Підпростори лінійного простору. Дії над підпросторами

Лектор — доц. Шапочка Ігор

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

21 лютого 2023 року

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P.

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається **підпростором** L,

Означення 1

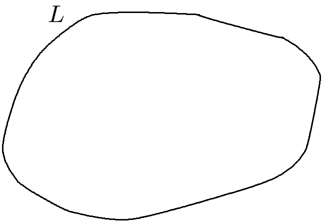
Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається підпростором L, якщо множина A є лінійним простором над полем P

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається **підпростором L**, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.

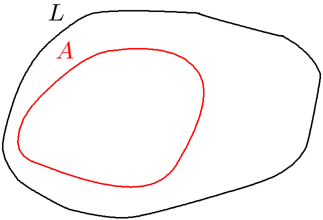
Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається **підпростором L**, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.



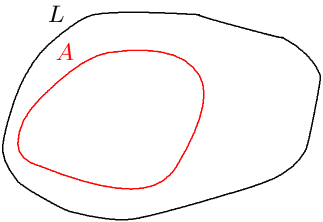
Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається підпростором L, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.



Означення 1

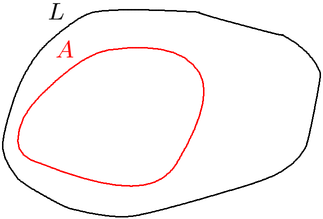
Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається **підпростором** L, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.



Теорема 1 (перша ознака підпростору)

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається **підпростором** L, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.

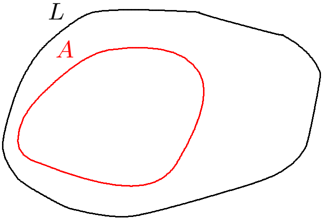


Теорема 1 (перша ознака підпростору)

Непорожня підмножина A

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається **підпростором** L, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.

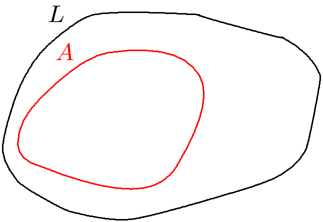


Теорема 1 (перша ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається **підпростором** L, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.

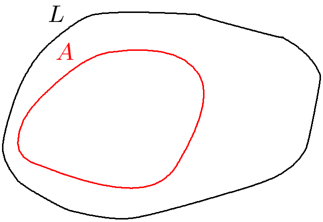


Теорема 1 (перша ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором в L

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається **підпростором** L, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.

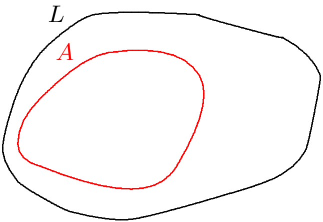


Теорема 1 (перша ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором в L тоді і тільки тоді,

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається підпростором L, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.

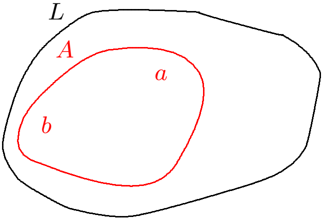


Теорема 1 (перша ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором в L тоді і тільки тоді, коли множина A є замкненою відносно дій над векторами.

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається **підпростором** L, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.

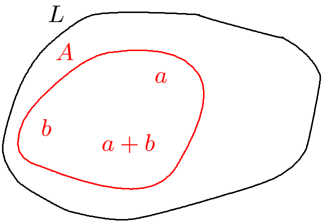


Теорема 1 (перша ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором в L тоді і тільки тоді, коли множина A є замкненою відносно дій над векторами.

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається підпростором L, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.

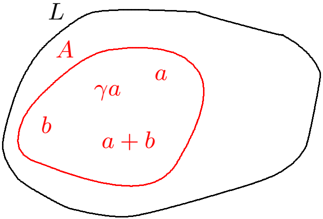


Теорема 1 (перша ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором в L тоді і тільки тоді, коли множина A є замкненою відносно дій над векторами.

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P. Непорожня підмножина A лінійного простору L називається підпростором L, якщо множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L.



Теорема 1 (перша ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором в L тоді і тільки тоді, коли множина A є замкненою відносно дій над векторами.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a,

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A,$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер A — замкнена підмножина

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a,

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.
Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1).

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A,

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.
Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L,

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.
Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.
Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.
Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A.

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.
Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A. Оскільки L

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.
Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A. Оскільки L є лінійним простором над полем P,

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A. Оскільки L є лінійним простором над полем P, то для довільних елементів a, b, c із L,

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.
Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A. Оскільки L є лінійним простором над полем P, то для довільних елементів a, b, c із L, зокрема із A,

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A. Оскільки L є лінійним простором над полем P, то для довільних елементів a, b, c із L, зокрема із A, та довільних елементів α, β поля P

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.
Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A. Оскільки L є лінійним простором над полем P, то для довільних елементів a, b, c із L, зокрема із A, та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності:

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A. Оскільки L є лінійним простором над полем P, то для довільних елементів a, b, c із L, зокрема із A, та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності:

$$(a + b) + c = a + (b + c),$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.
Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A. Оскільки L є лінійним простором над полем P, то для довільних елементів a, b, c із L, зокрема із A, та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad a + b = b + a,$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A. Оскільки L є лінійним простором над полем P, то для довільних елементів a, b, c із L, зокрема із A, та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad a + b = b + a, \qquad \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a,$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.
Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A. Оскільки L є лінійним простором над полем P, то для довільних елементів a, b, c із L, зокрема із A, та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності:

$$(a+b)+c = a+(b+c), \qquad a+b = b+a, \qquad \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a,$$
$$1a = a,$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.
Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A. Оскільки L є лінійним простором над полем P, то для довільних елементів a, b, c із L, зокрема із A, та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності:

$$(a+b)+c = a+(b+c), \qquad a+b = b+a, \qquad \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a,$$
$$1a = a, \qquad \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b,$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P і A — непорожня підмножина L. Припустимо, що A є підпростором лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення

$$a + b \in A, \qquad \gamma a \in A. \tag{1}$$

Тому підмножина A є замкненою підмножиною лінійного простору L.

Нехай тепер A — замкнена підмножина лінійного простору L над полем P. Тоді для будь-яких векторів a, b із A та будь-якого елемента γ поля P справджуються включення (1). Отже, операція додавання елементів із A, розглядуваних, як вектори із L, та множення елемента поля P на елемент із A задають дію додавання елементів на множині A та дію множення елемента поля P на елемент із A. Оскільки L є лінійним простором над полем P, то для довільних елементів a, b, c із L, зокрема із A, та довільних елементів α, β поля P справджуються рівності:

$$(a + b) + c = a + (b + c), \qquad a + b = b + a, \qquad \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a,$$
$$1a = a, \qquad \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \qquad (\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a.$$

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A.

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує,

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$.

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a$$

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A,$$

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a$$

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L.

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A,

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент.

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A.

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. $\square$

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. $\square$

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. $\square$

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. $\square$

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді,

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. $\square$

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A —

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P,

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. $\square$

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. $\square$

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A.

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки,

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки, нехай для будь-яких векторів u та v із A

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки, нехай для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки, нехай для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки, нехай для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки, нехай для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A. Тоді $u + v =$

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки, нехай для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A. Тоді $u + v = 1u + 1v$

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки, нехай для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A. Тоді $u + v = 1u + 1v \in A$,

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки, нехай для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A. Тоді $u + v = 1u + 1v \in A$, $\alpha u =$

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки, нехай для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A. Тоді $u + v = 1u + 1v \in A$, $\alpha u = \alpha u + 0v$

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки, нехай для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A. Тоді $u + v = 1u + 1v \in A$, $\alpha u = \alpha u + 0v \in A$.

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки, нехай для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A. Тоді $u + v = 1u + 1v \in A$, $\alpha u = \alpha u + 0v \in A$. Отже, множина A — замкнена відносно дій над векторами.

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді

$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$

нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки, нехай для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A. Тоді $u + v = 1u + 1v \in A$, $\alpha u = \alpha u + 0v \in A$. Отже, множина A — замкнена відносно дій над векторами. За першою ознакою підпростору A

Доведення.

Розглянемо будь-який елемент a із A. Такий існує, бо $A \neq \varnothing$. Тоді
$$\bar{0} = 0a \in A, \qquad -a = (-1)a \in A,$$
нагадаємо через те, що A — замкнена множина лінійного простору L. Це означає, що нульовий вектор $\bar{0}$ лінійного простору L належить A і він є нульовим елементом в A, тобто множина A містить нульовий елемент. Так само, для довільного елемента a із A існує протилежний елемент в A. Тому за означенням лінійного простору множина A є лінійним простором над полем P відносно тих дій, які введені в L. □

Теорема 2 (друга ознака підпростору)

Непорожня підмножина A лінійного простору L над полем P є підпростором L тоді і тільки тоді, коли для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A.

Доведення.

Якщо A — підпростір лінійного простору L над полем P, то для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектори αu і βv належить A. Тому сума $\alpha u + \beta v$ належить A. Навпаки, нехай для будь-яких векторів u та v із A і будь-яких елементів α та β із P вектор $\alpha u + \beta v$ належить A. Тоді $u + v = 1u + 1v \in A$, $\alpha u = \alpha u + 0v \in A$. Отже, множина A — замкнена відносно дій над векторами. За першою ознакою підпростору A є підпростором лінійного простору L. □

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L (це так звані тривіальні підпростори).

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L (це так звані тривіальні підпростори).
2. Нехай a_1, a_2, ..., a_s

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L (це так звані тривіальні підпростори).
2. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_s$ — система векторів лінійного простору L над полем P.

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L (це так звані тривіальні підпростори).
2. Нехай a_1, a_2, ..., a_s — система векторів лінійного простору L над полем P. Позначимо через

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle$$

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L (це так звані тривіальні підпростори).
2. Нехай a_1, a_2, ..., a_s — система векторів лінійного простору L над полем P. Позначимо через

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \in P\}$$

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L (це так звані тривіальні підпростори).
2. Нехай a_1, a_2, $\dots$, a_s — система векторів лінійного простору L над полем P. Позначимо через

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in P\}$$

— множину всіх лінійних комбінацій системи a_1, a_2, $\dots$, a_s.

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L (це так звані тривіальні підпростори).
2. Нехай a_1, a_2, ..., a_s — система векторів лінійного простору L над полем P. Позначимо через

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \in P\}$$

— множину всіх лінійних комбінацій системи a_1, a_2, ..., a_s. Тоді множина $\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle$ є підпростором в L.

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L (це так звані тривіальні підпростори).
2. Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_s — система векторів лінійного простору L над полем P. Позначимо через

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \in P\}$$

— множину всіх лінійних комбінацій системи a_1, a_2, $\ldots$, a_s. Тоді множина $\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle$ є підпростором в L. Цей підпростір називається лінійною оболонкою системи векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_s,

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L (це так звані тривіальні підпростори).
2. Нехай a_1, a_2, ..., a_s — система векторів лінійного простору L над полем P. Позначимо через

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in P\}$$

— множину всіх лінійних комбінацій системи a_1, a_2, ..., a_s. Тоді множина $\langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle$ є підпростором в L. Цей підпростір називається лінійною оболонкою системи векторів a_1, a_2, ..., a_s, або підпростором, породженим системою векторів a_1, a_2, ..., a_s.

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L (це так звані тривіальні підпростори).
2. Нехай a_1, a_2, ..., a_s — система векторів лінійного простору L над полем P. Позначимо через

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_s\rangle = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \in P\}$$

— множину всіх лінійних комбінацій системи a_1, a_2, ..., a_s. Тоді множина $\langle a_1, a_2, \ldots, a_s\rangle$ є підпростором в L. Цей підпростір називається лінійною оболонкою системи векторів a_1, a_2, ..., a_s, або підпростором, породженим системою векторів a_1, a_2, ..., a_s.
3. Простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь від n невідомих над полем P є підпростором в P^n.

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L (це так звані тривіальні підпростори).
2. Нехай a_1, a_2, ..., a_s — система векторів лінійного простору L над полем P. Позначимо через

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in P\}$$

— множину всіх лінійних комбінацій системи a_1, a_2, ..., a_s. Тоді множина $\langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle$ є підпростором в L. Цей підпростір називається лінійною оболонкою системи векторів a_1, a_2, ..., a_s, або підпростором, породженим системою векторів a_1, a_2, ..., a_s.
3. Простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь від n невідомих над полем P є підпростором в P^n.

Завдання для самостійної роботи.

1. Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P.

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L (це так звані тривіальні підпростори).
2. Нехай $a_1, a_2, \dots, a_s$ — система векторів лінійного простору L над полем P. Позначимо через

$$\langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_s a_s \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s \in P\}$$

   — множину всіх лінійних комбінацій системи $a_1, a_2, \dots, a_s$. Тоді множина $\langle a_1, a_2, \dots, a_s \rangle$ є підпростором в L. Цей підпростір називається лінійною оболонкою системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$, або підпростором, породженим системою векторів $a_1, a_2, \dots, a_s$.
3. Простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь від n невідомих над полем P є підпростором в P^n.

Завдання для самостійної роботи.

1. Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P. Показати, що будь-який підпростір в L є лінійною оболонкою деякої системи векторів простору L.

Приклади підпросторів лінійного простору.

1. $\{\bar{0}\}$ і L є підпросторами лінійного простору L (це так звані тривіальні підпростори).
2. Нехай a_1, a_2, ..., a_s — система векторів лінійного простору L над полем P. Позначимо через

$$\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle = \{\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_s a_s \mid \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s \in P\}$$

— множину всіх лінійних комбінацій системи a_1, a_2, ..., a_s. Тоді множина $\langle a_1, a_2, \ldots, a_s \rangle$ є підпростором в L. Цей підпростір називається лінійною оболонкою системи векторів a_1, a_2, ..., a_s, або підпростором, породженим системою векторів a_1, a_2, ..., a_s.
3. Простір розв'язків системи лінійних однорідних рівнянь від n невідомих над полем P є підпростором в P^n.

Завдання для самостійної роботи.

1. Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P. Показати, що будь-який підпростір в L є лінійною оболонкою деякої системи векторів простору L.
2. Показати, що будь-який підпростір в P^n є простором розв'язків деякої системи лінійних однорідних рівнянь з n невідомими над полем P.

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P.

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A + B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a + b$,

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A,

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A + B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a + b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Множина $A+B$ називається **сумою множин A і B**.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\},$$

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}, \quad B=\{(0,\alpha',\beta')\mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\}$$

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b\mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\},\quad B=\{(0,\alpha',\beta')\mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$.

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\},\quad B=\big\{(0,\alpha',\beta')\mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\big\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3,$$

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A \cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0) \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}, \quad B=\{(0,\alpha',\beta') \mid \alpha',\beta' \in \mathbb{R}\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3, \qquad A+A=A,$$

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\},\quad B=\left\{(0,\alpha',\beta') \mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\right\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3,\qquad A+A=A,\qquad A+\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^3,$$

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\},\quad B=\left\{(0,\alpha',\beta')\mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\right\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3,\qquad A+A=A,\qquad A+\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^3,$$

$$A\cap\mathbb{R}^3=A,$$

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\},\quad B=\left\{(0,\alpha',\beta') \mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\right\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3,\qquad A+A=A,\qquad A+\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^3,$$

$$A\cap\mathbb{R}^3=A,\qquad A\cap A=A,$$

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}\,.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\,,\quad B=\{(0,\alpha',\beta')\mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3,\qquad A+A=A,\qquad A+\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^3,$$

$$A\cap\mathbb{R}^3=A,\qquad A\cap A=A,\qquad A\cap B=\{(0,\gamma,0)\mid\gamma\in\mathbb{R}\}\,.$$

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}\,.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\,,\quad B=\big\{(0,\alpha',\beta') \mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\big\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3,\qquad A+A=A,\qquad A+\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^3,$$

$$A\cap\mathbb{R}^3=A,\qquad A\cap A=A,\qquad A\cap B=\{(0,\gamma,0) \mid \gamma\in\mathbb{R}\}\,.$$

Перша рівність слідує із взаємних включень,

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\},\quad B=\big\{(0,\alpha',\beta')\mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\big\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3,\qquad A+A=A,\qquad A+\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^3,$$

$$A\cap\mathbb{R}^3=A,\qquad A\cap A=A,\qquad A\cap B=\{(0,\gamma,0)\mid\gamma\in\mathbb{R}\}.$$

Перша рівність слідує із взаємних включень, одне з яких, а саме $A+B\subset\mathbb{R}^3$,

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}\,.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}\,,\quad B=\big\{(0,\alpha',\beta') \mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\big\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3,\qquad A+A=A,\qquad A+\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^3,$$

$$A\cap\mathbb{R}^3=A,\qquad A\cap A=A,\qquad A\cap B=\{(0,\gamma,0) \mid \gamma\in\mathbb{R}\}\,.$$

Перша рівність слідує із взаємних включень, одне з яких, а саме $A+B\subset\mathbb{R}^3$, є очевидним,

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}, \quad B=\left\{(0,\alpha',\beta') \mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\right\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3, \qquad A+A=A, \qquad A+\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^3,$$

$$A\cap\mathbb{R}^3=A, \qquad A\cap A=A, \qquad A\cap B=\{(0,\gamma,0) \mid \gamma\in\mathbb{R}\}.$$

Перша рівність слідує із взаємних включень, одне з яких, а саме $A+B\subset\mathbb{R}^3$, є очевидним, а друге $A+B\supset\mathbb{R}^3$

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\},\quad B=\left\{(0,\alpha',\beta') \mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\right\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3,\qquad A+A=A,\qquad A+\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^3,$$

$$A\cap\mathbb{R}^3=A,\qquad A\cap A=A,\qquad A\cap B=\{(0,\gamma,0) \mid \gamma\in\mathbb{R}\}.$$

Перша рівність слідує із взаємних включень, одне з яких, а саме $A+B\subset\mathbb{R}^3$, є очевидним, а друге $A+B\supset\mathbb{R}^3$ випливає із того,

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}, \quad B=\{(0,\alpha',\beta') \mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3, \qquad A+A=A, \qquad A+\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^3,$$

$$A\cap\mathbb{R}^3=A, \qquad A\cap A=A, \qquad A\cap B=\{(0,\gamma,0) \mid \gamma\in\mathbb{R}\}.$$

Перша рівність слідує із взаємних включень, одне з яких, а саме $A+B\subset\mathbb{R}^3$, є очевидним, а друге $A+B\supset\mathbb{R}^3$ випливає із того, що будь-який вектор (α,β,γ) із $\mathbb{R}^3$

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0)\mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\},\quad B=\left\{(0,\alpha',\beta')\mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\right\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3,\qquad A+A=A,\qquad A+\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^3,$$

$$A\cap\mathbb{R}^3=A,\qquad A\cap A=A,\qquad A\cap B=\{(0,\gamma,0)\mid\gamma\in\mathbb{R}\}.$$

Перша рівність слідує із взаємних включень, одне з яких, а саме $A+B\subset\mathbb{R}^3$, є очевидним, а друге $A+B\supset\mathbb{R}^3$ випливає із того, що будь-який вектор (α,β,γ) із $\mathbb{R}^3$ можна записати у вигляді суми векторів

$$(\alpha,\beta,0)+(0,0,\gamma)$$

Означення 2

Нехай A, B — непорожні підмножини лінійного простору L над полем P. Через $A+B$ позначимо множину всіх векторів вигляду $a+b$, де a пробігає всю множину A, а b пробігає множину B:

$$A+B=\{a+b \mid a\in A,\ b\in B\}.$$

Множина $A+B$ називається сумою множин A і B.

Нагадаємо, що множина всіх спільних для A і B векторів називається перетином множин A та B і позначається через $A\cap B$.

Приклади сум та перетинів підмножин лінійного простору.

Нехай

$$A=\{(\alpha,\beta,0) \mid \alpha,\beta\in\mathbb{R}\}, \quad B=\left\{(0,\alpha',\beta') \mid \alpha',\beta'\in\mathbb{R}\right\}$$

— підмножини дійсного тривимірного векторного простору $\mathbb{R}^3$. Тоді

$$A+B=\mathbb{R}^3, \qquad A+A=A, \qquad A+\mathbb{R}^3=\mathbb{R}^3,$$

$$A\cap\mathbb{R}^3=A, \qquad A\cap A=A, \qquad A\cap B=\{(0,\gamma,0) \mid \gamma\in\mathbb{R}\}.$$

Перша рівність слідує із взаємних включень, одне з яких, а саме $A+B\subset\mathbb{R}^3$, є очевидним, а друге $A+B\supset\mathbb{R}^3$ випливає із того, що будь-який вектор (α,β,γ) із $\mathbb{R}^3$ можна записати у вигляді суми векторів

$$(\alpha,\beta,0)+(0,0,\gamma)\in A+B.$$

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L.

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L,

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P,

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L.

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$.

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, a_2 $\in$ A

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, $a_2 \in A$ і b_1, $b_2 \in B$,

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, $a_2 \in A$ і b_1, $b_2 \in B$, що $u = a_1 + b_1$,

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, $a_2 \in A$ і b_1, $b_2 \in B$, що $u = a_1 + b_1$, $v = a_2 + b_2$.

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, $a_2 \in A$ і b_1, $b_2 \in B$, що $u = a_1 + b_1$, $v = a_2 + b_2$. Тоді для довільних елементів γ, $\delta \in P$ справджуються рівності

$$\gamma u + \delta v =$$

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, $a_2 \in A$ і b_1, $b_2 \in B$, що $u = a_1 + b_1$, $v = a_2 + b_2$. Тоді для довільних елементів γ, $\delta \in P$ справджуються рівності

$$\gamma u + \delta v = \gamma(a_1 + b_1) + \delta(a_2 + b_2)$$

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, $a_2 \in A$ і b_1, $b_2 \in B$, що $u = a_1 + b_1$, $v = a_2 + b_2$. Тоді для довільних елементів γ, $\delta \in P$ справджуються рівності

$$\gamma u + \delta v = \gamma(a_1 + b_1) + \delta(a_2 + b_2) =$$

$$= \gamma a_1 + \gamma b_1 + \delta a_2 + \delta b_2$$

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, $a_2 \in A$ і b_1, $b_2 \in B$, що $u = a_1 + b_1$, $v = a_2 + b_2$. Тоді для довільних елементів γ, $\delta \in P$ справджуються рівності

$$\gamma u + \delta v = \gamma(a_1 + b_1) + \delta(a_2 + b_2) =$$

$$= \gamma a_1 + \gamma b_1 + \delta a_2 + \delta b_2 = (\gamma a_1 + \delta a_2) + (\gamma b_1 + \delta b_2).$$

Оскільки A, B — підпростори в L,

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, $a_2 \in A$ і b_1, $b_2 \in B$, що $u = a_1 + b_1$, $v = a_2 + b_2$. Тоді для довільних елементів γ, $\delta \in P$ справджуються рівності

$$\gamma u + \delta v = \gamma(a_1 + b_1) + \delta(a_2 + b_2) =$$

$$= \gamma a_1 + \gamma b_1 + \delta a_2 + \delta b_2 = (\gamma a_1 + \delta a_2) + (\gamma b_1 + \delta b_2).$$

Оскільки A, B — підпростори в L, то за другою ознакою підпростору

$$\gamma a_1 + \delta a_2 \in A,$$

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, $a_2 \in A$ і b_1, $b_2 \in B$, що $u = a_1 + b_1$, $v = a_2 + b_2$. Тоді для довільних елементів γ, $\delta \in P$ справджуються рівності

$$\gamma u + \delta v = \gamma(a_1 + b_1) + \delta(a_2 + b_2) =$$

$$= \gamma a_1 + \gamma b_1 + \delta a_2 + \delta b_2 = (\gamma a_1 + \delta a_2) + (\gamma b_1 + \delta b_2).$$

Оскільки A, B — підпростори в L, то за другою ознакою підпростору

$$\gamma a_1 + \delta a_2 \in A, \qquad \gamma b_1 + \delta b_2 \in B.$$

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, $a_2 \in A$ і b_1, $b_2 \in B$, що $u = a_1 + b_1$, $v = a_2 + b_2$. Тоді для довільних елементів γ, $\delta \in P$ справджуються рівності

$$\gamma u + \delta v = \gamma(a_1 + b_1) + \delta(a_2 + b_2) =$$

$$= \gamma a_1 + \gamma b_1 + \delta a_2 + \delta b_2 = (\gamma a_1 + \delta a_2) + (\gamma b_1 + \delta b_2).$$

Оскільки A, B — підпростори в L, то за другою ознакою підпростору

$$\gamma a_1 + \delta a_2 \in A, \qquad \gamma b_1 + \delta b_2 \in B.$$

Це означає, що $\gamma u + \delta v \in A + B$.

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, $a_2 \in A$ і b_1, $b_2 \in B$, що $u = a_1 + b_1$, $v = a_2 + b_2$. Тоді для довільних елементів γ, $\delta \in P$ справджуються рівності

$$\gamma u + \delta v = \gamma(a_1 + b_1) + \delta(a_2 + b_2) =$$

$$= \gamma a_1 + \gamma b_1 + \delta a_2 + \delta b_2 = (\gamma a_1 + \delta a_2) + (\gamma b_1 + \delta b_2).$$

Оскільки A, B — підпростори в L, то за другою ознакою підпростору

$$\gamma a_1 + \delta a_2 \in A, \qquad \gamma b_1 + \delta b_2 \in B.$$

Це означає, що $\gamma u + \delta v \in A + B$. Знову ж таки за другою ознакою підпростору $A + B$ є підпростором в L.

Теорема 3

Сума і перетин будь-яких підпросторів лінійного простору L є підпросторами в L. Якщо A і B є скінченновимірними підпросторами в L, то

$$\dim_P(A+B) = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Доведення.

Нехай L — лінійний простір над полем P, а A і B — підпростори в L. Розглянемо будь-які два вектори u, v із $A+B$. За означенням суми підмножин лінійного простору знайдуться такі вектори a_1, $a_2 \in A$ і b_1, $b_2 \in B$, що $u = a_1 + b_1$, $v = a_2 + b_2$. Тоді для довільних елементів γ, $\delta \in P$ справджуються рівності

$$\gamma u + \delta v = \gamma(a_1 + b_1) + \delta(a_2 + b_2) =$$

$$= \gamma a_1 + \gamma b_1 + \delta a_2 + \delta b_2 = (\gamma a_1 + \delta a_2) + (\gamma b_1 + \delta b_2).$$

Оскільки A, B — підпростори в L, то за другою ознакою підпростору

$$\gamma a_1 + \delta a_2 \in A, \qquad \gamma b_1 + \delta b_2 \in B.$$

Це означає, що $\gamma u + \delta v \in A + B$. Знову ж таки за другою ознакою підпростору $A+B$ є підпростором в L.

Аналогічно доводиться, що $A \cap B$ є підпростором в L.

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$,

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$.

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт,

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним,

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору.

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A,

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B,

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і c_1, c_2, $\ldots$, c_k — базис $A \cap B$.

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і c_1, c_2, $\ldots$, c_k — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$,

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і c_1, c_2, $\ldots$, c_k — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$ і не існує базису $A \cap B$

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і c_1, c_2, …, c_k — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$ і не існує базису $A \cap B$ (але це не впливає на подальші міркування).

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і c_1, c_2, ..., c_k — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$ і не існує базису $A \cap B$ (але це не впливає на подальші міркування).

Якщо $k < m$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів c_1, c_2, ..., c_k

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і c_1, c_2, ..., c_k — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$ і не існує базису $A \cap B$ (але це не впливає на подальші міркування).

Якщо $k < m$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів c_1, c_2, ..., c_k до базису c_1, c_2, ..., c_k, a_1, ..., a_{m-k} підпростору A.

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і c_1, c_2, $\ldots$, c_k — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$ і не існує базису $A \cap B$ (але це не впливає на подальші міркування).

Якщо $k < m$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів c_1, c_2, $\ldots$, c_k до базису c_1, c_2, $\ldots$, c_k, a_1, $\ldots$, a_{m-k} підпростору A. Так само, якщо $k < n$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів c_1, c_2, $\ldots$, c_k

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і c_1, c_2, $\ldots$, c_k — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$ і не існує базису $A \cap B$ (але це не впливає на подальші міркування).

Якщо $k < m$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів c_1, c_2, $\ldots$, c_k до базису c_1, c_2, $\ldots$, c_k, a_1, $\ldots$, a_{m-k} підпростору A. Так само, якщо $k < n$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів c_1, c_2, $\ldots$, c_k до базису c_1, c_2, $\ldots$, c_k, b_1, $\ldots$, b_{n-k} підпростору B.

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і c_1, c_2, $\ldots$, c_k — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$ і не існує базису $A \cap B$ (але це не впливає на подальші міркування).
Якщо $k < m$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів c_1, c_2, $\ldots$, c_k до базису c_1, c_2, $\ldots$, c_k, a_1, $\ldots$, a_{m-k} підпростору A. Так само, якщо $k < n$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів c_1, c_2, $\ldots$, c_k до базису c_1, c_2, $\ldots$, c_k, b_1, $\ldots$, b_{n-k} підпростору B.
Покажемо, що система векторів

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k,\ a_1,\ \ldots,\ a_{m-k},\ b_1,\ \ldots,\ b_{n-k} \tag{2}$$

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$ і не існує базису $A \cap B$ (але це не впливає на подальші міркування).
Якщо $k < m$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k$ до базису $c_1, c_2, \ldots, c_k, a_1, \ldots, a_{m-k}$ підпростору A. Так само, якщо $k < n$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k$ до базису $c_1, c_2, \ldots, c_k, b_1, \ldots, b_{n-k}$ підпростору B.
Покажемо, що система векторів

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k,\ a_1,\ \ldots,\ a_{m-k},\ b_1,\ \ldots,\ b_{n-k} \tag{2}$$

— базис суми $A + B$.

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і c_1, c_2, $\ldots$, c_k — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$ і не існує базису $A \cap B$ (але це не впливає на подальші міркування).

Якщо $k < m$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів c_1, c_2, $\ldots$, c_k до базису c_1, c_2, $\ldots$, c_k, a_1, $\ldots$, a_{m-k} підпростору A. Так само, якщо $k < n$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів c_1, c_2, $\ldots$, c_k до базису c_1, c_2, $\ldots$, c_k, b_1, $\ldots$, b_{n-k} підпростору B.

Покажемо, що система векторів

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k,\ a_1,\ \ldots,\ a_{m-k},\ b_1,\ \ldots,\ b_{n-k} \tag{2}$$

— базис суми $A + B$. Нехай u — будь-який вектор із $A + B$.

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$ і не існує базису $A \cap B$ (але це не впливає на подальші міркування).

Якщо $k < m$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k$ до базису $c_1, c_2, \ldots, c_k, a_1, \ldots, a_{m-k}$ підпростору A. Так само, якщо $k < n$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k$ до базису $c_1, c_2, \ldots, c_k, b_1, \ldots, b_{n-k}$ підпростору B.

Покажемо, що система векторів

$$c_1, c_2, \ldots, c_k, a_1, \ldots, a_{m-k}, b_1, \ldots, b_{n-k} \tag{2}$$

— базис суми $A + B$. Нехай u — будь-який вектор із $A + B$. Тоді $u = a + b$

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і $c_1, c_2, \dots, c_k$ — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$ і не існує базису $A \cap B$ (але це не впливає на подальші міркування).
Якщо $k < m$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів $c_1, c_2, \dots, c_k$ до базису $c_1, c_2, \dots, c_k, a_1, \dots, a_{m-k}$ підпростору A. Так само, якщо $k < n$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів $c_1, c_2, \dots, c_k$ до базису $c_1, c_2, \dots, c_k, b_1, \dots, b_{n-k}$ підпростору B.
Покажемо, що система векторів

$$c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_k,\ a_1,\ \dots,\ a_{m-k},\ b_1,\ \dots,\ b_{n-k} \tag{2}$$

— базис суми $A + B$. Нехай u — будь-який вектор із $A + B$. Тоді $u = a + b$ для деяких векторів $a \in A$, $b \in B$.

Доведення.

Нехай A, B — скінченновимірні підпростори в L і $\dim_P A = m$, $\dim_P B = n$. Взагалі кажучи, є очевидним той факт, що будь-який підпростір скінченновимірного лінійного простору є скінченновимірним, причому розмірність підпростору не перевищує розмірність лінійного простору. Оскільки перетин $A \cap B$ є підмножиною як A, так і B, то $A \cap B$ є скінченновимірним лінійним простором над полем P. Нехай $\dim_P(A \cap B) = k$ і c_1, c_2, $\ldots$, c_k — базис $A \cap B$. Якщо $A \cap B = \{\bar{0}\}$, то $k = 0$ і не існує базису $A \cap B$ (але це не впливає на подальші міркування).

Якщо $k < m$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів c_1, c_2, $\ldots$, c_k до базису c_1, c_2, $\ldots$, c_k, a_1, $\ldots$, a_{m-k} підпростору A. Так само, якщо $k < n$, то доповнимо лінійно незалежну систему векторів c_1, c_2, $\ldots$, c_k до базису c_1, c_2, $\ldots$, c_k, b_1, $\ldots$, b_{n-k} підпростору B.

Покажемо, що система векторів

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_k,\ a_1,\ \ldots,\ a_{m-k},\ b_1,\ \ldots,\ b_{n-k} \tag{2}$$

— базис суми $A + B$. Нехай u — будь-який вектор із $A + B$. Тоді $u = a + b$ для деяких векторів $a \in A$, $b \in B$. Розкладемо вектори a і b відповідно за базисами підпросторів A і B:

Доведення.

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

Доведення.

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

$$b = \gamma'_1 c_1 + \gamma'_2 c_2 + \cdots + \gamma'_k c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k},$$

Доведення.

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

$$b = \gamma'_1 c_1 + \gamma'_2 c_2 + \dots + \gamma'_k c_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k},$$

де $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma'_1, \ldots \gamma'_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k} \in P$.

Доведення.

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

$$b = \gamma_1' c_1 + \gamma_2' c_2 + \cdots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k},$$

де $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_1', \ldots \gamma_k', \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k} \in P$. Тоді

$$a + b = (\gamma_1 + \gamma_1')c_1 + (\gamma_2 + \gamma_2)c_2 + \cdots + (\gamma_k + \gamma_k')c_k + \\ + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k}.$$

Доведення.

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

$$b = \gamma_1' c_1 + \gamma_2' c_2 + \cdots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k},$$

де $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_1', \ldots \gamma_k', \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k} \in P$. Тоді

$$a + b = (\gamma_1 + \gamma_1')c_1 + (\gamma_2 + \gamma_2)c_2 + \cdots + (\gamma_k + \gamma_k')c_k + \\ + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k}.$$

Отже, будь-який вектор суми $A + B$ є лінійною комбінацією системи векторів (2).

Доведення.

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

$$b = \gamma_1' c_1 + \gamma_2' c_2 + \dots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k},$$

де $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_1', \ldots \gamma_k', \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k} \in P$. Тоді

$$a + b = (\gamma_1 + \gamma_1')c_1 + (\gamma_2 + \gamma_2)c_2 + \dots + (\gamma_k + \gamma_k')c_k + \\ + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k}.$$

Отже, будь-який вектор суми $A + B$ є лінійною комбінацією системи векторів (2). Тепер доведемо від протилежного,

Доведення.

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

$$b = \gamma_1' c_1 + \gamma_2' c_2 + \cdots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k},$$

де $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_1', \ldots \gamma_k', \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k} \in P$. Тоді

$$a + b = (\gamma_1 + \gamma_1')c_1 + (\gamma_2 + \gamma_2)c_2 + \cdots + (\gamma_k + \gamma_k')c_k + \\ + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k}.$$

Отже, будь-який вектор суми $A + B$ є лінійною комбінацією системи векторів (2). Тепер доведемо від протилежного, що система векторів (2) є лінійно незалежною.

Доведення.

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

$$b = \gamma_1' c_1 + \gamma_2' c_2 + \dots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k},$$

де $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_1', \dots \gamma_k', \alpha_1, \dots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \dots, \beta_{n-k} \in P$. Тоді

$$a + b = (\gamma_1 + \gamma_1')c_1 + (\gamma_2 + \gamma_2)c_2 + \dots + (\gamma_k + \gamma_k')c_k + \\ + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k}.$$

Отже, будь-який вектор суми $A + B$ є лінійною комбінацією системи векторів (2). Тепер доведемо від протилежного, що система векторів (2) є лінійно незалежною. Припустимо, що існують елементи $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \dots, \beta_{n-k}$ поля P, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0}.$$

Доведення.

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

$$b = \gamma_1' c_1 + \gamma_2' c_2 + \dots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k},$$

де $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_1', \dots \gamma_k', \alpha_1, \dots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \dots, \beta_{n-k} \in P$. Тоді

$$a + b = (\gamma_1 + \gamma_1')c_1 + (\gamma_2 + \gamma_2)c_2 + \dots + (\gamma_k + \gamma_k')c_k + \\ + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k}.$$

Отже, будь-який вектор суми $A + B$ є лінійною комбінацією системи векторів (2). Тепер доведемо від протилежного, що система векторів (2) є лінійно незалежною. Припустимо, що існують елементи $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \dots, \beta_{n-k}$ поля P, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0}.$$

Звідси

$$\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} = \\ = -\beta_1 b_1 - \dots - \beta_{n-k} b_{n-k}. \quad (3)$$

Доведення.

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

$$b = \gamma_1' c_1 + \gamma_2' c_2 + \dots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k},$$

де $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_1', \dots \gamma_k', \alpha_1, \dots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \dots, \beta_{n-k} \in P$. Тоді

$$a + b = (\gamma_1 + \gamma_1')c_1 + (\gamma_2 + \gamma_2)c_2 + \dots + (\gamma_k + \gamma_k')c_k + \\ + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k}.$$

Отже, будь-який вектор суми $A + B$ є лінійною комбінацією системи векторів (2). Тепер доведемо від протилежного, що система векторів (2) є лінійно незалежною. Припустимо, що існують елементи $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \dots, \beta_{n-k}$ поля P, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0}.$$

Звідси

$$\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} = \\ = -\beta_1 b_1 - \dots - \beta_{n-k} b_{n-k}. \quad (3)$$

В лівій частині рівності (3) знаходиться вектор із A,

Доведення.

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

$$b = \gamma_1' c_1 + \gamma_2' c_2 + \dots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k},$$

де $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma_1', \dots \gamma_k', \alpha_1, \dots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \dots, \beta_{n-k} \in P$. Тоді

$$a + b = (\gamma_1 + \gamma_1')c_1 + (\gamma_2 + \gamma_2)c_2 + \dots + (\gamma_k + \gamma_k')c_k + \\ + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k}.$$

Отже, будь-який вектор суми $A + B$ є лінійною комбінацією системи векторів (2). Тепер доведемо від протилежного, що система векторів (2) є лінійно незалежною. Припустимо, що існують елементи $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-k}$, $\beta_1, \dots, \beta_{n-k}$ поля P, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0}.$$

Звідси

$$\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} = \\ = -\beta_1 b_1 - \dots - \beta_{n-k} b_{n-k}. \quad (3)$$

В лівій частині рівності (3) знаходиться вектор із A, а в правій — вектор із B.

Доведення.

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

$$b = \gamma_1' c_1 + \gamma_2' c_2 + \cdots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k},$$

де $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \gamma_1', \ldots \gamma_k', \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k} \in P$. Тоді

$$a + b = (\gamma_1 + \gamma_1')c_1 + (\gamma_2 + \gamma_2)c_2 + \cdots + (\gamma_k + \gamma_k')c_k + \\ + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k}.$$

Отже, будь-який вектор суми $A + B$ є лінійною комбінацією системи векторів (2). Тепер доведемо від протилежного, що система векторів (2) є лінійно незалежною. Припустимо, що існують елементи $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$ поля P, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0}.$$

Звідси

$$\gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} = \\ = -\beta_1 b_1 - \cdots - \beta_{n-k} b_{n-k}. \quad (3)$$

В лівій частині рівності (3) знаходиться вектор із A, а в правій — вектор із B. Оскільки це один і той же вектор,

Доведення.

$$a = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k},$$

$$b = \gamma'_1 c_1 + \gamma'_2 c_2 + \dots + \gamma'_k c_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k},$$

де $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \gamma'_1, \dots \gamma'_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \dots, \beta_{n-k} \in P$. Тоді

$$a + b = (\gamma_1 + \gamma'_1)c_1 + (\gamma_2 + \gamma_2)c_2 + \dots + (\gamma_k + \gamma'_k)c_k + \\ + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k}.$$

Отже, будь-який вектор суми $A + B$ є лінійною комбінацією системи векторів (2). Тепер доведемо від протилежного, що система векторів (2) є лінійно незалежною. Припустимо, що існують елементи $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-k}$, $\beta_1, \dots, \beta_{n-k}$ поля P, не всі рівні нулю, що

$$\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0}.$$

Звідси

$$\gamma_1 c_1 + \dots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \dots + \alpha_{m-k} a_{m-k} = \\ = -\beta_1 b_1 - \dots - \beta_{n-k} b_{n-k}. \quad (3)$$

В лівій частині рівності (3) знаходиться вектор із A, а в правій — вектор із B. Оскільки це один і той же вектор, то він належить перетину $A \cap B$.

Доведення.

Тому знайдуться елементи $\gamma_1', \ldots, \gamma_k'$ поля P

Доведення.

Тому знайдуться елементи $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_k$ поля P такі, що

$$-\beta_1 b_1 - \cdots - \beta_{n-k} b_{n-k} = \gamma'_1 c_1 + \cdots + \gamma'_k c_k.$$

Доведення.

Тому знайдуться елементи $\gamma_1', \ldots, \gamma_k'$ поля P такі, що

$$-\beta_1 b_1 - \cdots - \beta_{n-k} b_{n-k} = \gamma_1' c_1 + \cdots + \gamma_k' c_k.$$

Звідси

$$\gamma_1' c_1 + \cdots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0},$$

Доведення.

Тому знайдуться елементи $\gamma_1', \dots, \gamma_k'$ поля P такі, що
$$-\beta_1 b_1 - \dots - \beta_{n-k} b_{n-k} = \gamma_1' c_1 + \dots + \gamma_k' c_k.$$
Звідси
$$\gamma_1' c_1 + \dots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \dots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0},$$
що можливо, лише у випадку
$$\gamma_1' = 0, \quad \dots, \quad \gamma_k' = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad , \dots, \quad \beta_{m-k} = 0,$$

Доведення.

Тому знайдуться елементи $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_k$ поля P такі, що
$$-\beta_1 b_1 - \cdots - \beta_{n-k} b_{n-k} = \gamma'_1 c_1 + \cdots + \gamma'_k c_k.$$
Звідси
$$\gamma'_1 c_1 + \cdots + \gamma'_k c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0},$$
що можливо, лише у випадку
$$\gamma'_1 = 0, \quad \ldots, \quad \gamma'_k = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad , \ldots, \quad \beta_{m-k} = 0,$$
бо система векторів c_1, c_2, ..., c_k, b_1, ..., b_{n-k} є лінійно незалежною.

Доведення.

Тому знайдуться елементи $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_k$ поля P такі, що

$$-\beta_1 b_1 - \cdots - \beta_{n-k} b_{n-k} = \gamma'_1 c_1 + \cdots + \gamma'_k c_k.$$

Звідси

$$\gamma'_1 c_1 + \cdots + \gamma'_k c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0},$$

що можливо, лише у випадку

$$\gamma'_1 = 0, \quad \ldots, \quad \gamma'_k = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad , \ldots, \quad \beta_{m-k} = 0,$$

бо система векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k, b_1, \ldots, b_{n-k}$ є лінійно незалежною. Тоді із рівності (3) одержимо, що

$$\gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} = \bar{0},$$

Доведення.

Тому знайдуться елементи γ_1', ..., γ_k' поля P такі, що

$$-\beta_1 b_1 - \cdots - \beta_{n-k} b_{n-k} = \gamma_1' c_1 + \cdots + \gamma_k' c_k.$$

Звідси

$$\gamma_1' c_1 + \cdots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0},$$

що можливо, лише у випадку

$$\gamma_1' = 0, \quad \ldots, \quad \gamma_k' = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad , \ldots, \quad \beta_{m-k} = 0,$$

бо система векторів c_1, c_2, ..., c_k, b_1, ..., b_{n-k} є лінійно незалежною. Тоді із рівності (3) одержимо, що

$$\gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} = \bar{0},$$

що також можливо, лише у випадку

$$\gamma_1 = 0, \quad \ldots, \quad \gamma_k = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad , \ldots, \quad \alpha_{n-k} = 0,$$

бо система векторів c_1, c_2, ..., c_k, a_1, ..., a_{n-k} є лінійно незалежною.

Доведення.

Тому знайдуться елементи γ_1', ..., γ_k' поля P такі, що
$$-\beta_1 b_1 - \cdots - \beta_{n-k} b_{n-k} = \gamma_1' c_1 + \cdots + \gamma_k' c_k.$$
Звідси
$$\gamma_1' c_1 + \cdots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0},$$
що можливо, лише у випадку
$$\gamma_1' = 0, \quad \ldots, \quad \gamma_k' = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad , \ldots, \quad \beta_{m-k} = 0,$$
бо система векторів c_1, c_2, ..., c_k, b_1, ..., b_{n-k} є лінійно незалежною. Тоді із рівності (3) одержимо, що
$$\gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} = \bar{0},$$
що також можливо, лише у випадку
$$\gamma_1 = 0, \quad \ldots, \quad \gamma_k = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad , \ldots, \quad \alpha_{n-k} = 0,$$
бо система векторів c_1, c_2, ..., c_k, a_1, ..., a_{n-k} є лінійно незалежною. Це суперечить припущенню, що хоча б один з коефіцієнтів γ_1, ..., γ_k, α_1, ..., α_{m-k}, β_1, ..., β_{n-k} не дорівнює нулю.

Доведення.

Тому знайдуться елементи $\gamma_1', \ldots, \gamma_k'$ поля P такі, що

$$-\beta_1 b_1 - \cdots - \beta_{n-k} b_{n-k} = \gamma_1' c_1 + \cdots + \gamma_k' c_k.$$

Звідси

$$\gamma_1' c_1 + \cdots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0},$$

що можливо, лише у випадку

$$\gamma_1' = 0, \quad \ldots, \quad \gamma_k' = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad , \ldots, \quad \beta_{m-k} = 0,$$

бо система векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k, b_1, \ldots, b_{n-k}$ є лінійно незалежною. Тоді із рівності (3) одержимо, що

$$\gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} = \bar{0},$$

що також можливо, лише у випадку

$$\gamma_1 = 0, \quad \ldots, \quad \gamma_k = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad , \ldots, \quad \alpha_{n-k} = 0,$$

бо система векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k, a_1, \ldots, a_{n-k}$ є лінійно незалежною. Це суперечить припущенню, що хоча б один з коефіцієнтів $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$ не дорівнює нулю.
Тому

$$\dim_P(A + B) =$$

Доведення.

Тому знайдуться елементи γ_1', ..., γ_k' поля P такі, що
$$-\beta_1 b_1 - \cdots - \beta_{n-k} b_{n-k} = \gamma_1' c_1 + \cdots + \gamma_k' c_k.$$
Звідси
$$\gamma_1' c_1 + \cdots + \gamma_k' c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0},$$
що можливо, лише у випадку
$$\gamma_1' = 0, \quad \ldots, \quad \gamma_k' = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad , \ldots, \quad \beta_{m-k} = 0,$$
бо система векторів c_1, c_2, ..., c_k, b_1, ..., b_{n-k} є лінійно незалежною. Тоді із рівності (3) одержимо, що
$$\gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} = \bar{0},$$
що також можливо, лише у випадку
$$\gamma_1 = 0, \quad \ldots, \quad \gamma_k = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad , \ldots, \quad \alpha_{n-k} = 0,$$
бо система векторів c_1, c_2, ..., c_k, a_1, ..., a_{n-k} є лінійно незалежною. Це суперечить припущенню, що хоча б один з коефіцієнтів γ_1, ..., γ_k, α_1, ..., α_{m-k}, β_1, ..., β_{n-k} не дорівнює нулю.
Тому
$$\dim_P(A+B) = k + (m-k) + (n-k)$$

Доведення.

Тому знайдуться елементи $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_k$ поля P такі, що

$$-\beta_1 b_1 - \cdots - \beta_{n-k} b_{n-k} = \gamma'_1 c_1 + \cdots + \gamma'_k c_k.$$

Звідси

$$\gamma'_1 c_1 + \cdots + \gamma'_k c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0},$$

що можливо, лише у випадку

$$\gamma'_1 = 0, \quad \ldots, \quad \gamma'_k = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad ,\ldots, \quad \beta_{m-k} = 0,$$

бо система векторів c_1, c_2, ..., c_k, b_1, ..., b_{n-k} є лінійно незалежною. Тоді із рівності (3) одержимо, що

$$\gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} = \bar{0},$$

що також можливо, лише у випадку

$$\gamma_1 = 0, \quad \ldots, \quad \gamma_k = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad ,\ldots, \quad \alpha_{n-k} = 0,$$

бо система векторів c_1, c_2, ..., c_k, a_1, ..., a_{n-k} є лінійно незалежною. Це суперечить припущенню, що хоча б один з коефіцієнтів γ_1, ..., γ_k, α_1, ..., α_{m-k}, β_1, ..., β_{n-k} не дорівнює нулю.

Тому

$$\dim_P(A+B) = k + (m-k) + (n-k) =$$
$$= m + n - k$$

Доведення.

Тому знайдуться елементи $\gamma'_1, \ldots, \gamma'_k$ поля P такі, що

$$-\beta_1 b_1 - \cdots - \beta_{n-k} b_{n-k} = \gamma'_1 c_1 + \cdots + \gamma'_k c_k.$$

Звідси

$$\gamma'_1 c_1 + \cdots + \gamma'_k c_k + \beta_1 b_1 + \cdots + \beta_{n-k} b_{n-k} = \bar{0},$$

що можливо, лише у випадку

$$\gamma'_1 = 0, \quad \ldots, \quad \gamma'_k = 0, \quad \beta_1 = 0, \quad ,\ldots, \quad \beta_{m-k} = 0,$$

бо система векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k, b_1, \ldots, b_{n-k}$ є лінійно незалежною. Тоді із рівності (3) одержимо, що

$$\gamma_1 c_1 + \cdots + \gamma_k c_k + \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_{m-k} a_{m-k} = \bar{0},$$

що також можливо, лише у випадку

$$\gamma_1 = 0, \quad \ldots, \quad \gamma_k = 0, \quad \alpha_1 = 0, \quad ,\ldots, \quad \alpha_{n-k} = 0,$$

бо система векторів $c_1, c_2, \ldots, c_k, a_1, \ldots, a_{n-k}$ є лінійно незалежною. Це суперечить припущенню, що хоча б один з коефіцієнтів $\gamma_1, \ldots, \gamma_k, \alpha_1, \ldots, \alpha_{m-k}, \beta_1, \ldots, \beta_{n-k}$ не дорівнює нулю.
Тому

$$\dim_P(A+B) = k + (m-k) + (n-k) =$$
$$= m + n - k = \dim_P A + \dim_P B - \dim_P(A \cap B).$$

Теорема доведена.