3x + 9) + (bx + c)(x - 3).$$

Звідси дістаємо

$$3x^2 + 4x + 15 = (a + b)x^2 + (3a - 3b + c)x + (9a - 3c).$$

Отже,

$$a + b = 3, \qquad 3a - 3b + c = 4, \qquad 9a - 3c = 15.$$

Розв'язавши цю систему лінійних рівнянь з невідомими $a$, $b$, $c$,

Нехай $f(x) = a$, $g(x) = bx + c$, де $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. Із рівності

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27} = \frac{a}{x-3} + \frac{bx + c}{x^2 + 3x + 9}$$

слідує, що

$$3x^2 + 4x + 15 = a(x^2 + 3x + 9) + (bx + c)(x - 3).$$

Звідси дістаємо

$$3x^2 + 4x + 15 = (a + b)x^2 + (3a - 3b + c)x + (9a - 3c).$$

Отже,

$$a + b = 3, \qquad 3a - 3b + c = 4, \qquad 9a - 3c = 15.$$

Розв'язавши цю систему лінійних рівнянь з невідомими $a$, $b$, $c$, одержимо $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$.

Нехай $f(x) = a$, $g(x) = bx + c$, де $a$, $b$, $c \in \mathbb{R}$. Із рівності

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27} = \frac{a}{x - 3} + \frac{bx + c}{x^2 + 3x + 9}$$

слідує, що

$$3x^2 + 4x + 15 = a(x^2 + 3x + 9) + (bx + c)(x - 3).$$

Звідси дістаємо

$$3x^2 + 4x + 15 = (a + b)x^2 + (3a - 3b + c)x + (9a - 3c).$$

Отже,

$$a + b = 3, \qquad 3a - 3b + c = 4, \qquad 9a - 3c = 15.$$

Розв'язавши цю систему лінійних рівнянь з невідомими $a$, $b$, $c$, одержимо $a = 2$, $b = 1$, $c = 1$. Таким чином,

$$\frac{3x^2 + 4x + 15}{x^3 - 27} = \frac{2}{x - 3} + \frac{x + 1}{x^2 + 3x + 9}.$$

## Приклад 2.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем комплексних чисел раціональний дріб $\frac{8}{x^3+4x}$.

## Приклад 2.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем комплексних чисел раціональний дріб $\frac{8}{x^3+4x}$.

***Розв'язання.*** Аналогічно, як і у попередньому прикладі розкладемо знаменник, даного в умові раціонального дробу, у добуток незвідних многочленів над полем комплексних чисел:

## Приклад 2.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем комплексних чисел раціональний дріб $\frac{8}{x^3+4x}$.

***Розв'язання.*** Аналогічно, як і у попередньому прикладі розкладемо знаменник, даного в умові раціонального дробу, у добуток незвідних многочленів над полем комплексних чисел:

$$x^3 + 4x = x(x + 2i)(x - 2i).$$

## Приклад 2.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем комплексних чисел раціональний дріб $\frac{8}{x^3+4x}$.

***Розв'язання.*** Аналогічно, як і у попередньому прикладі розкладемо знаменник, даного в умові раціонального дробу, у добуток незвідних многочленів над полем комплексних чисел:

$$x^3 + 4x = x(x + 2i)(x - 2i).$$

Тоді

$$\frac{8}{x^3 + 4x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 2i} + \frac{c}{x - 2i}$$

для деяких комплексних чисел $a$, $b$, $c$.

## Приклад 2.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем комплексних чисел раціональний дріб $\frac{8}{x^3+4x}$.

***Розв'язання.*** Аналогічно, як і у попередньому прикладі розкладемо знаменник, даного в умові раціонального дробу, у добуток незвідних многочленів над полем комплексних чисел:

$$x^3 + 4x = x(x + 2i)(x - 2i).$$

Тоді

$$\frac{8}{x^3 + 4x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 2i} + \frac{c}{x - 2i}$$

для деяких комплексних чисел $a$, $b$, $c$. Звідси

$$8 = a(x + 2i)(x - 2i) + bx(x - 2i) + cx(x + 2i).$$

## Приклад 2.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем комплексних чисел раціональний дріб $\frac{8}{x^3+4x}$.

***Розв'язання.*** Аналогічно, як і у попередньому прикладі розкладемо знаменник, даного в умові раціонального дробу, у добуток незвідних многочленів над полем комплексних чисел:

$$x^3 + 4x = x(x+2i)(x-2i).$$

Тоді

$$\frac{8}{x^3+4x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2i} + \frac{c}{x-2i}$$

для деяких комплексних чисел $a$, $b$, $c$. Звідси

$$8 = a(x+2i)(x-2i) + bx(x-2i) + cx(x+2i).$$

Послідовно підставимо у праву частину цієї рівності замість $x$ числові значення $0$, $-2i$, $2i$.

## Приклад 2.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем комплексних чисел раціональний дріб $\frac{8}{x^3+4x}$.

***Розв'язання.*** Аналогічно, як і у попередньому прикладі розкладемо знаменник, даного в умові раціонального дробу, у добуток незвідних многочленів над полем комплексних чисел:

$$x^3 + 4x = x(x + 2i)(x - 2i).$$

Тоді

$$\frac{8}{x^3 + 4x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 2i} + \frac{c}{x - 2i}$$

для деяких комплексних чисел $a$, $b$, $c$. Звідси

$$8 = a(x + 2i)(x - 2i) + bx(x - 2i) + cx(x + 2i).$$

Послідовно підставимо у праву частину цієї рівності замість $x$ числові значення $0$, $-2i$, $2i$. Одержимо рівності

$$8 = 4a,$$

## Приклад 2.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем комплексних чисел раціональний дріб $\frac{8}{x^3+4x}$.

***Розв'язання.*** Аналогічно, як і у попередньому прикладі розкладемо знаменник, даного в умові раціонального дробу, у добуток незвідних многочленів над полем комплексних чисел:

$$x^3 + 4x = x(x + 2i)(x - 2i).$$

Тоді

$$\frac{8}{x^3 + 4x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 2i} + \frac{c}{x - 2i}$$

для деяких комплексних чисел $a$, $b$, $c$. Звідси

$$8 = a(x + 2i)(x - 2i) + bx(x - 2i) + cx(x + 2i).$$

Послідовно підставимо у праву частину цієї рівності замість $x$ числові значення $0$, $-2i$, $2i$. Одержимо рівності

$$8 = 4a, \qquad 8 = -8b,$$

## Приклад 2.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем комплексних чисел раціональний дріб $\frac{8}{x^3+4x}$.

***Розв'язання.*** Аналогічно, як і у попередньому прикладі розкладемо знаменник, даного в умові раціонального дробу, у добуток незвідних многочленів над полем комплексних чисел:

$$x^3 + 4x = x(x + 2i)(x - 2i).$$

Тоді

$$\frac{8}{x^3 + 4x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 2i} + \frac{c}{x - 2i}$$

для деяких комплексних чисел $a$, $b$, $c$. Звідси

$$8 = a(x + 2i)(x - 2i) + bx(x - 2i) + cx(x + 2i).$$

Послідовно підставимо у праву частину цієї рівності замість $x$ числові значення $0$, $-2i$, $2i$. Одержимо рівності

$$8 = 4a, \qquad 8 = -8b, \qquad 8 = -8c.$$

## Приклад 2.

Розкласти в суму елементарних дробів над полем комплексних чисел раціональний дріб $\frac{8}{x^3+4x}$.

***Розв'язання.*** Аналогічно, як і у попередньому прикладі розкладемо знаменник, даного в умові раціонального дробу, у добуток незвідних многочленів над полем комплексних чисел:

$$x^3 + 4x = x(x + 2i)(x - 2i).$$

Тоді

$$\frac{8}{x^3 + 4x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x + 2i} + \frac{c}{x - 2i}$$

для деяких комплексних чисел $a$, $b$, $c$. Звідси

$$8 = a(x + 2i)(x - 2i) + bx(x - 2i) + cx(x + 2i).$$

Послідовно підставимо у праву частину цієї рівності замість $x$ числові значення $0$, $-2i$, $2i$. Одержимо рівності

$$8 = 4a, \qquad 8 = -8b, \qquad 8 = -8c.$$

Звідси $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$.

Отже,

$$\frac{8}{x^3+4x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+2i} - \frac{1}{x-2i}$$

є шуканим розкладом на елементарні раціональні дроби над полем комплексних чисел.