Суміжні класи за підпростором. Факторпростір

Лектор — доц. Шапочка Ігор

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

27 лютого 2023 року

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P,

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$.

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$,

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Приклад суміжного класу.

Нехай A — простір розв'язків

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Приклад суміжного класу.

Нехай A — простір розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 - x_2 = 0$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Приклад суміжного класу.

Нехай A — простір розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 - x_2 = 0$ з дійсними коефіцієнтами та з двома невідомими x_1, x_2.

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Приклад суміжного класу.

Нехай A — простір розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 - x_2 = 0$ з дійсними коефіцієнтами та з двома невідомими x_1, x_2. Тобто

$$A = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Приклад суміжного класу.

Нехай A — простір розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 - x_2 = 0$ з дійсними коефіцієнтами та з двома невідомими x_1, x_2. Тобто

$$A = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Приклад суміжного класу.

Нехай A — простір розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 - x_2 = 0$ з дійсними коефіцієнтами та з двома невідомими x_1, x_2. Тобто

$$A = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Суміжним класом за підпростором A

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Приклад суміжного класу.

Нехай A — простір розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 - x_2 = 0$ з дійсними коефіцієнтами та з двома невідомими x_1, x_2. Тобто

$$A = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Суміжним класом за підпростором A з представником $u = (1,\ 2)$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Приклад суміжного класу.

Нехай A — простір розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 - x_2 = 0$ з дійсними коефіцієнтами та з двома невідомими x_1, x_2. Тобто

$$A = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Суміжним класом за підпростором A з представником $u = (1,\ 2)$ є множина

$$u + A = \{(1 + \alpha, 2 + \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Приклад суміжного класу.

Нехай A — простір розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 - x_2 = 0$ з дійсними коефіцієнтами та з двома невідомими x_1, x_2. Тобто

$$A = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Суміжним класом за підпростором A з представником $u = (1,\ 2)$ є множина

$$u + A = \{(1 + \alpha, 2 + \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

яка є множиною розв'язків лінійного рівняння $x_1 - x_2 = -1$.

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Приклад суміжного класу.

Нехай A — простір розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 - x_2 = 0$ з дійсними коефіцієнтами та з двома невідомими x_1, x_2. Тобто

$$A = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Суміжним класом за підпростором A з представником $u = (1,\ 2)$ є множина

$$u + A = \{(1 + \alpha, 2 + \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

яка є множиною розв'язків лінійного рівняння $x_1 - x_2 = -1$. Тому

$$u + A =$$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Приклад суміжного класу.

Нехай A — простір розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 - x_2 = 0$ з дійсними коефіцієнтами та з двома невідомими x_1, x_2. Тобто

$$A = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Суміжним класом за підпростором A з представником $u = (1,\ 2)$ є множина

$$u + A = \{(1 + \alpha, 2 + \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

яка є множиною розв'язків лінійного рівняння $x_1 - x_2 = -1$. Тому

$$u + A = \{(\beta, 1 + \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Приклад суміжного класу.

Нехай A — простір розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 - x_2 = 0$ з дійсними коефіцієнтами та з двома невідомими x_1, x_2. Тобто

$$A = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

Суміжним класом за підпростором A з представником $u = (1,\ 2)$ є множина

$$u + A = \{(1 + \alpha, 2 + \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

яка є множиною розв'язків лінійного рівняння $x_1 - x_2 = -1$. Тому

$$u + A = \{(\beta, 1 + \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\} = \{(0,\ 1) + (\beta, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\}$$

Означення 1

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L і $u \in L$. Сума множин $\{u\} + A$, тобто множина

$$\{u + a \mid a \in A\}$$

називається суміжним класом лінійного простору L за підпростором A з представником класу u (її також називають лінійним многовидом).

Суміжний клас за підпростором A з представником u позначають через $u + A$.

Приклад суміжного класу.

Нехай A — простір розв'язків лінійного однорідного рівняння $x_1 - x_2 = 0$ з дійсними коефіцієнтами та з двома невідомими x_1, x_2. Тобто

$$A = \{(\alpha, \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2.$$

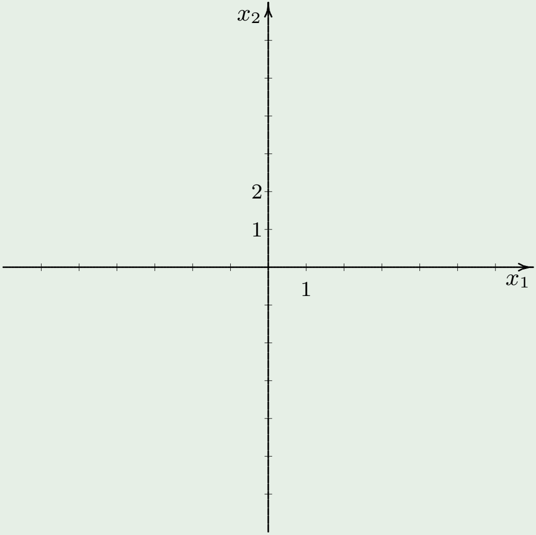
Суміжним класом за підпростором A з представником $u = (1,\ 2)$ є множина

$$u + A = \{(1 + \alpha, 2 + \alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\},$$

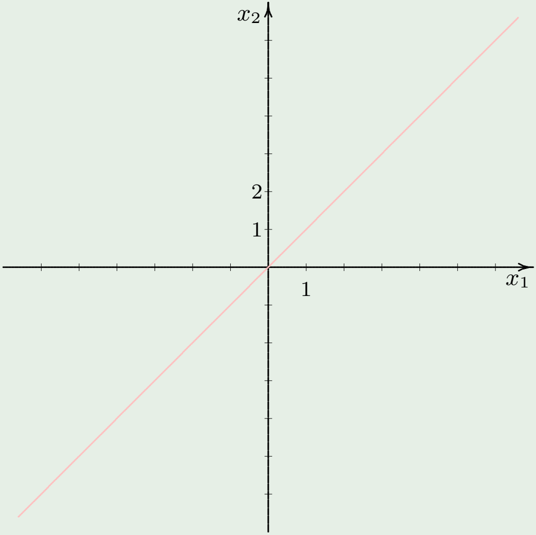
яка є множиною розв'язків лінійного рівняння $x_1 - x_2 = -1$. Тому

$$u + A = \{(\beta, 1 + \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\} = \{(0,\ 1) + (\beta, \beta) \mid \beta \in \mathbb{R}\} = (0,\ 1) + A.$$

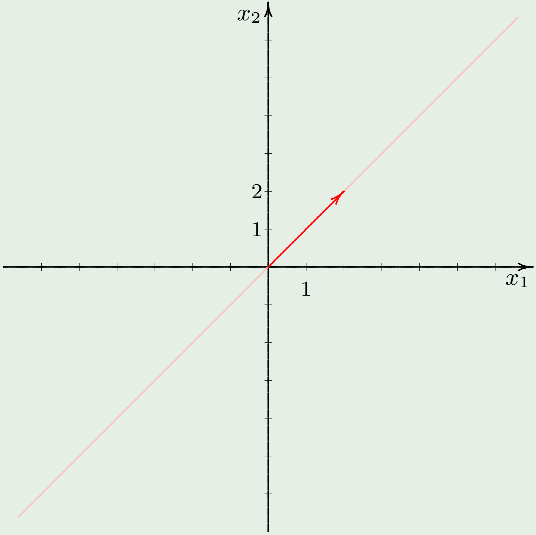
Приклад суміжного класу.



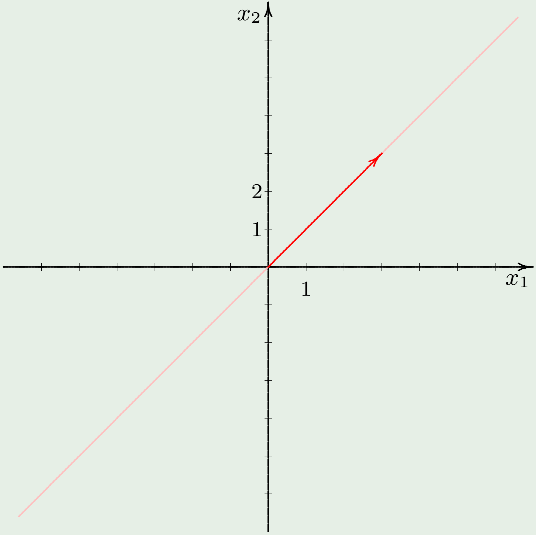
Приклад суміжного класу.



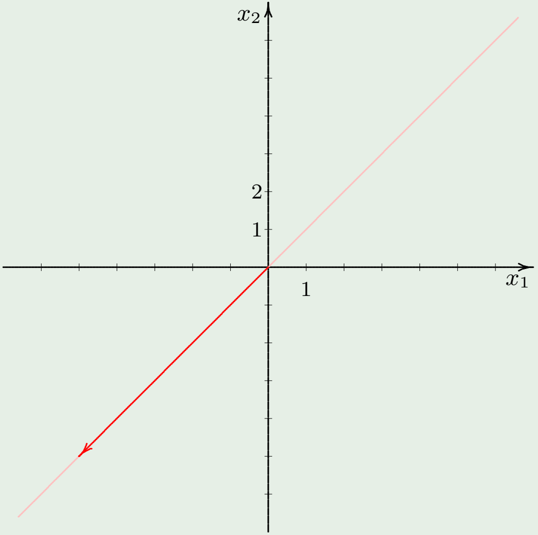
Приклад суміжного класу.



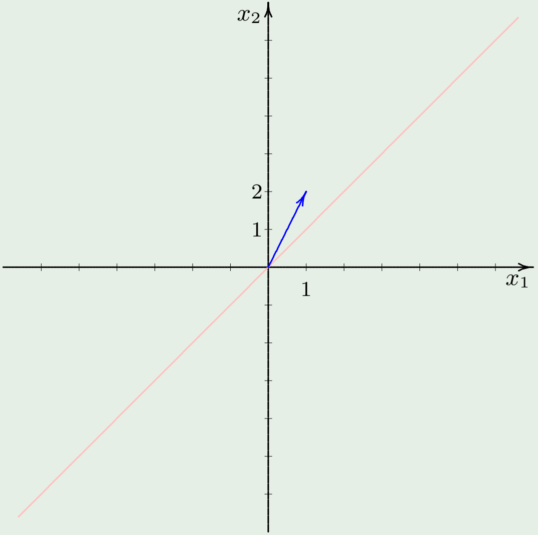
Приклад суміжного класу.



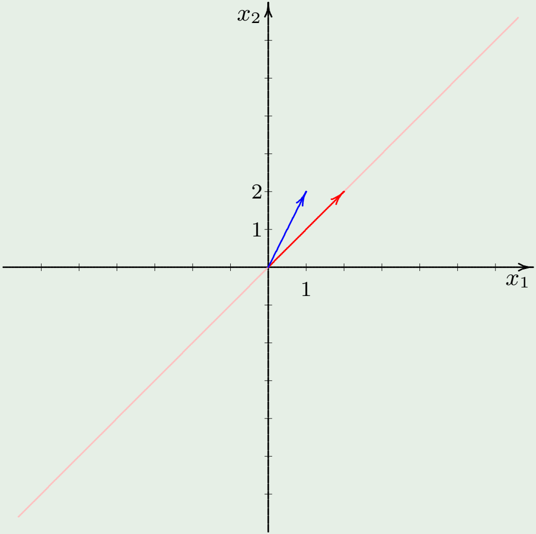
Приклад суміжного класу.



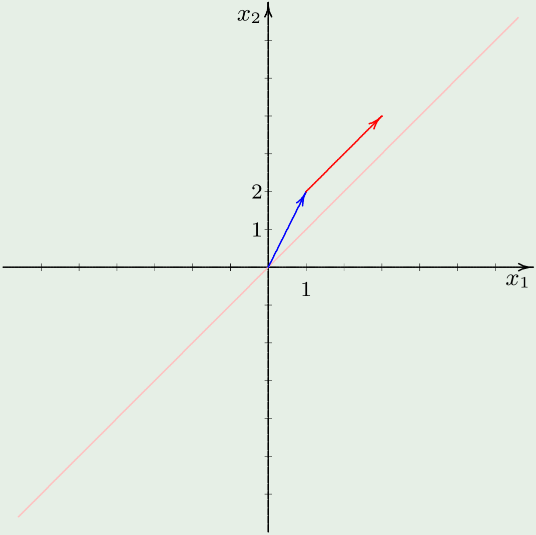
Приклад суміжного класу.



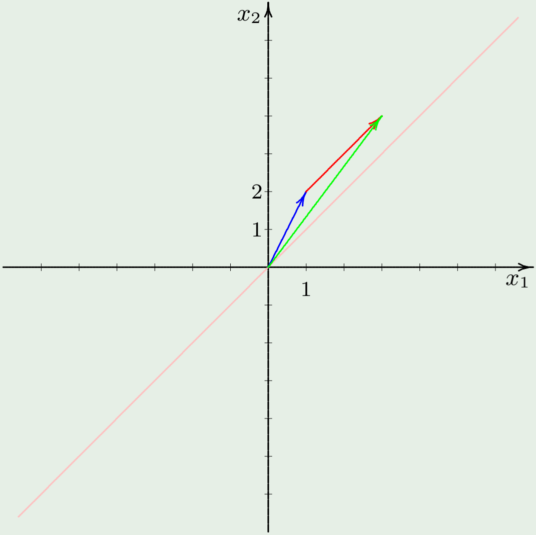
Приклад суміжного класу.



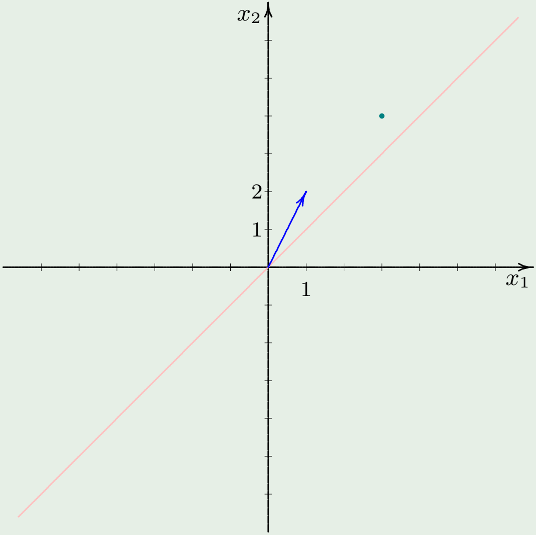
Приклад суміжного класу.



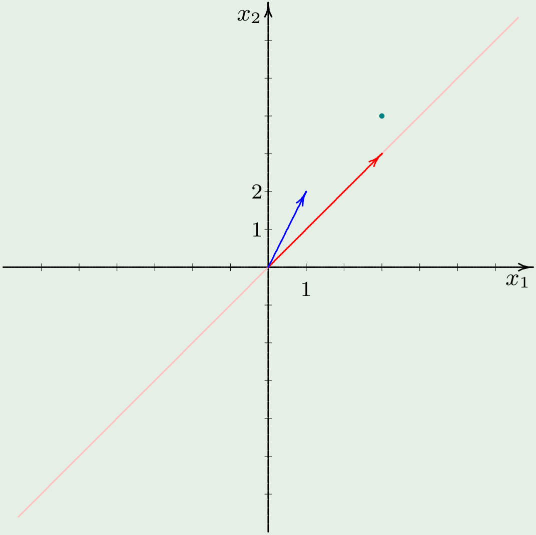
Приклад суміжного класу.



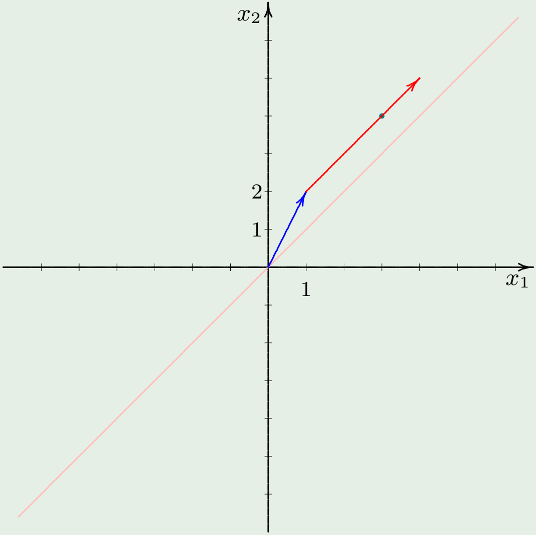
Приклад суміжного класу.



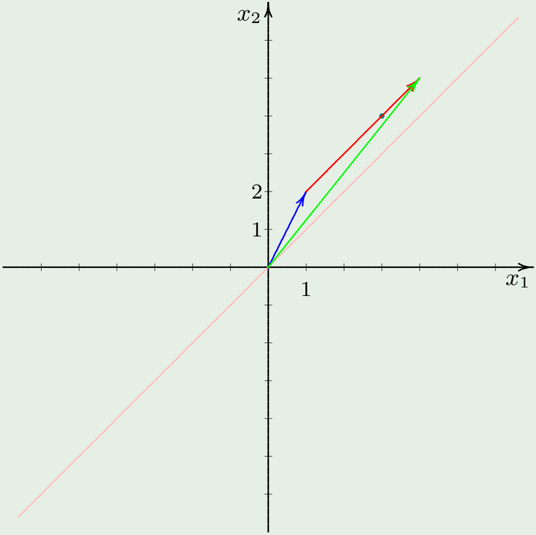
Приклад суміжного класу.



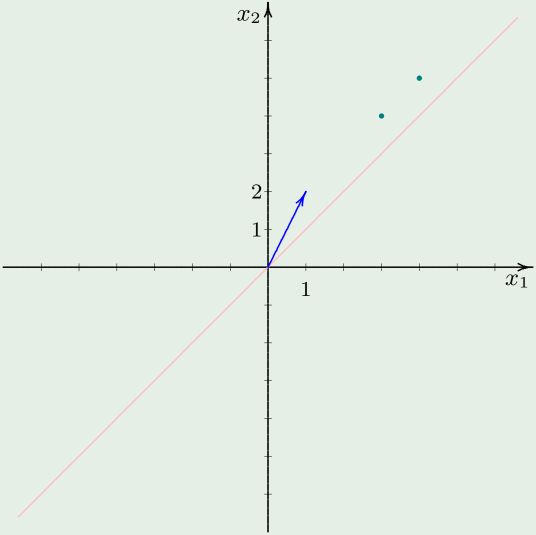
Приклад суміжного класу.



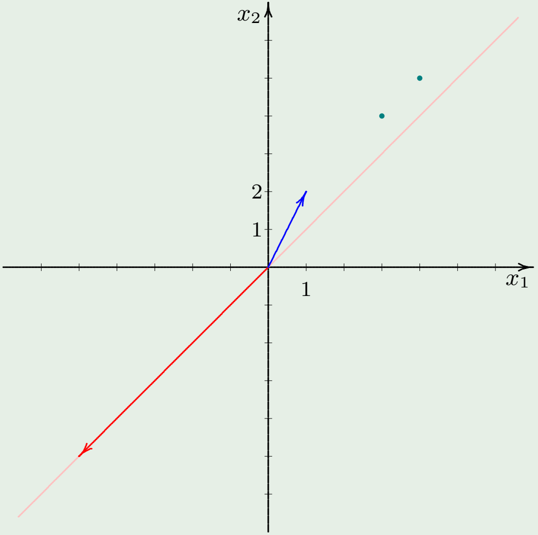
Приклад суміжного класу.



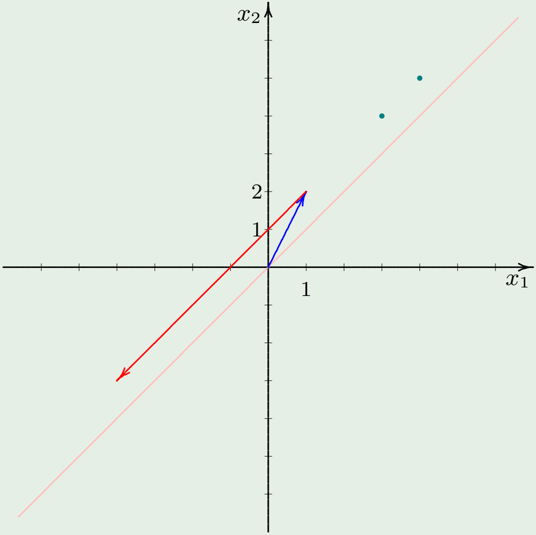
Приклад суміжного класу.



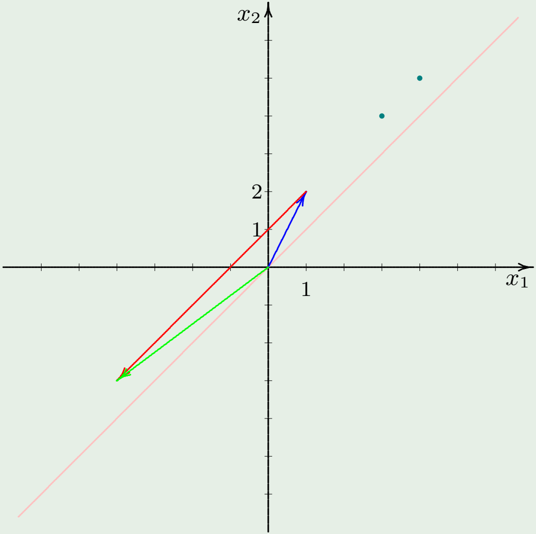
Приклад суміжного класу.



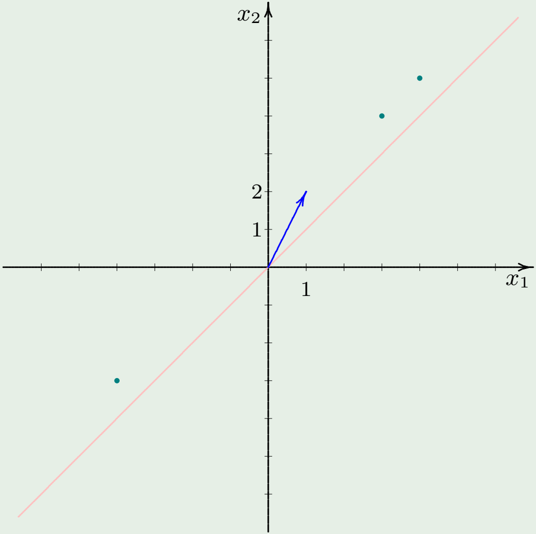
Приклад суміжного класу.



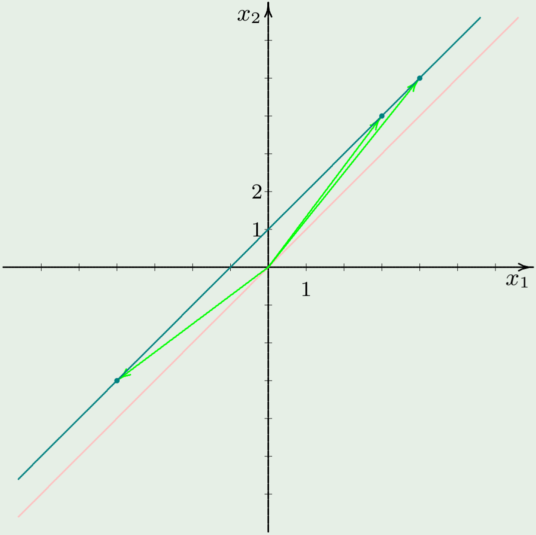
Приклад суміжного класу.



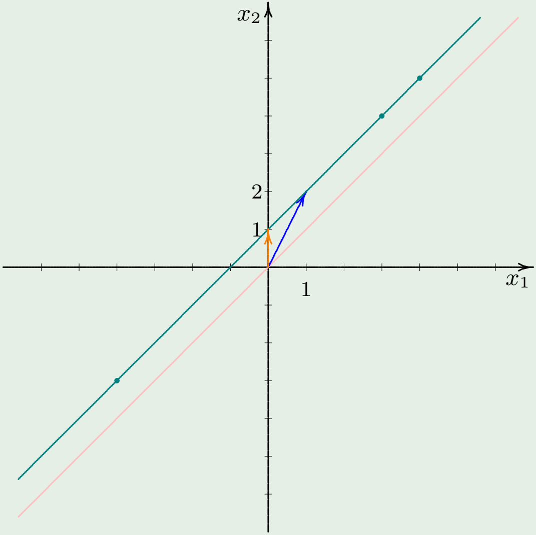
Приклад суміжного класу.



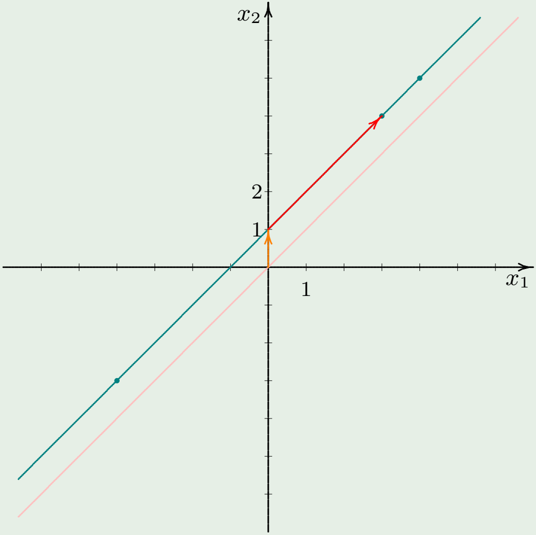
Приклад суміжного класу.



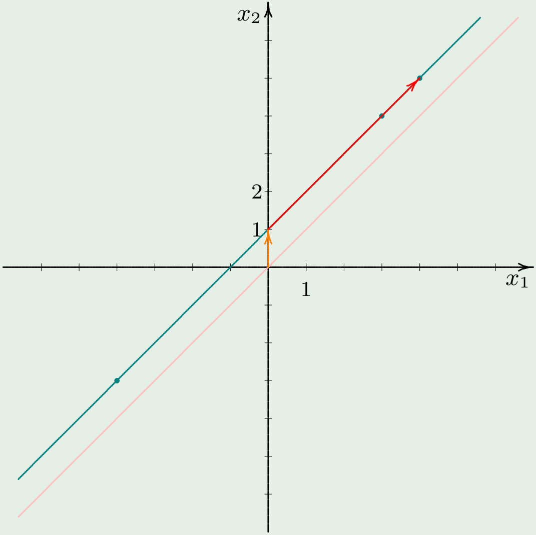
Приклад суміжного класу.



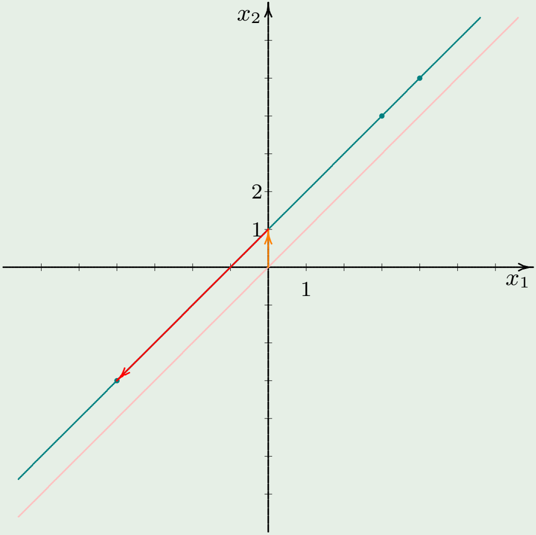
Приклад суміжного класу.



Приклад суміжного класу.

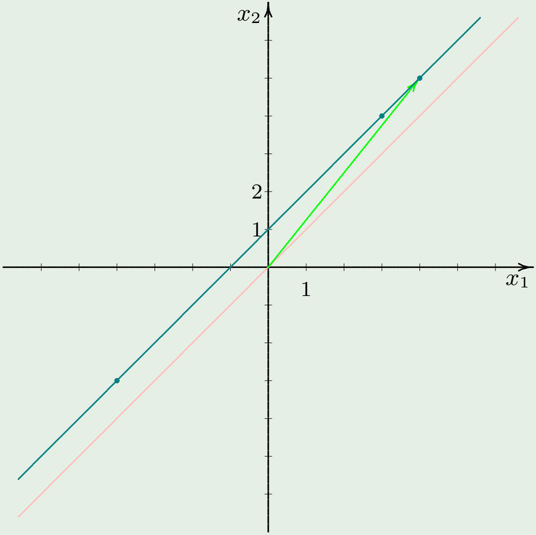


Приклад суміжного класу.

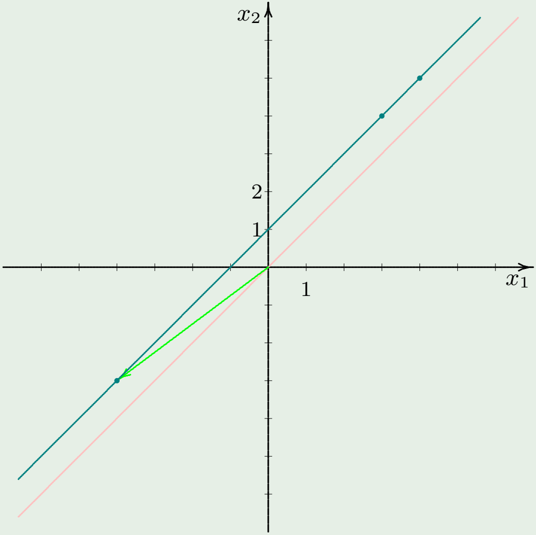


Приклад суміжного класу.

Приклад суміжного класу.



Приклад суміжного класу.



Теорема 1

Нехай A *— підпростір лінійного простору* L *над полем* P

Властивості суміжних класів за даним підпростором.

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і $x, y \in L$.

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$,*

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*

Теорема 1

Нехай A *— підпростір лінійного простору* L *над полем* P *і* $x, y \in L$*. Тоді:*

- *якщо* $x \in A$*, то* $x + A = A$*;*
- *якщо* $x+A \neq y+A$*,*

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x + A \neq y + A$, то переріз $(x + A) \cap (y + A)$ є порожньою множиною;*

Теорема 1

Нехай A *— підпростір лінійного простору* L *над полем* P *і* x, $y \in L$. *Тоді:*

- *якщо* $x \in A$, *то* $x + A = A$;
- *якщо* $x+A \neq y+A$, *то переріз* $(x+A)\cap(y+A)$ *є порожньою множиною;*
- $x + A = y + A$ *тоді і тільки тоді,*

Теорема 1

Нехай A *— підпростір лінійного простору* L *над полем* P *і* $x, y \in L$. *Тоді:*

- *якщо* $x \in A$, *то* $x + A = A$;
- *якщо* $x+A \neq y+A$, *то переріз* $(x+A)\cap(y+A)$ *є порожньою множиною;*
- $x + A = y + A$ *тоді і тільки тоді, коли* $x - y \in A$;

Теорема 1

Нехай A *— підпростір лінійного простору* L *над полем* P *і* x, $y \in L$. *Тоді:*

- *якщо* $x \in A$, *то* $x + A = A$;
- *якщо* $x+A \neq y+A$, *то переріз* $(x+A)\cap(y+A)$ *є порожньою множиною;*
- $x + A = y + A$ *тоді і тільки тоді, коли* $x - y \in A$;
- $x+A+y+A = x + y+A$,

Теорема 1

Нехай A — *підпростір лінійного простору* L *над полем* P *і* x, $y \in L$. *Тоді:*

- *якщо* $x \in A$, *то* $x + A = A$;
- *якщо* $x+A \neq y+A$, *то переріз* $(x+A)\cap(y+A)$ *є порожньою множиною;*
- $x + A = y + A$ *тоді і тільки тоді, коли* $x - y \in A$;
- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$,

Теорема 1

Нехай A *— підпростір лінійного простору* L *над полем* P *і* $x, y \in L$. *Тоді:*

- *якщо* $x \in A$, *то* $x + A = A$;
- *якщо* $x+A \neq y+A$, *то переріз* $(x+A)\cap(y+A)$ *є порожньою множиною;*
- $x + A = y + A$ *тоді і тільки тоді, коли* $x - y \in A$;
- $(x+A)+(y+A) = (x+y)+A$, *тобто сума суміжних класів за підпростором* A *є суміжним класом за цим підпростором.*

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і $x,\ y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x+A \neq y+A$, то переріз $(x+A)\cap(y+A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x + A \neq y + A$, то переріз $(x + A) \cap (y + A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$,

Властивості суміжних класів за даним підпростором.

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і $x, y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x+A \neq y+A$, то переріз $(x+A) \cap (y+A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x+A \neq y+A$, то переріз $(x+A) \cap (y+A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A.

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x+A \neq y+A$, то переріз $(x+A)\cap(y+A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$.

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x+A \neq y+A$, то переріз $(x+A) \cap (y+A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і $x, y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x + A \neq y + A$, то переріз $(x + A) \cap (y + A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$.

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x+A \neq y+A$, то переріз $(x+A)\cap(y+A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$. Оскільки A — підпростір в L

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x + A \neq y + A$, то переріз $(x + A) \cap (y + A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$. Оскільки A — підпростір в L і x, $a \in A$,

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x + A \neq y + A$, то переріз $(x + A) \cap (y + A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$. Оскільки A — підпростір в L і x, $a \in A$, то $a - x \in A$.

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x+A \neq y+A$, то переріз $(x+A)\cap(y+A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$. Оскільки A — підпростір в L і x, $a \in A$, то $a-x \in A$. Тому $a = x+(a-x) \in x+A$,

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x+A \neq y+A$, то переріз $(x+A) \cap (y+A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$. Оскільки A — підпростір в L і x, $a \in A$, то $a - x \in A$. Тому $a = x + (a - x) \in x + A$, а це означає, що $A \subset x + A$.

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x+A \neq y+A$, то переріз $(x+A)\cap(y+A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x+A)+(y+A) = (x+y)+A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$. Оскільки A — підпростір в L і x, $a \in A$, то $a-x \in A$. Тому $a = x+(a-x) \in x+A$, а це означає, що $A \subset x + A$. Таким чином, $x + A = A$.
- Нехай $x + A \neq y + A$.

Теорема 1

Нехай A *— підпростір лінійного простору* L *над полем* P *і* $x, y \in L$*. Тоді:*

- *якщо* $x \in A$*, то* $x + A = A$*;*
- *якщо* $x+A \neq y+A$*, то переріз* $(x+A) \cap (y+A)$ *є порожньою множиною;*
- $x + A = y + A$ *тоді і тільки тоді, коли* $x - y \in A$*;*
- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$*, тобто сума суміжних класів за підпростором* A *є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$. Оскільки A — підпростір в L і $x, a \in A$, то $a - x \in A$. Тому $a = x + (a - x) \in x + A$, а це означає, що $A \subset x + A$. Таким чином, $x + A = A$.
- Нехай $x + A \neq y + A$. Припустимо, що $(x + A) \cap (y + A) \neq \varnothing$

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x + A \neq y + A$, то переріз $(x + A) \cap (y + A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$. Оскільки A — підпростір в L і x, $a \in A$, то $a - x \in A$. Тому $a = x + (a - x) \in x + A$, а це означає, що $A \subset x + A$. Таким чином, $x + A = A$.
- Нехай $x + A \neq y + A$. Припустимо, що $(x + A) \cap (y + A) \neq \varnothing$ і z — деякий елемент перерізу $(x + A) \cap (y + A)$.

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тодi:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x+A \neq y+A$, то переріз $(x+A)\cap(y+A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x+A)+(y+A) = (x+y)+A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$. Оскільки A — підпростір в L і x, $a \in A$, то $a-x \in A$. Тому $a = x+(a-x) \in x+A$, а це означає, що $A \subset x + A$. Таким чином, $x + A = A$.
- Нехай $x + A \neq y + A$. Припустимо, що $(x + A) \cap (y + A) \neq \varnothing$ і z — деякий елемент перерізу $(x + A) \cap (y + A)$. Тоді $z = x + a$

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x + A \neq y + A$, то переріз $(x + A) \cap (y + A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$. Оскільки A — підпростір в L і x, $a \in A$, то $a - x \in A$. Тому $a = x + (a - x) \in x + A$, а це означає, що $A \subset x + A$. Таким чином, $x + A = A$.
- Нехай $x + A \neq y + A$. Припустимо, що $(x + A) \cap (y + A) \neq \varnothing$ і z — деякий елемент перерізу $(x + A) \cap (y + A)$. Тоді $z = x + a$ і $z = y + a'$

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x+A \neq y+A$, то переріз $(x+A)\cap(y+A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$. Оскільки A — підпростір в L і x, $a \in A$, то $a-x \in A$. Тому $a = x+(a-x) \in x+A$, а це означає, що $A \subset x + A$. Таким чином, $x + A = A$.
- Нехай $x + A \neq y + A$. Припустимо, що $(x + A) \cap (y + A) \neq \varnothing$ і z — деякий елемент перерізу $(x + A) \cap (y + A)$. Тоді $z = x + a$ і $z = y + a'$ для деяких елементів a, $a' \in A$.

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x+A \neq y+A$, то переріз $(x+A) \cap (y+A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$. Оскільки A — підпростір в L і x, $a \in A$, то $a - x \in A$. Тому $a = x + (a - x) \in x + A$, а це означає, що $A \subset x + A$. Таким чином, $x + A = A$.
- Нехай $x + A \neq y + A$. Припустимо, що $(x + A) \cap (y + A) \neq \varnothing$ і z — деякий елемент перерізу $(x + A) \cap (y + A)$. Тоді $z = x + a$ і $z = y + a'$ для деяких елементів a, $a' \in A$. Звідси $x + a = y + a'$

Теорема 1

Нехай A — підпростір лінійного простору L над полем P і x, $y \in L$. Тоді:

- *якщо $x \in A$, то $x + A = A$;*
- *якщо $x+A \neq y+A$, то переріз $(x+A) \cap (y+A)$ є порожньою множиною;*
- *$x + A = y + A$ тоді і тільки тоді, коли $x - y \in A$;*
- *$(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$, тобто сума суміжних класів за підпростором A є суміжним класом за цим підпростором.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

- Якщо $x \in A$, то для довільного $a \in A$ сума $x + a$ є елементом підпростору A. Тому $x + A \subset A$. З іншого боку будь-який елемент a із підпростору A можна представити у вигляді $a = x + (a - x)$. Оскільки A — підпростір в L і x, $a \in A$, то $a - x \in A$. Тому $a = x + (a - x) \in x + A$, а це означає, що $A \subset x + A$. Таким чином, $x + A = A$.
- Нехай $x + A \neq y + A$. Припустимо, що $(x + A) \cap (y + A) \neq \varnothing$ і z — деякий елемент перерізу $(x + A) \cap (y + A)$. Тоді $z = x + a$ і $z = y + a'$ для деяких елементів a, $a' \in A$. Звідси $x + a = y + a'$ і як наслідок

Доведення.

$$x = y + (a' - a),$$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' =$$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a''$$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'')$$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' =$$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$
$$y + a'' = (x + (a - a')) + a''$$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$
$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'')$$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$,

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$
$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких $x, y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких $x, y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x =$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких $x, y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0}$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких $x,\, y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких $x, y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких $x, y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких $x, y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$,

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких $x, y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких $x, y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує,

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких $x, y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує, що $x + A = y + A$.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує, що $x + A = y + A$.
- Насамкінець доведемо, що для будь-яких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує, що $x + A = y + A$.
- Насамкінець доведемо, що для будь-яких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$. Довільний вектор, що належить сумі $(x + A) + (y + A)$,

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує, що $x + A = y + A$.
- Насамкінець доведемо, що для будь-яких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$. Довільний вектор, що належить сумі $(x + A) + (y + A)$, має вигляд $(x + a) + (y + a')$, де a, a' деякі вектори із A.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує, що $x + A = y + A$.
- Насамкінець доведемо, що для будь-яких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$. Довільний вектор, що належить сумі $(x + A) + (y + A)$, має вигляд $(x + a) + (y + a')$, де a, a' деякі вектори із A. Але $(x + a) + (y + a')$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує, що $x + A = y + A$.
- Насамкінець доведемо, що для будь-яких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$. Довільний вектор, що належить сумі $(x + A) + (y + A)$, має вигляд $(x + a) + (y + a')$, де a, a' деякі вектори із A. Але $(x+a)+(y+a') = (x+y)+(a+a')$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує, що $x + A = y + A$.
- Насамкінець доведемо, що для будь-яких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$. Довільний вектор, що належить сумі $(x + A) + (y + A)$, має вигляд $(x + a) + (y + a')$, де a, a' деякі вектори із A. Але $(x+a)+(y+a') = (x+y)+(a+a') \in (x+y)+A$.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує, що $x + A = y + A$.
- Насамкінець доведемо, що для будь-яких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$. Довільний вектор, що належить сумі $(x + A) + (y + A)$, має вигляд $(x + a) + (y + a')$, де a, a' деякі вектори із A. Але $(x + a) + (y + a') = (x + y) + (a + a') \in (x + y) + A$. Тому $(x + A) + (y + A) \subset (x + y) + A$.

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких $x, y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує, що $x + A = y + A$.
- Насамкінець доведемо, що для будь-яких векторів $x, y \in L$ справджується рівність $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$. Довільний вектор, що належить сумі $(x + A) + (y + A)$, має вигляд $(x + a) + (y + a')$, де a, a' деякі вектори із A. Але $(x+a)+(y+a') = (x+y)+(a+a') \in (x+y)+A$. Тому $(x+A)+(y+A) \subset (x+y)+A$. З іншого боку для довільного вектора $a'' \in A$ справджується відношення $(x+y)+a''$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує, що $x + A = y + A$.
- Насамкінець доведемо, що для будь-яких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$. Довільний вектор, що належить сумі $(x + A) + (y + A)$, має вигляд $(x + a) + (y + a')$, де a, a' деякі вектори із A. Але $(x+a)+(y+a') = (x+y)+(a+a') \in (x+y)+A$. Тому $(x+A)+(y+A) \subset (x+y)+A$. З іншого боку для довільного вектора $a'' \in A$ справджується відношення $(x+y)+a'' = (x+\bar{0})+(y+a'')$

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує, що $x + A = y + A$.
- Насамкінець доведемо, що для будь-яких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$. Довільний вектор, що належить сумі $(x + A) + (y + A)$, має вигляд $(x + a) + (y + a')$, де a, a' деякі вектори із A. Але $(x + a) + (y + a') = (x + y) + (a + a') \in (x + y) + A$. Тому $(x + A) + (y + A) \subset (x + y) + A$. З іншого боку для довільного вектора $a'' \in A$ справджується відношення $(x + y) + a'' = (x + \bar{0}) + (y + a'') \in$ $\in (x + A) + (y + A)$,

Доведення.

$x = y + (a' - a)$, $y = x + (a - a')$. Тому для довільного вектора $a'' \in A$ справджуються наступні відношення:

$$x + a'' = (y + (a' - a)) + a'' = y + (a' - a + a'') \in y + A,$$

$$y + a'' = (x + (a - a')) + a'' = x + (a - a' + a'') \in x + A.$$

Це означає, що $x + A \subset y + A$ і $y + A \subset x + A$. Отже, $x + A = y + A$, що суперечить умові. Тому $(x + A) \cap (y + A) = \varnothing$.

- Нехай для деяких x, $y \in L$ суміжний клас $x + A$ дорівнює суміжному класу $y + A$. Тоді $x = x + \bar{0} \in x + A = y + A$. Тому існує елемент $a \in A$ такий, що $x = y + a$. Звідси $x - y = a \in A$. Навпаки, якщо $x - y \in A$, то для для деякого вектора $a \in A$ $x = y + a$. Це означає, що $x \in (x + A) \cap (y + A)$. За попередньою властивістю суміжних класів звідси слідує, що $x + A = y + A$.
- Насамкінець доведемо, що для будь-яких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A$. Довільний вектор, що належить сумі $(x + A) + (y + A)$, має вигляд $(x + a) + (y + a')$, де a, a' деякі вектори із A. Але $(x+a)+(y+a') = (x+y)+(a+a') \in (x+y)+A$. Тому $(x+A)+(y+A) \subset (x+y)+A$. З іншого боку для довільного вектора $a'' \in A$ справджується відношення $(x+y)+a'' = (x+\bar{0})+(y+a'') \in$ $\in (x + A) + (y + A)$, яке завершує доведення теореми.

Теорема 2

Нехай L *— лінійний простір над полем* P*,*

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L.

Теорема 2

Нехай L — *лінійний простір над полем* P, A — *підпростір в* L. *Множина*

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

Теорема 2

Нехай L *— лінійний простір над полем* P, A *— підпростір в* L. *Множина*

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A *відносно дії додавання суміжних класів*

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P *на суміжні класи,*

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

Теорема 2

Нехай L *— лінійний простір над полем* P, A *— підпростір в* L. *Множина*

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A *відносно дії додавання суміжних класів*

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P *на суміжні класи, що виконується за таким правилом*

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом.

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом. Тим не менше,

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом. Тим не менше, доведемо, що сума суміжних класів

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом. Тим не менше, доведемо, що сума суміжних класів не залежить від вибору представників суміжних класів, які додаються.

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом. Тим не менше, доведемо, що сума суміжних класів не залежить від вибору представників суміжних класів, які додаються. Нехай x, x', y, y' вектори із лінійного простору L

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом. Тим не менше, доведемо, що сума суміжних класів не залежить від вибору представників суміжних класів, які додаються. Нехай x, x', y, y' вектори із лінійного простору L такі, що $x + A = x' + A$,

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом. Тим не менше, доведемо, що сума суміжних класів не залежить від вибору представників суміжних класів, які додаються. Нехай x, x', y, y' вектори із лінійного простору L такі, що $x + A = x' + A$, $y + A = y' + A$.

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом. Тим не менше, доведемо, що сума суміжних класів не залежить від вибору представників суміжних класів, які додаються. Нехай x, x', y, y' вектори із лінійного простору L такі, що $x + A = x' + A$, $y + A = y' + A$. Тоді $x - x' \in A$

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом. Тим не менше, доведемо, що сума суміжних класів не залежить від вибору представників суміжних класів, які додаються. Нехай x, x', y, y' вектори із лінійного простору L такі, що $x + A = x' + A$, $y + A = y' + A$. Тоді $x - x' \in A$ і $y - y' \in A$.

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом. Тим не менше, доведемо, що сума суміжних класів не залежить від вибору представників суміжних класів, які додаються. Нехай x, x', y, y' вектори із лінійного простору L такі, що $x + A = x' + A$, $y + A = y' + A$. Тоді $x - x' \in A$ і $y - y' \in A$. Тому

$$(x + y) - (x' + y')$$

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом. Тим не менше, доведемо, що сума суміжних класів не залежить від вибору представників суміжних класів, які додаються. Нехай x, x', y, y' вектори із лінійного простору L такі, що $x + A = x' + A$, $y + A = y' + A$. Тоді $x - x' \in A$ і $y - y' \in A$. Тому

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y')$$

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом. Тим не менше, доведемо, що сума суміжних класів не залежить від вибору представників суміжних класів, які додаються. Нехай x, x', y, y' вектори із лінійного простору L такі, що $x + A = x' + A$, $y + A = y' + A$. Тоді $x - x' \in A$ і $y - y' \in A$. Тому

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in A.$$

Теорема 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Множина

$$L/A = \{x + A \mid x \in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x + A) + (y + B) = (x + y) + A \qquad (x, y \in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи, що виконується за таким правилом

$$\gamma(x + A) = \gamma x + A \qquad (\gamma \in P, x \in L)$$

є лінійним простором над полем P.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. За вище доведеною властивістю сума суміжних класів є цілком визначеним суміжним класом. Тим не менше, доведемо, що сума суміжних класів не залежить від вибору представників суміжних класів, які додаються. Нехай x, x', y, y' вектори із лінійного простору L такі, що $x + A = x' + A$, $y + A = y' + A$. Тоді $x - x' \in A$ і $y - y' \in A$. Тому

$$(x + y) - (x' + y') = (x - x') + (y - y') \in A.$$

Отже, $(x + y) + A = (x' + y') + A$.

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу.

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$,

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$.

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x'$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x')$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$.

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором,

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x+A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x+A = x'+A$, то $x-x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x-x') \in A$. Тому $\gamma(x+A) = \gamma(x'+A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x+A)+(y+A) = (x+y)+A$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$
  $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) =$ $\big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) = (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x+A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x+A = x'+A$, то $x-x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x-x') \in A$. Тому $\gamma(x+A) = \gamma(x'+A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x+A)+(y+A) = (x+y)+A = (y+x)+A = (y+A)+(x+A)$;
- $\big((x+A)+(y+A)\big)+(z+A) = \big((x+y)+A\big)+(z+A) =$ $\big((x+y)+z\big)+A = \big(x+(y+z)\big)+A = (x+A)+\big((y+z)+A\big) =$ $= (x+A)+\big((y+A)+(z+A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x+A)\big) = \alpha(\beta x+A) = \alpha(\beta x)+A$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) = = (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x+A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x+A = x'+A$, то $x-x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x-x') \in A$. Тому $\gamma(x+A) = \gamma(x'+A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x+A)+(y+A) = (x+y)+A = (y+x)+A = (y+A)+(x+A)$;
- $\big((x+A)+(y+A)\big)+(z+A) = \big((x+y)+A\big)+(z+A) = \big((x+y)+z\big)+A = \big(x+(y+z)\big)+A = (x+A)+\big((y+z)+A\big) =$
  $= (x+A)+\big((y+A)+(z+A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x+A)\big) = \alpha(\beta x+A) = \alpha(\beta x)+A = (\alpha\beta)x+A = (\alpha\beta)\big(x+A\big)$;

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) =$ $\big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) = = (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x+A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x+A = x'+A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x+A) = \gamma(x'+A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x+A)+(y+A) = (x+y)+A = (y+x)+A = (y+A)+(x+A)$;
- $\big((x+A)+(y+A)\big)+(z+A) = \big((x+y)+A\big)+(z+A) =$ $\big((x+y)+z\big)+A = \big(x+(y+z)\big)+A = (x+A)+\big((y+z)+A\big) =$ $= (x+A)+\big((y+A)+(z+A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x+A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x+A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) =$ $= \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) = = (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) = = \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) =$ $\big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) =$ $= \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big) = \alpha\big((x+y)+A\big)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x+A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x+A=x'+A$, то $x-x'\in A$. Тоді $\gamma x-\gamma x'=\gamma(x-x')\in A$. Тому $\gamma(x+A)=\gamma(x'+A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z\in L$ та елементів α, $\beta\in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x+A)+(y+A)=(x+y)+A=(y+x)+A=(y+A)+(x+A)$;
- $\big((x+A)+(y+A)\big)+(z+A)=\big((x+y)+A\big)+(z+A)=$ $\big((x+y)+z\big)+A=\big(x+(y+z)\big)+A=(x+A)+\big((y+z)+A\big)=$ $=(x+A)+\big((y+A)+(z+A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x+A)\big)=\alpha(\beta x+A)=\alpha(\beta x)+A=(\alpha\beta)x+A=(\alpha\beta)\big(x+A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A)=(\alpha+\beta)x+A=(\alpha x+\beta x)+A=(\alpha x+A)+(\beta x+A)=$ $=\alpha(x+A)+\beta(x+A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big)=\alpha\big((x+y)+A\big)=\alpha(x+y)+A$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) =$ $\big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) =$ $= \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big) = \alpha\big((x+y)+A\big) = \alpha(x+y)+A = (\alpha x+\alpha y)+A$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) =$ $= \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big) = \alpha\big((x+y)+A\big) = \alpha(x+y)+A = (\alpha x+\alpha y)+A =$ $= (\alpha x + A) + (\alpha y + A)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) =$ $\big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) =$ $= \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big) = \alpha\big((x+y)+A\big) = \alpha(x+y)+A = (\alpha x+\alpha y)+A =$ $= (\alpha x + A) + (\alpha y + A) = \alpha(x + A) + \alpha(y + A)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) = (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha + \beta)(x + A) = (\alpha + \beta)x + A = (\alpha x + \beta x) + A = (\alpha x + A) + (\beta x + A) = \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x + A) + (y + A)\big) = \alpha\big((x + y) + A\big) = \alpha(x + y) + A = (\alpha x + \alpha y) + A = (\alpha x + A) + (\alpha y + A) = \alpha(x + A) + \alpha(y + A)$;
- $1(x + A)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) =$ $= \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big) = \alpha\big((x+y)+A\big) = \alpha(x+y)+A = (\alpha x+\alpha y)+A =$ $= (\alpha x + A) + (\alpha y + A) = \alpha(x + A) + \alpha(y + A)$;
- $1(x + A) = 1x + A$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) =$ $\big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) =$ $= \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big) = \alpha\big((x+y)+A\big) = \alpha(x+y)+A = (\alpha x+\alpha y)+A =$ $= (\alpha x + A) + (\alpha y + A) = \alpha(x + A) + \alpha(y + A)$;
- $1(x + A) = 1x + A = x + A$;

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) =$ $= \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big) = \alpha\big((x+y)+A\big) = \alpha(x+y)+A = (\alpha x+\alpha y)+A =$ $= (\alpha x + A) + (\alpha y + A) = \alpha(x + A) + \alpha(y + A)$;
- $1(x + A) = 1x + A = x + A$;
- $(x + A) + (\bar{0} + A)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) =$ $= \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big) = \alpha\big((x+y)+A\big) = \alpha(x+y)+A = (\alpha x+\alpha y)+A =$ $= (\alpha x + A) + (\alpha y + A) = \alpha(x + A) + \alpha(y + A)$;
- $1(x + A) = 1x + A = x + A$;
- $(x + A) + (\bar{0} + A) = (x + \bar{0}) + A$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) =$ $= \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big) = \alpha\big((x+y)+A\big) = \alpha(x+y)+A = (\alpha x+\alpha y)+A =$ $= (\alpha x + A) + (\alpha y + A) = \alpha(x + A) + \alpha(y + A)$;
- $1(x + A) = 1x + A = x + A$;
- $(x + A) + (\bar{0} + A) = (x + \bar{0}) + A = x + A$;

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) =$ $\big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) =$ $= \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big) = \alpha\big((x+y)+A\big) = \alpha(x+y)+A = (\alpha x+\alpha y)+A =$ $= (\alpha x + A) + (\alpha y + A) = \alpha(x + A) + \alpha(y + A)$;
- $1(x + A) = 1x + A = x + A$;
- $(x + A) + (\bar{0} + A) = (x + \bar{0}) + A = x + A$;
- $(x + A) + (-x + A)$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$ $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) =$ $= \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big) = \alpha\big((x+y)+A\big) = \alpha(x+y)+A = (\alpha x+\alpha y)+A =$ $= (\alpha x + A) + (\alpha y + A) = \alpha(x + A) + \alpha(y + A)$;
- $1(x + A) = 1x + A = x + A$;
- $(x + A) + (\bar{0} + A) = (x + \bar{0}) + A = x + A$;
- $(x + A) + (-x + A) = (x + (-x)) + A$

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) = (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) = \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big) = \alpha\big((x+y)+A\big) = \alpha(x+y)+A = (\alpha x+\alpha y)+A = (\alpha x + A) + (\alpha y + A) = \alpha(x + A) + \alpha(y + A)$;
- $1(x + A) = 1x + A = x + A$;
- $(x + A) + (\bar{0} + A) = (x + \bar{0}) + A = x + A$;
- $(x + A) + (-x + A) = (x + (-x)) + A = \bar{0} + A$.

Доведення.

Аналогічно добуток деякого елемента γ поля P на суміжний клас $x + A$ не залежить від вибору представника цього суміжного класу. Дійсно, якщо $x + A = x' + A$, то $x - x' \in A$. Тоді $\gamma x - \gamma x' = \gamma(x - x') \in A$. Тому $\gamma(x + A) = \gamma(x' + A)$.

Оскільки L є лінійним простором, то для будь-яких векторів x, y, $z \in L$ та елементів α, $\beta \in P$ справджуються наступні рівності:

- $(x + A) + (y + A) = (x + y) + A = (y + x) + A = (y + A) + (x + A)$;
- $\big((x + A) + (y + A)\big) + (z + A) = \big((x + y) + A\big) + (z + A) = \big((x + y) + z\big) + A = \big(x + (y + z)\big) + A = (x + A) + \big((y + z) + A\big) =$
  $= (x + A) + \big((y + A) + (z + A)\big)$;
- $\alpha\big(\beta(x + A)\big) = \alpha(\beta x + A) = \alpha(\beta x) + A = (\alpha\beta)x + A = (\alpha\beta)\big(x + A\big)$;
- $(\alpha+\beta)(x+A) = (\alpha+\beta)x+A = (\alpha x+\beta x)+A = (\alpha x+A)+(\beta x+A) =$
  $= \alpha(x + A) + \beta(x + A)$;
- $\alpha\big((x+A)+(y+A)\big) = \alpha\big((x+y)+A\big) = \alpha(x+y)+A = (\alpha x+\alpha y)+A =$
  $= (\alpha x + A) + (\alpha y + A) = \alpha(x + A) + \alpha(y + A)$;
- $1(x + A) = 1x + A = x + A$;
- $(x + A) + (\bar{0} + A) = (x + \bar{0}) + A = x + A$;
- $(x + A) + (-x + A) = (x + (-x)) + A = \bar{0} + A$.

Доведення.

Це означає, що множина L/A всіх суміжних класів за підпростором A є лінійним простором.

Доведення.

Це означає, що множина L/A всіх суміжних класів за підпростором A є лінійним простором. Із останні двох ланцюгів рівностей слідує,

Доведення.

Це означає, що множина L/A всіх суміжних класів за підпростором A є лінійним простором. Із останні двох ланцюгів рівностей слідує, що суміжний клас $\bar{0} + A$

Доведення.

Це означає, що множина L/A всіх суміжних класів за підпростором A є лінійним простором. Із останні двох ланцюгів рівностей слідує, що суміжний клас $\bar{0}+A=A$ відіграє роль нульового вектора,

Доведення.

Це означає, що множина L/A всіх суміжних класів за підпростором A є лінійним простором. Із останні двох ланцюгів рівностей слідує, що суміжний клас $\bar{0}+A=A$ відіграє роль нульового вектора, а суміжний клас $-x+A$

Доведення.

Це означає, що множина L/A всіх суміжних класів за підпростором A є лінійним простором. Із останні двох ланцюгів рівностей слідує, що суміжний клас $\bar{0}+A=A$ відіграє роль нульового вектора, а суміжний клас $-x+A$ — протилежного вектора до суміжного класу $x+A$. □

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P,

Доведення.

Це означає, що множина L/A всіх суміжних класів за підпростором A є лінійним простором. Із останні двох ланцюгів рівностей слідує, що суміжний клас $\bar{0}+A=A$ відіграє роль нульового вектора, а суміжний клас $-x+A$ — протилежного вектора до суміжного класу $x+A$. $\square$

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L.

Доведення.

Це означає, що множина L/A всіх суміжних класів за підпростором A є лінійним простором. Із останні двох ланцюгів рівностей слідує, що суміжний клас $\bar{0}+A=A$ відіграє роль нульового вектора, а суміжний клас $-x+A$ — протилежного вектора до суміжного класу $x+A$. □

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Лінійний простір

$$L/A=\{x+A \mid x\in L\}$$

Доведення.

Це означає, що множина L/A всіх суміжних класів за підпростором A є лінійним простором. Із останні двох ланцюгів рівностей слідує, що суміжний клас $\bar{0}+A=A$ відіграє роль нульового вектора, а суміжний клас $-x+A$ — протилежного вектора до суміжного класу $x+A$. □

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Лінійний простір

$$L/A=\{x+A\mid x\in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A

Доведення.

Це означає, що множина L/A всіх суміжних класів за підпростором A є лінійним простором. Із останні двох ланцюгів рівностей слідує, що суміжний клас $\bar{0}+A=A$ відіграє роль нульового вектора, а суміжний клас $-x+A$ — протилежного вектора до суміжного класу $x+A$. □

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Лінійний простір

$$L/A=\{x+A \mid x\in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x+A)+(y+B)=(x+y)+A \qquad (x,y\in L)$$

Доведення.

Це означає, що множина L/A всіх суміжних класів за підпростором A є лінійним простором. Із останні двох ланцюгів рівностей слідує, що суміжний клас $\bar{0}+A=A$ відіграє роль нульового вектора, а суміжний клас $-x+A$ — протилежного вектора до суміжного класу $x+A$. $\square$

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Лінійний простір

$$L/A=\{x+A \mid x\in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x+A)+(y+B)=(x+y)+A \qquad (x,y\in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи

$$\gamma(x+A)=\gamma x+A \qquad (\gamma\in P, x\in L)$$

Доведення.

Це означає, що множина L/A всіх суміжних класів за підпростором A є лінійним простором. Із останні двох ланцюгів рівностей слідує, що суміжний клас $\bar{0}+A=A$ відіграє роль нульового вектора, а суміжний клас $-x+A$ — протилежного вектора до суміжного класу $x+A$. $\square$

Означення 2

Нехай L — лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Лінійний простір

$$L/A=\{x+A \mid x\in L\}$$

всіх суміжних класів за підпростором A відносно дії додавання суміжних класів

$$(x+A)+(y+B)=(x+y)+A \qquad (x,y\in L)$$

та дії множення елементів поля P на суміжні класи

$$\gamma(x+A)=\gamma x+A \qquad (\gamma\in P, x\in L)$$

називається факторпростором лінійного простору L за підпростором A.

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P,

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L *— скінченновимірний лінійний простір над полем* P, A *— підпростір в* L.

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L *— скінченновимірний лінійний простір над полем* P, A *— підпростір в* L*. Тоді факторпростір* L/A *лінійного простору* L *за підпростором* A *є скінченновимірним*

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — *скінченновимірний лінійний простір над полем* P, A — *підпростір в* L. *Тоді факторпростір* L/A *лінійного простору* L *за підпростором* A *є скінченновимірним і* $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Тоді факторпростір L/A лінійного простору L за підпростором A є скінченновимірним і $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Тоді факторпростір L/A лінійного простору L за підпростором A є скінченновимірним і $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$.

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L *— скінченновимірний лінійний простір над полем* P, A *— підпростір в* L. *Тоді факторпростір* L/A *лінійного простору* L *за підпростором* A *є скінченновимірним і* $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L *— скінченновимірний лінійний простір над полем* P, A *— підпростір в* L. *Тоді факторпростір* L/A *лінійного простору* L *за підпростором* A *є скінченновимірним і* $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A:

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Тоді факторпростір L/A лінійного простору L за підпростором A є скінченновимірним і $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, $\ldots$, $x_{n+1} + A$,

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — *скінченновимірний лінійний простір над полем* P, A — *підпростір в* L. *Тоді факторпростір* L/A *лінійного простору* L *за підпростором* A *є скінченновимірним і* $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, $\ldots$, $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1}

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Тоді факторпростір L/A лінійного простору L за підпростором A є скінченновимірним і $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, …, $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, …, x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L.

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L *— скінченновимірний лінійний простір над полем* P, A *— підпростір в* L. *Тоді факторпростір* L/A *лінійного простору* L *за підпростором* A *є скінченновимірним і* $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, $\ldots$, $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L = n$, то система векторів x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} є лінійно залежною.

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Тоді факторпростір L/A лінійного простору L за підпростором A є скінченновимірним і $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, ..., $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, ..., x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L = n$, то система векторів x_1, x_2, ..., x_{n+1} є лінійно залежною. Тобто існують елементи α_1, α_2, ..., $\alpha_{n+1} \in P$, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \bar{0}.$$

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — *скінченновимірний лінійний простір над полем* P, A — *підпростір в* L. *Тоді факторпростір* L/A *лінійного простору* L *за підпростором* A *є скінченновимірним і* $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, $\ldots$, $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L = n$, то система векторів x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} є лінійно залежною. Тобто існують елементи α_1, α_2, $\ldots$, $\alpha_{n+1} \in P$, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \bar{0}.$$

Тоді

$$\alpha_1(x_1 + A) + \alpha_2(x_2 + A) + \cdots + \alpha_{n+1}(x_{n+1} + A)$$

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Тоді факторпростір L/A лінійного простору L за підпростором A є скінченновимірним і $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, $\dots$, $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, $\dots$, x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L = n$, то система векторів x_1, x_2, $\dots$, x_{n+1} є лінійно залежною. Тобто існують елементи α_1, α_2, $\dots$, $\alpha_{n+1} \in P$, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \bar{0}.$$

Тоді

$$\alpha_1(x_1 + A) + \alpha_2(x_2 + A) + \cdots + \alpha_{n+1}(x_{n+1} + A) =$$
$$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) + A$$

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L *— скінченновимірний лінійний простір над полем* P*,* A *— підпростір в* L*. Тоді факторпростір* L/A *лінійного простору* L *за підпростором* A *є скінченновимірним і* $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$*.*

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, $\ldots$, $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L = n$, то система векторів x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} є лінійно залежною. Тобто існують елементи α_1, α_2, $\ldots$, $\alpha_{n+1} \in P$, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \bar{0}.$$

Тоді

$$\alpha_1(x_1 + A) + \alpha_2(x_2 + A) + \cdots + \alpha_{n+1}(x_{n+1} + A) =$$
$$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) + A = \bar{0} + A$$

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L *— скінченновимірний лінійний простір над полем* P, A *— підпростір в* L. *Тоді факторпростір* L/A *лінійного простору* L *за підпростором* A *є скінченновимірним і* $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, ..., $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, ..., x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L = n$, то система векторів x_1, x_2, ..., x_{n+1} є лінійно залежною. Тобто існують елементи α_1, α_2, ..., $\alpha_{n+1} \in P$, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \bar{0}.$$

Тоді

$$\alpha_1(x_1 + A) + \alpha_2(x_2 + A) + \cdots + \alpha_{n+1}(x_{n+1} + A) =$$
$$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) + A = \bar{0} + A = A.$$

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Тоді факторпростір L/A лінійного простору L за підпростором A є скінченновимірним і $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, $\ldots$, $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L = n$, то система векторів x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} є лінійно залежною. Тобто існують елементи α_1, α_2, $\ldots$, $\alpha_{n+1} \in P$, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \bar{0}.$$

Тоді

$$\alpha_1(x_1 + A) + \alpha_2(x_2 + A) + \cdots + \alpha_{n+1}(x_{n+1} + A) =$$
$$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) + A = \bar{0} + A = A.$$

Таким чином, будь-яка система із $n+1$ векторів,

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Тоді факторпростір L/A лінійного простору L за підпростором A є скінченновимірним і $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, $\ldots$, $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L = n$, то система векторів x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} є лінійно залежною. Тобто існують елементи α_1, α_2, $\ldots$, $\alpha_{n+1} \in P$, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \bar{0}.$$

Тоді

$$\alpha_1(x_1 + A) + \alpha_2(x_2 + A) + \cdots + \alpha_{n+1}(x_{n+1} + A) =$$
$$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) + A = \bar{0} + A = A.$$

Таким чином, будь-яка система із $n+1$ векторів, а отже і будь-яка система із більш ніж n векторів

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L *— скінченновимірний лінійний простір над полем* P, A *— підпростір в* L. *Тоді факторпростір* L/A *лінійного простору* L *за підпростором* A *є скінченновимірним і* $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, ..., $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, ..., x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L = n$, то система векторів x_1, x_2, ..., x_{n+1} є лінійно залежною. Тобто існують елементи α_1, α_2, ..., $\alpha_{n+1} \in P$, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \bar{0}.$$

Тоді

$$\alpha_1(x_1 + A) + \alpha_2(x_2 + A) + \cdots + \alpha_{n+1}(x_{n+1} + A) =$$
$$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) + A = \bar{0} + A = A.$$

Таким чином, будь-яка система із $n+1$ векторів, а отже і будь-яка система із більш ніж n векторів факторпростору L/A

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Тоді факторпростір L/A лінійного простору L за підпростором A є скінченновимірним і $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, ..., $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, ..., x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L = n$, то система векторів x_1, x_2, ..., x_{n+1} є лінійно залежною. Тобто існують елементи α_1, α_2, ..., $\alpha_{n+1} \in P$, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \bar{0}.$$

Тоді

$$\alpha_1(x_1 + A) + \alpha_2(x_2 + A) + \cdots + \alpha_{n+1}(x_{n+1} + A) =$$
$$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) + A = \bar{0} + A = A.$$

Таким чином, будь-яка система із $n+1$ векторів, а отже і будь-яка система із більш ніж n векторів факторпростору L/A є лінійно залежною.

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Тоді факторпростір L/A лінійного простору L за підпростором A є скінченновимірним і $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, $\ldots$, $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L = n$, то система векторів x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} є лінійно залежною. Тобто існують елементи α_1, α_2, $\ldots$, $\alpha_{n+1} \in P$, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \bar{0}.$$

Тоді

$$\alpha_1(x_1 + A) + \alpha_2(x_2 + A) + \cdots + \alpha_{n+1}(x_{n+1} + A) =$$
$$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) + A = \bar{0} + A = A.$$

Таким чином, будь-яка система із $n+1$ векторів, а отже і будь-яка система із більш ніж n векторів факторпростору L/A є лінійно залежною. Це доводить, що факторпростір L/A є скінченновимірним

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Тоді факторпростір L/A лінійного простору L за підпростором A є скінченновимірним і $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, ..., $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, ..., x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L = n$, то система векторів x_1, x_2, ..., x_{n+1} є лінійно залежною. Тобто існують елементи α_1, α_2, ..., $\alpha_{n+1} \in P$, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \bar{0}.$$

Тоді

$$\alpha_1(x_1 + A) + \alpha_2(x_2 + A) + \dots + \alpha_{n+1}(x_{n+1} + A) =$$
$$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) + A = \bar{0} + A = A.$$

Таким чином, будь-яка система із $n+1$ векторів, а отже і будь-яка система із більш ніж n векторів факторпростору L/A є лінійно залежною. Це доводить, що факторпростір L/A є скінченновимірним і його розмірність не перевищує n,

Теорема 3 (про розмірність трьох просторів)

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P, A — підпростір в L. Тоді факторпростір L/A лінійного простору L за підпростором A є скінченновимірним і $\dim_P L = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $\dim_P L = n$. Розглянемо довільну систему $n+1$ векторів (у цьому випадку суміжних класів) факторпростору L/A: $x_1 + A$, $x_2 + A$, $\ldots$, $x_{n+1} + A$, де x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} — деякі вектори лінійного простору L. Оскільки $\dim_P L = n$, то система векторів x_1, x_2, $\ldots$, x_{n+1} є лінійно залежною. Тобто існують елементи α_1, α_2, $\ldots$, $\alpha_{n+1} \in P$, не всі рівні нулю такі, що

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = \bar{0}.$$

Тоді

$$\alpha_1(x_1 + A) + \alpha_2(x_2 + A) + \cdots + \alpha_{n+1}(x_{n+1} + A) =$$
$$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) + A = \bar{0} + A = A.$$

Таким чином, будь-яка система із $n+1$ векторів, а отже і будь-яка система із більш ніж n векторів факторпростору L/A є лінійно залежною. Це доводить, що факторпростір L/A є скінченновимірним і його розмірність не перевищує n, тобто розмірності лінійного простору L над полем P.

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$.

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$,

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором,

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента,

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A.

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$,

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$.

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$).

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n$

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0$

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$,

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$, де b_1, b_2, ..., b_k — деякі вектори із L,

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.
Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$, де b_1, b_2, ..., b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A.

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$, де b_1, b_2, $\ldots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$, де b_1, b_2, ..., b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L.

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$, де b_1, b_2, ..., b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір,

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\dots$, $b_k + A$, де b_1, b_2, $\dots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, $\dots$, b_k — це базис лінійного простору L.

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$, де b_1, b_2, ..., b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, ..., b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище,

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$, де b_1, b_2, ..., b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, ..., b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, ..., b_k була б лінійно залежною,

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$, де b_1, b_2, $\ldots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом факторпростору L/A.

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$, де b_1, b_2, $\ldots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом факторпростору L/A. Далі, для довільного вектора $u \in L$

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.
Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$, де b_1, b_2, ..., b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, ..., b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, ..., b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом факторпростору L/A. Далі, для довільного вектора $u \in L$ знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_k поля P

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$, де b_1, b_2, $\ldots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом факторпростору L/A. Далі, для довільного вектора $u \in L$ знайдуться елементи γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_k поля P такі, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$, де b_1, b_2, ..., b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, ..., b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, ..., b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом факторпростору L/A. Далі, для довільного вектора $u \in L$ знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_k поля P такі, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Звідси

$$u + A = (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) + A.$$

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$, де b_1, b_2, $\ldots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом факторпростору L/A. Далі, для довільного вектора $u \in L$ знайдуться елементи γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_k поля P такі, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Звідси

$$u + A = (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) + A.$$

Тому $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A$.

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\dots$, $b_k + A$, де b_1, b_2, $\dots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, $\dots$, b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, $\dots$, b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\dots$, $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом факторпростору L/A. Далі, для довільного вектора $u \in L$ знайдуться елементи γ_1, γ_2, $\dots$, γ_k поля P такі, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Звідси

$$u + A = (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) + A.$$

Тому $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A$. Оскільки A — нульовий підпростір,

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$, де b_1, b_2, $\ldots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом факторпростору L/A. Далі, для довільного вектора $u \in L$ знайдуться елементи γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_k поля P такі, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Звідси

$$u + A = (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) + A.$$

Тому $u-(\gamma_1 b_1+\gamma_2 b_2+\cdots+\gamma_k b_k) \in A$. Оскільки A — нульовий підпростір,то $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) = \bar{0}$.

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\dots$, $b_k + A$, де b_1, b_2, $\dots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, $\dots$, b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, $\dots$, b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\dots$, $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом факторпростору L/A. Далі, для довільного вектора $u \in L$ знайдуться елементи γ_1, γ_2, $\dots$, γ_k поля P такі, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Звідси

$$u + A = (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) + A.$$

Тому $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A$. Оскільки A — нульовий підпростір,то $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) = \bar{0}$. Отже, $u = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k$.

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$, де b_1, b_2, $\ldots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом факторпростору L/A. Далі, для довільного вектора $u \in L$ знайдуться елементи γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_k поля P такі, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Звідси

$$u + A = (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) + A.$$

Тому $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A$. Оскільки A — нульовий підпростір,то $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) = \bar{0}$. Отже, $u = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k$. Таким чином, $k = \dim_P L = n$

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\dots$, $b_k + A$, де b_1, b_2, $\dots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, $\dots$, b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, $\dots$, b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\dots$, $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом факторпростору L/A. Далі, для довільного вектора $u \in L$ знайдуться елементи γ_1, γ_2, $\dots$, γ_k поля P такі, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Звідси

$$u + A = (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) + A.$$

Тому $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A$. Оскільки A — нульовий підпростір,то $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) = \bar{0}$. Отже, $u = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k$. Таким чином, $k = \dim_P L = n = 0 + n$

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\dots$, $b_k + A$, де b_1, b_2, $\dots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, $\dots$, b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, $\dots$, b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\dots$, $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом факторпростору L/A. Далі, для довільного вектора $u \in L$ знайдуться елементи γ_1, γ_2, $\dots$, γ_k поля P такі, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \dots + \gamma_k(b_k + A).$$

Звідси

$$u + A = (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_k b_k) + A.$$

Тому $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_k b_k) \in A$. Оскільки A — нульовий підпростір,то $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_k b_k) = \bar{0}$. Отже, $u = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \dots + \gamma_k b_k$. Таким чином, $k = \dim_P L = n = 0 + n = \dim_P A + \dim_P L/A$

Доведення.

Нехай $\dim_P L/A = k$. Якщо $k = 0$, то факторпростір L/A є нульовим простором, тобто складається лише з одного елемента, а саме суміжного класу A. Тому для будь-якого $x \in L$ $x + A = A$, що можливо лише у випадку, коли $x \in A$. Це означає, що $L \subset A$ і як наслідок $A = L$ (очевидно $A \subset L$). Тому $\dim_P L = n = n + 0 = \dim_P A + \dim_P L/A$.

Нехай $k \neq 0$ і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$, де b_1, b_2, $\ldots$, b_k — деякі вектори із L, є базисом факторпростору L/A. Можливі випадки: A є нульовим або ненульовим підпростором в L. Якщо A — нульовий підпростір, то доведемо, що система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k — це базис лінійного простору L. Як показано вище, якщо система векторів b_1, b_2, $\ldots$, b_k була б лінійно залежною, то лінійно залежною була б і система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$. А це суперечить припущенню, що остання є базисом факторпростору L/A. Далі, для довільного вектора $u \in L$ знайдуться елементи γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_k поля P такі, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Звідси

$$u + A = (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) + A.$$

Тому $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A$. Оскільки A — нульовий підпростір,то $u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) = \bar{0}$. Отже, $u = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k$. Таким чином, $k = \dim_P L = n = 0 + n = \dim_P A + \dim_P L/A$ і теорема доведена у цьому випадку.

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L.

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A.

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L.

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною.

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — елементи поля P, не всі рівні нулю,

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Тоді

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k =$$

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \dots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \dots, a_l, b_1, b_2, \dots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Тоді

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_l a_l$$

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Тоді

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_l a_l \in A,$$

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Тоді

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_l a_l \in A,$$

а тому

$\beta_1(b_1 + A) + \beta_2(b_2 + A) + \cdots + \beta_k(b_k + A) =$

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Тоді

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_l a_l \in A,$$

а тому

$$\beta_1(b_1 + A) + \beta_2(b_2 + A) + \cdots + \beta_k(b_k + A) = (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k) + A = A.$$

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Тоді

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_l a_l \in A,$$

а тому

$$\beta_1(b_1+A)+\beta_2(b_2+A)+\cdots+\beta_k(b_k+A) = (\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\cdots+\beta_k b_k)+A = A.$$

Оскільки система суміжних класів $b_1 + A, b_2 + A, \ldots, b_k + A$ є базисом факторпростору L/A,

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Тоді

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_l a_l \in A,$$

а тому

$$\beta_1(b_1+A)+\beta_2(b_2+A)+\cdots+\beta_k(b_k+A) = (\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\cdots+\beta_k b_k)+A = A.$$

Оскільки система суміжних класів $b_1 + A, b_2 + A, \ldots, b_k + A$ є базисом факторпростору L/A, то із попередньої рівності слідує,

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Тоді

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_l a_l \in A,$$

а тому

$$\beta_1(b_1+A)+\beta_2(b_2+A)+\cdots+\beta_k(b_k+A) = (\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\cdots+\beta_k b_k)+A = A.$$

Оскільки система суміжних класів $b_1 + A, b_2 + A, \ldots, b_k + A$ є базисом факторпростору L/A, то із попередньої рівності слідує, що $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\ldots$, $\beta_k = 0$.

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Тоді

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_l a_l \in A,$$

а тому

$$\beta_1(b_1+A)+\beta_2(b_2+A)+\cdots+\beta_k(b_k+A) = (\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\cdots+\beta_k b_k)+A = A.$$

Оскільки система суміжних класів $b_1 + A, b_2 + A, \ldots, b_k + A$ є базисом факторпростору L/A, то із попередньої рівності слідує, що $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\ldots$, $\beta_k = 0$. Тоді

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l = \bar{0}.$$

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_l, b_1, b_2, \ldots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Тоді

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_l a_l \in A,$$

а тому

$$\beta_1(b_1 + A) + \beta_2(b_2 + A) + \cdots + \beta_k(b_k + A) = (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k) + A = A.$$

Оскільки система суміжних класів $b_1 + A, b_2 + A, \ldots, b_k + A$ є базисом факторпростору L/A, то із попередньої рівності слідує, що $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\ldots$, $\beta_k = 0$. Тоді

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l = \bar{0}.$$

Але через те, що $a_1, a_2, \ldots, a_l$ — базис підпростору A,

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і a_1, a_2, ..., a_l — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів a_1, a_2, ..., a_l, b_1, b_2, ..., b_k є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що α_1, α_2, ..., α_l, β_1, β_2, ..., β_k — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Тоді

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \cdots + \beta_k b_k = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \cdots - \alpha_l a_l \in A,$$

а тому

$$\beta_1(b_1+A)+\beta_2(b_2+A)+\cdots+\beta_k(b_k+A) = (\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\cdots+\beta_k b_k)+A = A.$$

Оскільки система суміжних класів $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$ є базисом факторпростору L/A, то із попередньої рівності слідує, що $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, ..., $\beta_k = 0$. Тоді

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_l a_l = \bar{0}.$$

Але через те, що a_1, a_2, ..., a_l — базис підпростору A, то звідси одержимо, що $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, ..., $\alpha_l = 0$.

Доведення.

Насамкінець розглянемо випадок, коли A — ненульовий підпростір лінійного простору L. Нехай $\dim_P A = l$ і $a_1, a_2, \dots, a_l$ — базис підпростору A. Покажемо, що система векторів $a_1, a_2, \dots, a_l, b_1, b_2, \dots, b_k$ є базисом лінійного простору L. Від протилежного доведемо, що ця система векторів є лінійно незалежною. Припустимо, що $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ — елементи поля P, не всі рівні нулю, що

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_l a_l + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_k b_k = \bar{0}.$$

Тоді

$$\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_k b_k = -\alpha_1 a_1 - \alpha_2 a_2 - \dots - \alpha_l a_l \in A,$$

а тому

$$\beta_1(b_1+A)+\beta_2(b_2+A)+\dots+\beta_k(b_k+A) = (\beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\dots+\beta_k b_k)+A = A.$$

Оскільки система суміжних класів $b_1 + A, b_2 + A, \dots, b_k + A$ є базисом факторпростору L/A, то із попередньої рівності слідує, що $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = 0$, $\dots$, $\beta_k = 0$. Тоді

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_l a_l = \bar{0}.$$

Але через те, що $a_1, a_2, \dots, a_l$ — базис підпростору A, то звідси одержимо, що $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\dots$, $\alpha_l = 0$. Одержана суперечність доводить лінійну незалежність системи векторів $a_1, a_2, \dots, a_l, b_1, b_2, \dots, b_k$.

Доведення.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L

Доведення.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L є лінійною комбінацією цієї системи векторів.

Доведення.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L є лінійною комбінацією цієї системи векторів. Знову ж таки, через те, що $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$ — базис факторпростору L/A, то знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_k поля P,

Доведення.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L є лінійною комбінацією цієї системи векторів. Знову ж таки, через те, що $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$ — базис факторпростору L/A, то знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_k поля P, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Доведення.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L є лінійною комбінацією цієї системи векторів. Знову ж таки, через те, що $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$ — базис факторпростору L/A, то знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_k поля P, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Оскільки

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A,$$

Доведення.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L є лінійною комбінацією цієї системи векторів. Знову ж таки, через те, що $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$ — базис факторпростору L/A, то знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_k поля P, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Оскільки

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A,$$

і a_1, a_2, ..., a_l — базис підпростору A,

Доведення.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L є лінійною комбінацією цієї системи векторів. Знову ж таки, через те, що $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$ — базис факторпростору L/A, то знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_k поля P, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Оскільки

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A,$$

і a_1, a_2, ..., a_l — базис підпростору A, то знайдуться елементи δ_1, δ_2, ..., δ_l поля P,

Доведення.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L є лінійною комбінацією цієї системи векторів. Знову ж таки, через те, що $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$ — базис факторпростору L/A, то знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_k поля P, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Оскільки

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A,$$

і a_1, a_2, ..., a_l — базис підпростору A, то знайдуться елементи δ_1, δ_2, ..., δ_l поля P, що

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_l a_l.$$

Доведення.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L є лінійною комбінацією цієї системи векторів. Знову ж таки, через те, що $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$ — базис факторпростору L/A, то знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_k поля P, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Оскільки

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A,$$

і a_1, a_2, ..., a_l — базис підпростору A, то знайдуться елементи δ_1, δ_2, ..., δ_l поля P, що

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_l a_l.$$

Отже,

$$u = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_l a_l + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k,$$

Доведення.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L є лінійною комбінацією цієї системи векторів. Знову ж таки, через те, що $b_1 + A$, $b_2 + A$, $\ldots$, $b_k + A$ — базис факторпростору L/A, то знайдуться елементи γ_1, γ_2, $\ldots$, γ_k поля P, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Оскільки

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A,$$

і a_1, a_2, $\ldots$, a_l — базис підпростору A, то знайдуться елементи δ_1, δ_2, $\ldots$, δ_l поля P, що

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_l a_l.$$

Отже,

$$u = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_l a_l + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k,$$

що й потрібно було довести.

Доведення.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L є лінійною комбінацією цієї системи векторів. Знову ж таки, через те, що $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$ — базис факторпростору L/A, то знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_k поля P, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Оскільки

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A,$$

і a_1, a_2, ..., a_l — базис підпростору A, то знайдуться елементи δ_1, δ_2, ..., δ_l поля P, що

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_l a_l.$$

Отже,

$$u = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_l a_l + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k,$$

що й потрібно було довести.
За теоремою про розмірність лінійного простору

$$\dim_P L = l + k$$

Доведення.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L є лінійною комбінацією цієї системи векторів. Знову ж таки, через те, що $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$ — базис факторпростору L/A, то знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_k поля P, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Оскільки

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A,$$

і a_1, a_2, ..., a_l — базис підпростору A, то знайдуться елементи δ_1, δ_2, ..., δ_l поля P, що

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_l a_l.$$

Отже,

$$u = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_l a_l + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k,$$

що й потрібно було довести.
За теоремою про розмірність лінійного простору

$$\dim_P L = l + k = \dim_P A + \dim_P L/A.$$

Доведення.

Покажемо, що будь-який вектор u лінійного простору L є лінійною комбінацією цієї системи векторів. Знову ж таки, через те, що $b_1 + A$, $b_2 + A$, ..., $b_k + A$ — базис факторпростору L/A, то знайдуться елементи γ_1, γ_2, ..., γ_k поля P, що

$$u + A = \gamma_1(b_1 + A) + \gamma_2(b_2 + A) + \cdots + \gamma_k(b_k + A).$$

Оскільки

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) \in A,$$

і a_1, a_2, ..., a_l — базис підпростору A, то знайдуться елементи δ_1, δ_2, ..., δ_l поля P, що

$$u - (\gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k) = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_l a_l.$$

Отже,

$$u = \delta_1 a_1 + \delta_2 a_2 + \cdots + \delta_l a_l + \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \cdots + \gamma_k b_k,$$

що й потрібно було довести.
За теоремою про розмірність лінійного простору

$$\dim_P L = l + k = \dim_P A + \dim_P L/A.$$

Теорема доведена. □