Ізоморфізм лінійних просторів

Лектор — доц. Шапочка Ігор

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

16 лютого 2023 року

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P.

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L'

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається **лінійним відображенням** лінійного простору L у лінійний простір L',

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a + b) = \varphi(a) + \varphi(b),$$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L'$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L над полем P у лінійний простір L' над цим же полем

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L над полем P у лінійний простір L' над цим же полем називається ізоморфізмом,

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L над полем P у лінійний простір L' над цим же полем називається ізоморфізмом, якщо φ є лінійним відображенням лінійних просторів

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається **лінійним відображенням** лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L над полем P у лінійний простір L' над цим же полем називається **ізоморфізмом**, якщо φ є лінійним відображенням лінійних просторів і φ є бієктивним відображення множини L у множину L'.

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L над полем P у лінійний простір L' над цим же полем називається ізоморфізмом, якщо φ є лінійним відображенням лінійних просторів і φ є бієктивним відображення множини L у множину L'.

Означення 3

Лінійний простір L над полем P

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається **лінійним відображенням** лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L над полем P у лінійний простір L' над цим же полем називається **ізоморфізмом**, якщо φ є лінійним відображенням лінійних просторів і φ є бієктивним відображення множини L у множину L'.

Означення 3

Лінійний простір L над полем P називається **ізоморфним**

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L над полем P у лінійний простір L' над цим же полем називається ізоморфізмом, якщо φ є лінійним відображенням лінійних просторів і φ є бієктивним відображення множини L у множину L'.

Означення 3

Лінійний простір L над полем P називається ізоморфним лінійному простору L' над полем P,

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L над полем P у лінійний простір L' над цим же полем називається ізоморфізмом, якщо φ є лінійним відображенням лінійних просторів і φ є бієктивним відображення множини L у множину L'.

Означення 3

Лінійний простір L над полем P називається ізоморфним лінійному простору L' над полем P, якщо існує ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів.

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L над полем P у лінійний простір L' над цим же полем називається ізоморфізмом, якщо φ є лінійним відображенням лінійних просторів і φ є бієктивним відображення множини L у множину L'.

Означення 3

Лінійний простір L над полем P називається ізоморфним лінійному простору L' над полем P, якщо існує ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів.

Запис $L \cong L'$

Означення 1

Нехай L і L' є лінійними просторами над одним і тим же полем P. Відображення $\varphi : L \to L'$ множини L у множину L' називається лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', якщо справджуються наступні рівності:

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b), \qquad \varphi(\alpha \cdot a) = \alpha \cdot \varphi(a)$$

для будь-яких векторів a, b із L та будь-якого елемента α поля P.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L'$ лінійного простору L над полем P у лінійний простір L' над цим же полем називається ізоморфізмом, якщо φ є лінійним відображенням лінійних просторів і φ є бієктивним відображення множини L у множину L'.

Означення 3

Лінійний простір L над полем P називається ізоморфним лінійному простору L' над полем P, якщо існує ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів.

Запис $L \cong L'$ означає, що лінійний простір L ізоморфний лінійному простору L'.

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$.

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} .$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$.

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} .$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$.

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто
$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$
Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що
$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$
є ізоморфізмом.

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u + v) =$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто
$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$
Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що
$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$
є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності
$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big)$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta)$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta)$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$

$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$

$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta, \gamma \cdot 0)\big)$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u+v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta, \gamma \cdot 0)\big) = (\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta)$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta, \gamma \cdot 0)\big) = (\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta) = \gamma \cdot (\alpha, \beta)$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u+v) = \psi\big((\alpha+\gamma, \beta+\delta, 0)\big) = (\alpha+\gamma, \beta+\delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma\cdot\alpha, \gamma\cdot\beta, \gamma\cdot 0)\big) = (\gamma\cdot\alpha, \gamma\cdot\beta) = \gamma\cdot(\alpha, \beta) = \gamma\cdot\psi(u).$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta, \gamma \cdot 0)\big) = (\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta) = \gamma \cdot (\alpha, \beta) = \gamma \cdot \psi(u).$$

- ψ є бієктивним відображенням,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто
$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$
Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що
$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$
є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності
$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta, \gamma \cdot 0)\big) = (\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta) = \gamma \cdot (\alpha, \beta) = \gamma \cdot \psi(u).$$
- ψ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного вектора $w = (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta, \gamma \cdot 0)\big) = (\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta) = \gamma \cdot (\alpha, \beta) = \gamma \cdot \psi(u).$$

- ψ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного вектора $w = (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ існує прообраз $\psi^{-1}(w)$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто
$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$
Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що
$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$
є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності
$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta, \gamma \cdot 0)\big) = (\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta) = \gamma \cdot (\alpha, \beta) = \gamma \cdot \psi(u).$$
- ψ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного вектора $w = (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ існує прообраз $\psi^{-1}(w) = (\zeta, \eta, 0) \in L$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta, \gamma \cdot 0)\big) = (\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta) = \gamma \cdot (\alpha, \beta) = \gamma \cdot \psi(u).$$

- ψ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного вектора $w = (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ існує прообраз $\psi^{-1}(w) = (\zeta, \eta, 0) \in L$ (це означає, що ψ є сюр'єктивним відображенням);

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta, \gamma \cdot 0)\big) = (\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta) = \gamma \cdot (\alpha, \beta) = \gamma \cdot \psi(u).$$

- ψ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного вектора $w = (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ існує прообраз $\psi^{-1}(w) = (\zeta, \eta, 0) \in L$ (це означає, що ψ є сюр'єктивним відображенням);
  - для будь-яких різних векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто
$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$
Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що
$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$
є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності
$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta, \gamma \cdot 0)\big) = (\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta) = \gamma \cdot (\alpha, \beta) = \gamma \cdot \psi(u).$$
- ψ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного вектора $w = (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ існує прообраз $\psi^{-1}(w) = (\zeta, \eta, 0) \in L$ (це означає, що ψ є сюр'єктивним відображенням);
  - для будь-яких різних векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta, \gamma \cdot 0)\big) = (\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta) = \gamma \cdot (\alpha, \beta) = \gamma \cdot \psi(u).$$

- ψ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного вектора $w = (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ існує прообраз $\psi^{-1}(w) = (\zeta, \eta, 0) \in L$ (це означає, що ψ є сюр'єктивним відображенням);
  - для будь-яких різних векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L $\psi(u) =$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u+v) = \psi\big((\alpha+\gamma, \beta+\delta, 0)\big) = (\alpha+\gamma, \beta+\delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma\cdot\alpha, \gamma\cdot\beta, \gamma\cdot 0)\big) = (\gamma\cdot\alpha, \gamma\cdot\beta) = \gamma\cdot(\alpha, \beta) = \gamma\cdot\psi(u).$$

- ψ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного вектора $w = (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ існує прообраз $\psi^{-1}(w) = (\zeta, \eta, 0) \in L$ (це означає, що ψ є сюр'єктивним відображенням);
  - для будь-яких різних векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L $\psi(u) = (\alpha, \beta)$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто

$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що

$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$

є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності

$$\psi(u + v) = \psi\big((\alpha + \gamma, \beta + \delta, 0)\big) = (\alpha + \gamma, \beta + \delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta, \gamma \cdot 0)\big) = (\gamma \cdot \alpha, \gamma \cdot \beta) = \gamma \cdot (\alpha, \beta) = \gamma \cdot \psi(u).$$

- ψ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного вектора $w = (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ існує прообраз $\psi^{-1}(w) = (\zeta, \eta, 0) \in L$ (це означає, що ψ є сюр'єктивним відображенням);
  - для будь-яких різних векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L $\psi(u) = (\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta)$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто
$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$
Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що
$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$
є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності
$$\psi(u+v) = \psi\big((\alpha+\gamma, \beta+\delta, 0)\big) = (\alpha+\gamma, \beta+\delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma\cdot\alpha, \gamma\cdot\beta, \gamma\cdot 0)\big) = (\gamma\cdot\alpha, \gamma\cdot\beta) = \gamma\cdot(\alpha, \beta) = \gamma\cdot\psi(u).$$
- ψ є бієктивним відображенням, бо
    - для довільного вектора $w = (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ існує прообраз $\psi^{-1}(w) = (\zeta, \eta, 0) \in L$ (це означає, що ψ є сюр'єктивним відображенням);
    - для будь-яких різних векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L $\psi(u) = (\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta) = \psi(v)$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Нехай L — підмножина дійсного тривимірного простору $\mathbb{R}^3$, яка складається з усіх дійсних тривимірних векторів, остання компонента яких дорівнює нулю, тобто
$$L = \{(\alpha, \beta, 0) \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$
Очевидно, L є замкненою підмножиною відносно дій в $\mathbb{R}^3$. Тому L є лінійним простором над полем $\mathbb{R}$. Лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^2$. Відображення $\psi : L \to \mathbb{R}^2$ таке, що
$$\psi\big((\alpha, \beta, 0)\big) = (\alpha, \beta), \qquad (\alpha, \beta, 0) \in L,$$
є ізоморфізмом. Це так через те, що

- ψ є лінійним відображенням, бо для будь-яких векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L справджуються рівності
$$\psi(u+v) = \psi\big((\alpha+\gamma, \beta+\delta, 0)\big) = (\alpha+\gamma, \beta+\delta) =$$
$$= (\alpha, \beta) + (\gamma, \delta) = \psi(u) + \psi(v),$$
$$\psi(\gamma \cdot u) = \psi\big((\gamma\cdot\alpha, \gamma\cdot\beta, \gamma\cdot 0)\big) = (\gamma\cdot\alpha, \gamma\cdot\beta) = \gamma\cdot(\alpha, \beta) = \gamma\cdot\psi(u).$$
- ψ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного вектора $w = (\zeta, \eta) \in \mathbb{R}^2$ існує прообраз $\psi^{-1}(w) = (\zeta, \eta, 0) \in L$ (це означає, що ψ є сюр'єктивним відображенням);
  - для будь-яких різних векторів $u = (\alpha, \beta, 0)$, $v = (\gamma, \delta, 0)$ із L $\psi(u) = (\alpha, \beta) \neq (\gamma, \delta) = \psi(v)$ (це означає, що φ є ін'єктивним відображенням).

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b,$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів $a, b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a + b) =$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a + b) = 2^{a+b}$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) =$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) = 2^{\gamma a}$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів $a, b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких $a, b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) = 2^{\gamma a} = (2^a)^\gamma$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) = 2^{\gamma a} = (2^a)^\gamma = \gamma \cdot 2^a$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) = 2^{\gamma a} = (2^a)^\gamma = \gamma \cdot 2^a = \gamma \cdot \varphi(a)$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких $a,\ b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a + b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) = 2^{\gamma a} = (2^a)^\gamma = \gamma \cdot 2^a = \gamma \cdot \varphi(a) = \gamma\varphi(a).$$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких $a,\ b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) = 2^{\gamma a} = (2^a)^\gamma = \gamma \cdot 2^a = \gamma \cdot \varphi(a) = \gamma\varphi(a).$$

- φ є бієктивним відображенням,

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) = 2^{\gamma a} = (2^a)^\gamma = \gamma \cdot 2^a = \gamma \cdot \varphi(a) = \gamma\varphi(a).$$

- φ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного додатного дійсного числа $u \in \mathbb{R}^+$ існує прообраз $\varphi^{-1}(u)$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) = 2^{\gamma a} = (2^a)^\gamma = \gamma \cdot 2^a = \gamma \cdot \varphi(a) = \gamma\varphi(a).$$

- φ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного додатного дійсного числа $u \in \mathbb{R}^+$ існує прообраз $\varphi^{-1}(u) = \log_2 u \in \mathbb{R}^1$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) = 2^{\gamma a} = (2^a)^\gamma = \gamma \cdot 2^a = \gamma \cdot \varphi(a) = \gamma\varphi(a).$$

- φ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного додатного дійсного числа $u \in \mathbb{R}^+$ існує прообраз $\varphi^{-1}(u) = \log_2 u \in \mathbb{R}^1$ (це означає, що φ є сюр'єктивним відображенням);

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких $a,\ b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) = 2^{\gamma a} = (2^a)^\gamma = \gamma \cdot 2^a = \gamma \cdot \varphi(a) = \gamma\varphi(a).$$

- φ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного додатного дійсного числа $u \in \mathbb{R}^+$ існує прообраз $\varphi^{-1}(u) = \log_2 u \in \mathbb{R}^1$ (це означає, що φ є сюр'єктивним відображенням);
  - для будь-яких різних дійсних чисел $a,\ b \in \mathbb{R}^1$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів a, $b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких a, $b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) = 2^{\gamma a} = (2^a)^\gamma = \gamma \cdot 2^a = \gamma \cdot \varphi(a) = \gamma\varphi(a).$$

- φ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного додатного дійсного числа $u \in \mathbb{R}^+$ існує прообраз $\varphi^{-1}(u) = \log_2 u \in \mathbb{R}^1$ (це означає, що φ є сюр'єктивним відображенням);
  - для будь-яких різних дійсних чисел a, $b \in \mathbb{R}^1$ $\varphi(a) = 2^a \neq 2^b = \varphi(b)$

Приклад ізоморфних лінійних просторів.

Дійсний одновимірний векторний простір $\mathbb{R}^1$ є ізоморфним лінійному простору $\mathbb{R}^+$ всіх додатних дійсних чисел над полем дійсних чисел, в якому дія додавання векторів та множення елементів поля на вектор визначені наступним чином:

$$a + b = a \cdot b, \qquad \gamma \cdot a = a^\gamma$$

для довільних векторів $a,\ b \in \mathbb{R}^+$ та числа $\gamma \in \mathbb{R}$.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^+$ таке, що $\varphi(x) = 2^x$, де $x \in \mathbb{R}^1$, є ізоморфізмом, оскільки:

- φ є лінійним відображенням, бо для будь-яких $a,\ b \in \mathbb{R}^1$ і будь-якого $\gamma \in \mathbb{R}$ справджуються рівності

$$\varphi(a+b) = 2^{a+b} = 2^a \cdot 2^b = 2^a + 2^b = \varphi(a) + \varphi(b),$$

$$\varphi(\gamma \cdot a) = 2^{\gamma a} = (2^a)^\gamma = \gamma \cdot 2^a = \gamma \cdot \varphi(a) = \gamma\varphi(a).$$

- φ є бієктивним відображенням, бо
  - для довільного додатного дійсного числа $u \in \mathbb{R}^+$ існує прообраз $\varphi^{-1}(u) = \log_2 u \in \mathbb{R}^1$ (це означає, що φ є сюр'єктивним відображенням);
  - для будь-яких різних дійсних чисел $a,\ b \in \mathbb{R}^1$ $\varphi(a) = 2^a \neq 2^b = \varphi(b)$ (це означає, що φ є ін'єктивним відображенням).

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними»,

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P,

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

1. будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі,

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

1. будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі, тобто

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

1. будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі, тобто

$$L \cong L$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

1. будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі, тобто

$$L \cong L$$

(рефлексивність);

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

1. будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі, тобто
$$L \cong L$$
(рефлексивність);
2. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем,

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

1. будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі, тобто
$$L \cong L$$
(рефлексивність);
2. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, L' ізоморфний L,

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

1. будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі, тобто
$$L \cong L$$
(рефлексивність);
2. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, L' ізоморфний L, тобто
$$L \cong L' \Leftrightarrow L' \cong L$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

1. будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі, тобто
$$L \cong L$$
(рефлексивність);
2. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, L' ізоморфний L, тобто
$$L \cong L' \Leftrightarrow L' \cong L$$
(симетричність);

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

1. будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі, тобто
$$L \cong L$$
(рефлексивність);
2. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, L' ізоморфний L, тобто
$$L \cong L' \Leftrightarrow L' \cong L$$
(симетричність);
3. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем,

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

1. будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі, тобто
$$L \cong L$$
(рефлексивність);
2. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, L' ізоморфний L, тобто
$$L \cong L' \Leftrightarrow L' \cong L$$
(симетричність);
3. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, а він у свою чергу ізоморфний лінійному простору L'' над полем P,

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

1. будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі, тобто

$$L \cong L$$

(рефлексивність);

2. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, L' ізоморфний L, тобто

$$L \cong L' \Leftrightarrow L' \cong L$$

(симетричність);

3. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, а він у свою чергу ізоморфний лінійному простору L'' над полем P, то L ізоморфний L'',

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

1. будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі, тобто
$$L \cong L$$
(рефлексивність);
2. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, L' ізоморфний L, тобто
$$L \cong L' \Leftrightarrow L' \cong L$$
(симетричність);
3. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, а він у свою чергу ізоморфний лінійному простору L'' над полем P, то L ізоморфний L'', тобто
$$L \cong L',\ L' \cong L'' \Rightarrow L \cong L''$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що відношення «бути ізоморфними», задане на множині всіх лінійних просторів над одним і тим же полем P, має такі властивості:

1. будь-який лінійний простір L над полем P ізоморфний собі, тобто
$$L \cong L$$
(рефлексивність);
2. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, L' ізоморфний L, тобто
$$L \cong L' \Leftrightarrow L' \cong L$$
(симетричність);
3. якщо лінійний простір L над полем P ізоморфний лінійному простору L' над цим же полем, а він у свою чергу ізоморфний лінійному простору L'' над полем P, то L ізоморфний L'', тобто
$$L \cong L',\ L' \cong L'' \Rightarrow L \cong L''$$
(транзитивність).

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— система векторів лінійного простору* L.

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— система векторів лінійного простору* L. *Для будь-яких елементів* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Доведення.

Доведемо теорему методом математичної індукції

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— система векторів лінійного простору* L. *Для будь-яких елементів* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Доведення.

Доведемо теорему методом математичної індукції за числом s векторів у заданій системі векторів.

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Доведення.

Доведемо теорему методом математичної індукції за числом s векторів у заданій системі векторів. Якщо $s = 1$, то правильність твердження теореми одразу слідує із означення лінійного відображення:

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— система векторів лінійного простору* L. *Для будь-яких елементів* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Доведення.

Доведемо теорему методом математичної індукції за числом s векторів у заданій системі векторів. Якщо $s = 1$, то правильність твердження теореми одразу слідує із означення лінійного відображення: $\varphi(\gamma_1 a_1) = \gamma_1 \varphi(a_1)$ для довільного $\gamma_1 \in P$.

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Доведення.

Доведемо теорему методом математичної індукції за числом s векторів у заданій системі векторів. Якщо $s = 1$, то правильність твердження теореми одразу слідує із означення лінійного відображення: $\varphi(\gamma_1 a_1) = \gamma_1 \varphi(a_1)$ для довільного $\gamma_1 \in P$.

Припустимо, що твердження теореми справджується для для будь-якої системи векторів, що складається менш ніж k векторів,

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Доведення.

Доведемо теорему методом математичної індукції за числом s векторів у заданій системі векторів. Якщо $s = 1$, то правильність твердження теореми одразу слідує із означення лінійного відображення: $\varphi(\gamma_1 a_1) = \gamma_1 \varphi(a_1)$ для довільного $\gamma_1 \in P$.

Припустимо, що твердження теореми справджується для для будь-якої системи векторів, що складається менш ніж k векторів, тобто за умови, що $s < k$.

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— система векторів лінійного простору* L. *Для будь-яких елементів* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ *поля* P *справджується рівність*

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Доведення.

Доведемо теорему методом математичної індукції за числом s векторів у заданій системі векторів. Якщо $s = 1$, то правильність твердження теореми одразу слідує із означення лінійного відображення: $\varphi(\gamma_1 a_1) = \gamma_1 \varphi(a_1)$ для довільного $\gamma_1 \in P$.

Припустимо, що твердження теореми справджується для для будь-якої системи векторів, що складається менш ніж k векторів, тобто за умови, що $s < k$. Розглянемо систему із k векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лінійного простору L.

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Доведення.

Доведемо теорему методом математичної індукції за числом s векторів у заданій системі векторів. Якщо $s = 1$, то правильність твердження теореми одразу слідує із означення лінійного відображення: $\varphi(\gamma_1 a_1) = \gamma_1 \varphi(a_1)$ для довільного $\gamma_1 \in P$.

Припустимо, що твердження теореми справджується для для будь-якої системи векторів, що складається менш ніж k векторів, тобто за умови, що $s < k$. Розглянемо систему із k векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лінійного простору L. Тоді для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ поля P справджуються рівності

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k) =$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \dots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \dots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Доведення.

Доведемо теорему методом математичної індукції за числом s векторів у заданій системі векторів. Якщо $s = 1$, то правильність твердження теореми одразу слідує із означення лінійного відображення: $\varphi(\gamma_1 a_1) = \gamma_1 \varphi(a_1)$ для довільного $\gamma_1 \in P$.

Припустимо, що твердження теореми справджується для для будь-якої системи векторів, що складається менш ніж k векторів, тобто за умови, що $s < k$. Розглянемо систему із k векторів $a_1, a_2, \dots, a_k$ лінійного простору L. Тоді для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ поля P справджуються рівності

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_k a_k) = \varphi\left(\gamma_1 a_1 + (\gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_k a_k)\right)$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Доведення.

Доведемо теорему методом математичної індукції за числом s векторів у заданій системі векторів. Якщо $s = 1$, то правильність твердження теореми одразу слідує із означення лінійного відображення: $\varphi(\gamma_1 a_1) = \gamma_1 \varphi(a_1)$ для довільного $\gamma_1 \in P$.

Припустимо, що твердження теореми справджується для для будь-якої системи векторів, що складається менш ніж k векторів, тобто за умови, що $s < k$. Розглянемо систему із k векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лінійного простору L. Тоді для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ поля P справджуються рівності

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k) = \varphi\left(\gamma_1 a_1 + (\gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k)\right)$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \dots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \dots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Доведення.

Доведемо теорему методом математичної індукції за числом s векторів у заданій системі векторів. Якщо $s = 1$, то правильність твердження теореми одразу слідує із означення лінійного відображення: $\varphi(\gamma_1 a_1) = \gamma_1 \varphi(a_1)$ для довільного $\gamma_1 \in P$.
Припустимо, що твердження теореми справджується для для будь-якої системи векторів, що складається менш ніж k векторів, тобто за умови, що $s < k$. Розглянемо систему із k векторів $a_1, a_2, \dots, a_k$ лінійного простору L. Тоді для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ поля P справджуються рівності

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_k a_k) = \varphi\left(\gamma_1 a_1 + (\gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_k a_k)\right) =$$

$$= \varphi(\gamma_1 a_1) + \varphi\left(\gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_k a_k\right)$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \dots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \dots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Доведення.

Доведемо теорему методом математичної індукції за числом s векторів у заданій системі векторів. Якщо $s = 1$, то правильність твердження теореми одразу слідує із означення лінійного відображення: $\varphi(\gamma_1 a_1) = \gamma_1 \varphi(a_1)$ для довільного $\gamma_1 \in P$.

Припустимо, що твердження теореми справджується для для будь-якої системи векторів, що складається менш ніж k векторів, тобто за умови, що $s < k$. Розглянемо систему із k векторів $a_1, a_2, \dots, a_k$ лінійного простору L. Тоді для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ поля P справджуються рівності

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_k a_k) = \varphi\left(\gamma_1 a_1 + (\gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_k a_k)\right) =$$

$$= \varphi(\gamma_1 a_1) + \varphi\left(\gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_k a_k\right) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \dots + \gamma_k \varphi(a_k).$$

Теорема 1

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ поля P справджується рівність

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s).$$

Доведення.

Доведемо теорему методом математичної індукції за числом s векторів у заданій системі векторів. Якщо $s = 1$, то правильність твердження теореми одразу слідує із означення лінійного відображення: $\varphi(\gamma_1 a_1) = \gamma_1 \varphi(a_1)$ для довільного $\gamma_1 \in P$.
Припустимо, що твердження теореми справджується для для будь-якої системи векторів, що складається менш ніж k векторів, тобто за умови, що $s < k$. Розглянемо систему із k векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$ лінійного простору L. Тоді для будь-яких елементів $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k$ поля P справджуються рівності

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k) = \varphi\left(\gamma_1 a_1 + (\gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k)\right) =$$

$$= \varphi(\gamma_1 a_1) + \varphi\left(\gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_k a_k\right) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_k \varphi(a_k).$$

Теорема доведена. $\square$

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $\bar{0}$ *— нульовий вектор лінійного простору* L*,*

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L, а $\bar{0}'$ — нульовий вектор лінійного простору L'.

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $\bar{0}$ *— нульовий вектор лінійного простору* L*, а* $\bar{0}'$ *— нульовий вектор лінійного простору* L'*. Тоді* $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$*.*

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $\bar{0}$ *— нульовий вектор лінійного простору* L*, а* $\bar{0}'$ *— нульовий вектор лінійного простору* L'*. Тоді* $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$*.*

Доведення.

Оскільки φ є лінійним відображенням, то

$$\varphi(\bar{0}) =$$

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $\bar{0}$ *— нульовий вектор лінійного простору* L*, а* $\bar{0}'$ *— нульовий вектор лінійного простору* L'*. Тоді* $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$*.*

Доведення.

Оскільки φ є лінійним відображенням, то

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(0 \cdot \bar{0})$$

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L, а $\bar{0}'$ — нульовий вектор лінійного простору L'. Тоді $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$.

Доведення.

Оскільки φ є лінійним відображенням, то

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot \varphi(\bar{0})$$

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L, а $\bar{0}'$ — нульовий вектор лінійного простору L'. Тоді $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$.

Доведення.

Оскільки φ є лінійним відображенням, то

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

$\square$

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $\bar{0}$ *— нульовий вектор лінійного простору* L*, а* $\bar{0}'$ *— нульовий вектор лінійного простору* L'*. Тоді* $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$*.*

Доведення.

Оскільки φ є лінійним відображенням, то

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

□

Теорема 3

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є ізоморфізмом лінійних просторів* L *і* L' *над полем* P*,*

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $\bar{0}$ *— нульовий вектор лінійного простору* L*, а* $\bar{0}'$ *— нульовий вектор лінійного простору* L'*. Тоді* $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$*.*

Доведення.

Оскільки φ є лінійним відображенням, то

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

$\square$

Теорема 3

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є ізоморфізмом лінійних просторів* L *і* L' *над полем* P*, і* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— система векторів лінійного простору* L*.*

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $\bar{0}$ *— нульовий вектор лінійного простору* L*, а* $\bar{0}'$ *— нульовий вектор лінійного простору* L'*. Тоді* $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$*.*

Доведення.

Оскільки φ є лінійним відображенням, то

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

□

Теорема 3

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є ізоморфізмом лінійних просторів* L *і* L' *над полем* P*, і* $a_1, a_2, \dots, a_s$ *— система векторів лінійного простору* L*. Справджуються наступні твердження:*

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L, а $\bar{0}'$ — нульовий вектор лінійного простору L'. Тоді $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$.

Доведення.

Оскільки φ є лінійним відображенням, то

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

□

Теорема 3

Нехай $\varphi : L \to L'$ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L' над полем P, і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Справджуються наступні твердження:

1. *система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною тоді і тільки тоді,*

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L, а $\bar{0}'$ — нульовий вектор лінійного простору L'. Тоді $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$.

Доведення.

Оскільки φ є лінійним відображенням, то

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

□

Теорема 3

Нехай $\varphi : L \to L'$ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L' над полем P, і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Справджуються наступні твердження:

1. *система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли система образів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ є лінійно залежною;*

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ є лінійним відображенням лінійного простору L у лінійний простір L' над одним і тим же полем P і $\bar{0}$ — нульовий вектор лінійного простору L, а $\bar{0}'$ — нульовий вектор лінійного простору L'. Тоді $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$.

Доведення.

Оскільки φ є лінійним відображенням, то

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

□

Теорема 3

Нехай $\varphi : L \to L'$ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L' над полем P, і $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L. Справджуються наступні твердження:

1. *система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли система образів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ є лінійно залежною;*
2. *система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — базис лінійного простору L тоді і тільки тоді,*

Теорема 2

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є лінійним відображенням лінійного простору* L *у лінійний простір* L' *над одним і тим же полем* P *і* $\bar{0}$ *— нульовий вектор лінійного простору* L, *а* $\bar{0}'$ *— нульовий вектор лінійного простору* L'. *Тоді* $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$.

Доведення.

Оскільки φ є лінійним відображенням, то

$$\varphi(\bar{0}) = \varphi(0 \cdot \bar{0}) = 0 \cdot \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

□

Теорема 3

Нехай $\varphi : L \to L'$ *є ізоморфізмом лінійних просторів* L *і* L' *над полем* P, *і* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— система векторів лінійного простору* L. *Справджуються наступні твердження:*

1. *система векторів* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *є лінійно залежною тоді і тільки тоді, коли система образів* $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ *є лінійно залежною;*
2. *система векторів* $a_1, a_2, \ldots, a_s$ *— базис лінійного простору* L *тоді і тільки тоді, коли система образів* $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ *— базис лінійного простору* L'.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$\gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s) =$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \dots + \gamma_s\varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s)$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0})$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

Отже, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, $a_2, \dots, a_s$ є лінійно залежною. Тоді існують елементи $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$ поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \dots + \gamma_s \varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

Отже, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2), \dots, \varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Нехай тепер навпаки,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

Отже, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Нехай тепер навпаки, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

Отже, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Нехай тепер навпаки, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

Отже, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Нехай тепер навпаки, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

Отже, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Нехай тепер навпаки, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Тоді

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s)$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

Отже, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Нехай тепер навпаки, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Тоді

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

Отже, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Нехай тепер навпаки, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Тоді

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Через те, що φ є ізоморфізмом,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, $\dots$, a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, $\dots$, γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \dots + \gamma_s\varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

Отже, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\dots$, $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Нехай тепер навпаки, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\dots$, $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, $\dots$, γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \dots + \gamma_s\varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Тоді

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s) = \gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \dots + \gamma_s\varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Через те, що φ є ізоморфізмом, а отже бієктивним відображенням, і

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

Отже, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Нехай тепер навпаки, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Тоді

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1 \varphi(a_1) + \gamma_2 \varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s \varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Через те, що φ є ізоморфізмом, а отже бієктивним відображенням, і $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

Отже, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Нехай тепер навпаки, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Тоді

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s) = \gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \cdots + \gamma_s\varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Через те, що φ є ізоморфізмом, а отже бієктивним відображенням, і $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$, то

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Припустимо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Із попередніх теорем про лінійні відображення слідує, що

$$\gamma_1\varphi(a_1)+\gamma_2\varphi(a_2)+\dots+\gamma_s\varphi(a_s) = \varphi(\gamma_1 a_1+\gamma_2 a_2+\dots+\gamma_s a_s) = \varphi(\bar{0}) = \bar{0}'.$$

Отже, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною.

Нехай тепер навпаки, система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ лінійного простору L' є лінійно залежною. Тоді існують елементи γ_1, γ_2, ..., γ_s поля P не всі рівні нулю такі, що

$$\gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \dots + \gamma_s\varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Тоді

$$\varphi(\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s) = \gamma_1\varphi(a_1) + \gamma_2\varphi(a_2) + \dots + \gamma_s\varphi(a_s) = \bar{0}'.$$

Через те, що φ є ізоморфізмом, а отже бієктивним відображенням, і $\varphi(\bar{0}) = \bar{0}'$, то

$$\gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s = \bar{0}.$$

Це означає, що система векторів a_1, a_2, ..., a_s є лінійно залежною.

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L.

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною.

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s,

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L.

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b'

Доведення.

Нехай тепер система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_s$, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'.

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L',

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора $b \in L$,

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора $b \in L$, образ якого $\varphi(b) = b'$.

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора $b \in L$, образ якого $\varphi(b) = b'$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$$

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора $b \in L$, образ якого $\varphi(b) = b'$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L.

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора $b \in L$, образ якого $\varphi(b) = b'$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді

$b' =$

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора $b \in L$, образ якого $\varphi(b) = b'$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді

$b' = \varphi(b)$

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора $b \in L$, образ якого $\varphi(b) = b'$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді

$b' = \varphi(b) = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s)$

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора $b \in L$, образ якого $\varphi(b) = b'$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді

$$b' = \varphi(b) = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s) = \beta_1 \varphi(a_1) + \beta_2 \varphi(a_2) + \cdots + \beta_s \varphi(a_s),$$

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора $b \in L$, образ якого $\varphi(b) = b'$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді

$$b' = \varphi(b) = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s) = \beta_1 \varphi(a_1) + \beta_2 \varphi(a_2) + \cdots + \beta_s \varphi(a_s),$$

що у свою чергу означає, що будь-який вектор лінійного простору L' є лінійною комбінацією системи векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$.

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора $b \in L$, образ якого $\varphi(b) = b'$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді

$$b' = \varphi(b) = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s) = \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \cdots + \beta_s\varphi(a_s),$$

що у свою чергу означає, що будь-який вектор лінійного простору L' є лінійною комбінацією системи векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$. Теорема доведена. □

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора $b \in L$, образ якого $\varphi(b) = b'$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді

$$b' = \varphi(b) = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s) = \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \cdots + \beta_s\varphi(a_s),$$

що у свою чергу означає, що будь-який вектор лінійного простору L' є лінійною комбінацією системи векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$. Теорема доведена. $\square$

Теорема 4 (класифікаційна теорема)

Нехай L та L' — скінченновимірні лінійні простори над полем P.

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора $b \in L$, образ якого $\varphi(b) = b'$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді

$$b' = \varphi(b) = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s) = \beta_1 \varphi(a_1) + \beta_2 \varphi(a_2) + \cdots + \beta_s \varphi(a_s),$$

що у свою чергу означає, що будь-який вектор лінійного простору L' є лінійною комбінацією системи векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$. Теорема доведена. $\square$

Теорема 4 (класифікаційна теорема)

Нехай L та L' — скінченновимірні лінійні простори над полем P. Тоді лінійний простір L ізоморфний лінійному простору L' тоді і тільки тоді,

Доведення.

Нехай тепер система векторів a_1, a_2, ..., a_s — базис лінійного простору L. Тоді за доведеним вище система образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ є лінійно незалежною. Оскільки у протилежному випадку була б лінійно залежною система векторів a_1, a_2, ..., a_s, що суперечило б тому, що вона є базисом L. Нехай b' — будь-який елемент лінійного простору L'. Із того, що φ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', слідує існування вектора $b \in L$, образ якого $\varphi(b) = b'$. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді

$$b' = \varphi(b) = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_s a_s) = \beta_1\varphi(a_1) + \beta_2\varphi(a_2) + \cdots + \beta_s\varphi(a_s),$$

що у свою чергу означає, що будь-який вектор лінійного простору L' є лінійною комбінацією системи векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$. Теорема доведена. □

Теорема 4 (класифікаційна теорема)

Нехай L та L' — скінченновимірні лінійні простори над полем P. Тоді лінійний простір L ізоморфний лінійному простору L' тоді і тільки тоді, коли розмірність лінійного простору L дорівнює розмірності лінійного простору L'.

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P,

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'.

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним.

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L'

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів.

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деякий базис лінійного простору L над полем P.

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_s — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\ldots$, $\varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'.

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай a_1, a_2, $\dots$, a_s — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\dots$, $\varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$.

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай a_1, a_2, $\dots$, a_s — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\dots$, $\varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$. Отже, $s = s'$.

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$. Отже, $s = s'$. Це доводить необхідність теореми.

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай a_1, a_2, $\dots$, a_s — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\dots$, $\varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$. Отже, $s = s'$. Це доводить необхідність теореми.

Нехай тепер $\dim L_P = \dim L'_P$,

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$. Отже, $s = s'$. Це доводить необхідність теореми.

Нехай тепер $\dim L_P = \dim L'_P$, тобто $s = s'$.

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай a_1, a_2, $\dots$, a_s — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\dots$, $\varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$. Отже, $s = s'$. Це доводить необхідність теореми.

Нехай тепер $\dim L_P = \dim L'_P$, тобто $s = s'$. Розглянемо деякі базиси a_1, a_2, $\dots$, a_s

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай a_1, a_2, $\dots$, a_s — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\dots$, $\varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$. Отже, $s = s'$. Це доводить необхідність теореми.
Нехай тепер $\dim L_P = \dim L'_P$, тобто $s = s'$. Розглянемо деякі базиси a_1, a_2, $\dots$, a_s та a'_1, a'_2, $\dots$, a'_s

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_s — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\ldots$, $\varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$. Отже, $s = s'$. Це доводить необхідність теореми.

Нехай тепер $\dim L_P = \dim L'_P$, тобто $s = s'$. Розглянемо деякі базиси a_1, a_2, $\ldots$, a_s та a'_1, a'_2, $\ldots$, a'_s лінійних просторів L і L'.

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай a_1, a_2, $\dots$, a_s — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\dots$, $\varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$. Отже, $s = s'$. Це доводить необхідність теореми.

Нехай тепер $\dim L_P = \dim L'_P$, тобто $s = s'$. Розглянемо деякі базиси a_1, a_2, $\dots$, a_s та a'_1, a'_2, $\dots$, a'_s лінійних просторів L і L'. Побудуємо відповідність ψ із лінійного простору L у лінійний простір L'

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$. Отже, $s = s'$. Це доводить необхідність теореми.

Нехай тепер $\dim L_P = \dim L'_P$, тобто $s = s'$. Розглянемо деякі базиси a_1, a_2, ..., a_s та a'_1, a'_2, ..., a'_s лінійних просторів L і L'. Побудуємо відповідність ψ із лінійного простору L у лінійний простір L' таким чином, що кожному вектору u із L ставиться у відповідність вектор u' із L',

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$. Отже, $s = s'$. Це доводить необхідність теореми.

Нехай тепер $\dim L_P = \dim L'_P$, тобто $s = s'$. Розглянемо деякі базиси a_1, a_2, ..., a_s та a'_1, a'_2, ..., a'_s лінійних просторів L і L'. Побудуємо відповідність ψ із лінійного простору L у лінійний простір L' таким чином, що кожному вектору u із L ставиться у відповідність вектор u' із L', координатний рядок якого у базисі a'_1, a'_2, ..., a'_s дорівнює координатному рядку вектора u у базисі a_1, a_2, ..., a_s.

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$. Отже, $s = s'$. Це доводить необхідність теореми.

Нехай тепер $\dim L_P = \dim L'_P$, тобто $s = s'$. Розглянемо деякі базиси $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_s$ лінійних просторів L і L'. Побудуємо відповідність ψ із лінійного простору L у лінійний простір L' таким чином, що кожному вектору u із L ставиться у відповідність вектор u' із L', координатний рядок якого у базисі $a'_1, a'_2, \ldots, a'_s$ дорівнює координатному рядку вектора u у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Тобто, якщо

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s,$$

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1), \varphi(a_2), \ldots, \varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$. Отже, $s = s'$. Це доводить необхідність теореми.

Нехай тепер $\dim L_P = \dim L'_P$, тобто $s = s'$. Розглянемо деякі базиси $a_1, a_2, \ldots, a_s$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_s$ лінійних просторів L і L'. Побудуємо відповідність ψ із лінійного простору L у лінійний простір L' таким чином, що кожному вектору u із L ставиться у відповідність вектор u' із L', координатний рядок якого у базисі $a'_1, a'_2, \ldots, a'_s$ дорівнює координатному рядку вектора u у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_s$. Тобто, якщо

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s,$$

— розклад вектора u за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійного простору L, де $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s \in P$,

Доведення.

Нехай L та L' — ненульові скінченновимірні лінійні простори над полем P, відповідно розмірностей s і s'. У випадку нульових просторів твердження теореми є очевидним. Припустимо, що скінченновимірний лінійній простір L ізоморфний простору L' і $\varphi : L \to L'$ — ізоморфізм лінійних просторів. Нехай a_1, a_2, ..., a_s — деякий базис лінійного простору L над полем P. Тоді за попередньою теоремою система векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_s)$ — базис лінійного простору L'. Це означає, що $\dim L'_P = s$. Отже, $s = s'$. Це доводить необхідність теореми.

Нехай тепер $\dim L_P = \dim L'_P$, тобто $s = s'$. Розглянемо деякі базиси a_1, a_2, ..., a_s та a'_1, a'_2, ..., a'_s лінійних просторів L і L'. Побудуємо відповідність ψ із лінійного простору L у лінійний простір L' таким чином, що кожному вектору u із L ставиться у відповідність вектор u' із L', координатний рядок якого у базисі a'_1, a'_2, ..., a'_s дорівнює координатному рядку вектора u у базисі a_1, a_2, ..., a_s. Тобто, якщо

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s,$$

— розклад вектора u за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L, де γ_1, γ_2, ..., $\gamma_s \in P$, то

$$\psi(u) = \gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_s a'_s.$$

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує,

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L',

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням.

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням.

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L,

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P,

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s,$$

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L.

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u + v) =$$

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u + v) = \psi\big((\gamma_1 + \delta_1)a_1 + (\gamma_2 + \delta_2)a_2 + \cdots + (\gamma_s + \delta_s)a_s\big)$$

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u+v) = \psi\big((\gamma_1+\delta_1)a_1 + (\gamma_2+\delta_2)a_2 + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s\big) =$$

$$= (\gamma_1+\delta_1)a_1' + (\gamma_2+\delta_2)a_2' + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s'$$

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u+v) = \psi\big((\gamma_1+\delta_1)a_1 + (\gamma_2+\delta_2)a_2 + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s\big) =$$

$$= (\gamma_1+\delta_1)a_1' + (\gamma_2+\delta_2)a_2' + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s' =$$

$$= (\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_s a_s') + (\delta_1 a_1' + \delta_2 a_2' + \cdots + \delta_s a_s')$$

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u+v) = \psi\big((\gamma_1+\delta_1)a_1 + (\gamma_2+\delta_2)a_2 + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s\big) =$$

$$= (\gamma_1+\delta_1)a_1' + (\gamma_2+\delta_2)a_2' + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s' =$$

$$= (\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_s a_s') + (\delta_1 a_1' + \delta_2 a_2' + \cdots + \delta_s a_s') = \psi(u) + \psi(v),$$

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u+v) = \psi\big((\gamma_1+\delta_1)a_1 + (\gamma_2+\delta_2)a_2 + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s\big) =$$

$$= (\gamma_1+\delta_1)a_1' + (\gamma_2+\delta_2)a_2' + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s' =$$

$$= (\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_s a_s') + (\delta_1 a_1' + \delta_2 a_2' + \cdots + \delta_s a_s') = \psi(u) + \psi(v),$$

$$\psi(\alpha u) =$$

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_s лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u+v) = \psi\big((\gamma_1+\delta_1)a_1 + (\gamma_2+\delta_2)a_2 + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s\big) =$$

$$= (\gamma_1+\delta_1)a_1' + (\gamma_2+\delta_2)a_2' + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s' =$$

$$= (\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_s a_s') + (\delta_1 a_1' + \delta_2 a_2' + \cdots + \delta_s a_s') = \psi(u) + \psi(v),$$

$$\psi(\alpha u) = \psi\big((\alpha\gamma_1)a_1 + (\alpha\gamma_2)a_2 + \cdots + (\alpha\gamma_s)a_s\big)$$

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \dots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u+v) = \psi\big((\gamma_1+\delta_1)a_1 + (\gamma_2+\delta_2)a_2 + \dots + (\gamma_s+\delta_s)a_s\big) =$$

$$= (\gamma_1+\delta_1)a_1' + (\gamma_2+\delta_2)a_2' + \dots + (\gamma_s+\delta_s)a_s' =$$

$$= (\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \dots + \gamma_s a_s') + (\delta_1 a_1' + \delta_2 a_2' + \dots + \delta_s a_s') = \psi(u) + \psi(v),$$

$$\psi(\alpha u) = \psi\big((\alpha\gamma_1)a_1 + (\alpha\gamma_2)a_2 + \dots + (\alpha\gamma_s)a_s\big) =$$

$$= (\alpha\gamma_1)a_1' + (\alpha\gamma_2)a_2' + \dots + (\alpha\gamma_s)a_s'$$

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_s лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u+v) = \psi\big((\gamma_1+\delta_1)a_1 + (\gamma_2+\delta_2)a_2 + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s\big) =$$

$$= (\gamma_1+\delta_1)a_1' + (\gamma_2+\delta_2)a_2' + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s' =$$

$$= (\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_s a_s') + (\delta_1 a_1' + \delta_2 a_2' + \cdots + \delta_s a_s') = \psi(u) + \psi(v),$$

$$\psi(\alpha u) = \psi\big((\alpha\gamma_1)a_1 + (\alpha\gamma_2)a_2 + \cdots + (\alpha\gamma_s)a_s\big) =$$

$$= (\alpha\gamma_1)a_1' + (\alpha\gamma_2)a_2' + \cdots + (\alpha\gamma_s)a_s' = \alpha(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_s a_s')$$

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \dots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом a_1, a_2, ..., a_s лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u+v) = \psi\big((\gamma_1+\delta_1)a_1 + (\gamma_2+\delta_2)a_2 + \dots + (\gamma_s+\delta_s)a_s\big) =$$

$$= (\gamma_1+\delta_1)a_1' + (\gamma_2+\delta_2)a_2' + \dots + (\gamma_s+\delta_s)a_s' =$$

$$= (\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \dots + \gamma_s a_s') + (\delta_1 a_1' + \delta_2 a_2' + \dots + \delta_s a_s') = \psi(u) + \psi(v),$$

$$\psi(\alpha u) = \psi\big((\alpha\gamma_1)a_1 + (\alpha\gamma_2)a_2 + \dots + (\alpha\gamma_s)a_s\big) =$$

$$= (\alpha\gamma_1)a_1' + (\alpha\gamma_2)a_2' + \dots + (\alpha\gamma_s)a_s' = \alpha(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \dots + \gamma_s a_s') = \alpha\psi(u).$$

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u+v) = \psi\big((\gamma_1+\delta_1)a_1 + (\gamma_2+\delta_2)a_2 + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s\big) =$$

$$= (\gamma_1+\delta_1)a'_1 + (\gamma_2+\delta_2)a'_2 + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a'_s =$$

$$= (\gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_s a'_s) + (\delta_1 a'_1 + \delta_2 a'_2 + \cdots + \delta_s a'_s) = \psi(u) + \psi(v),$$

$$\psi(\alpha u) = \psi\big((\alpha\gamma_1)a_1 + (\alpha\gamma_2)a_2 + \cdots + (\alpha\gamma_s)a_s\big) =$$

$$= (\alpha\gamma_1)a'_1 + (\alpha\gamma_2)a'_2 + \cdots + (\alpha\gamma_s)a'_s = \alpha(\gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_s a'_s) = \alpha\psi(u).$$

Таким чином, ψ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L',

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_s лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u+v) = \psi\big((\gamma_1+\delta_1)a_1 + (\gamma_2+\delta_2)a_2 + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s\big) =$$

$$= (\gamma_1+\delta_1)a'_1 + (\gamma_2+\delta_2)a'_2 + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a'_s =$$

$$= (\gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_s a'_s) + (\delta_1 a'_1 + \delta_2 a'_2 + \cdots + \delta_s a'_s) = \psi(u) + \psi(v),$$

$$\psi(\alpha u) = \psi\big((\alpha\gamma_1)a_1 + (\alpha\gamma_2)a_2 + \cdots + (\alpha\gamma_s)a_s\big) =$$

$$= (\alpha\gamma_1)a'_1 + (\alpha\gamma_2)a'_2 + \cdots + (\alpha\gamma_s)a'_s = \alpha(\gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_s a'_s) = \alpha\psi(u).$$

Таким чином, ψ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', а тому $L \cong L'$.

Доведення.

Із теореми про однозначність розкладу вектора за базисом слідує, що відповідність ψ є відображенням лінійного простору L у лінійний простір L', до того ж бієктивним відображенням. Відображення ψ є лінійним відображенням. Дійсно, нехай u, v — будь-які вектори лінійного простору L, α — довільний елемент поля P, а

$$u = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_s a_s, \quad v = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_s a_s$$

— відповідно розклади векторів u і v за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_s$ лінійного простору L. Тоді:

$$\psi(u+v) = \psi\big((\gamma_1+\delta_1)a_1 + (\gamma_2+\delta_2)a_2 + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s\big) =$$

$$= (\gamma_1+\delta_1)a_1' + (\gamma_2+\delta_2)a_2' + \cdots + (\gamma_s+\delta_s)a_s' =$$

$$= (\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_s a_s') + (\delta_1 a_1' + \delta_2 a_2' + \cdots + \delta_s a_s') = \psi(u) + \psi(v),$$

$$\psi(\alpha u) = \psi\big((\alpha\gamma_1)a_1 + (\alpha\gamma_2)a_2 + \cdots + (\alpha\gamma_s)a_s\big) =$$

$$= (\alpha\gamma_1)a_1' + (\alpha\gamma_2)a_2' + \cdots + (\alpha\gamma_s)a_s' = \alpha(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_s a_s') = \alpha\psi(u).$$

Таким чином, ψ є ізоморфізмом лінійних просторів L і L', а тому $L \cong L'$. Теорема доведена. $\square$

Через те, що розмірність $\dim_P P^n$ n-вимірного векторного простору P^n над полем P дорівнює n,

Через те, що розмірність $\dim_P P^n$ n-вимірного векторного простору P^n над полем P дорівнює n, то із попередньої теореми одразу слідує наступне твердження.

Через те, що розмірність $\dim_P P^n$ n-вимірного векторного простору P^n над полем P дорівнює n, то із попередньої теореми одразу слідує наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P розмірності n.

Через те, що розмірність $\dim_P P^n$ n-вимірного векторного простору P^n над полем P дорівнює n, то із попередньої теореми одразу слідує наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P розмірності n. Тоді лінійний простір L ізоморфний n-вимірному векторному простору P^n

Через те, що розмірність $\dim_P P^n$ n-вимірного векторного простору P^n над полем P дорівнює n, то із попередньої теореми одразу слідує наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P розмірності n. Тоді лінійний простір L ізоморфний n-вимірному векторному простору P^n $(L \cong P^n)$.

Через те, що розмірність $\dim_P P^n$ n-вимірного векторного простору P^n над полем P дорівнює n, то із попередньої теореми одразу слідує наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P розмірності n. Тоді лінійний простір L ізоморфний n-вимірному векторному простору P^n $(L \cong P^n)$. Якщо $n \neq m$,

Через те, що розмірність $\dim_P P^n$ n-вимірного векторного простору P^n над полем P дорівнює n, то із попередньої теореми одразу слідує наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай L — ненульовий скінченновимірний лінійний простір над полем P розмірності n. Тоді лінійний простір L ізоморфний n-вимірному векторному простору P^n $(L \cong P^n)$. Якщо $n \neq m$, то векторний простір P^n не ізоморфний векторному простору P^m.