Лінійні відображення скінченновимірних лінійних просторів. Матриця лінійного відображення. Лінійний оператор. Матриця лінійного оператора. Формули для координат образу вектора. Зв'язок між матрицями одного і того ж оператора в різних базисах

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

6 березня 2023 року

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L *є скінченновимірним лінійним простором над полем* P*,*

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L *є скінченновимірним лінійним простором над полем* P, L' *— лінійним простором на полем* P,

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L *є скінченновимірним лінійним простором над полем* P, L' — *лінійним простором на полем* P, $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, L' — лінійним простором на полем P, a_1, a_2, $\ldots$, a_n — деякий базис лінійного простору L.

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, L' — лінійним простором на полем P, a_1, a_2, ..., a_n — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a'_1, a'_2, ..., a'_n лінійного простору L'

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L *є скінченновимірним лінійним простором над полем* P, L' *— лінійним простором на полем* P, a_1, a_2, $\dots$, a_n *— деякий базис лінійного простору* L. *Тоді для будь-яких векторів* a_1', a_2', $\dots$, a_n' *лінійного простору* L' *існує єдине лінійне відображення* $\varphi : L \to L'$

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L *є скінченновимірним лінійним простором над полем* P, L' *— лінійним простором на полем* P, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *— деякий базис лінійного простору* L. *Тоді для будь-яких векторів* $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ *лінійного простору* L' *існує єдине лінійне відображення* $\varphi : L \to L'$ *таке, що*

$$\varphi(a_1) = a_1', \quad \varphi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \varphi(a_n) = a_n'.$$

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, L' — лінійним простором на полем P, a_1, a_2, $\dots$, a_n — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a_1', a_2', $\dots$, a_n' лінійного простору L' існує єдине лінійне відображення $\varphi : L \to L'$ таке, що

$$\varphi(a_1) = a_1', \quad \varphi(a_2) = a_2', \quad \dots, \quad \varphi(a_n) = a_n'.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, L' — лінійним простором на полем P, a_1, a_2, $\dots$, a_n — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a'_1, a'_2, $\dots$, a'_n лінійного простору L' існує єдине лінійне відображення $\varphi : L \to L'$ таке, що

$$\varphi(a_1) = a'_1, \quad \varphi(a_2) = a'_2, \quad \dots, \quad \varphi(a_n) = a'_n.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і a'_1, a'_2, $\dots$, a'_n

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, L' — лінійним простором на полем P, a_1, a_2, …, a_n — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a'_1, a'_2, …, a'_n лінійного простору L' існує єдине лінійне відображення $\varphi : L \to L'$ таке, що

$$\varphi(a_1) = a'_1, \quad \varphi(a_2) = a'_2, \quad \ldots, \quad \varphi(a_n) = a'_n.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і a'_1, a'_2, …, a'_n — будь-які вектори лінійного простору L'.

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, L' — лінійним простором на полем P, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ лінійного простору L' існує єдине лінійне відображення $\varphi : L \to L'$ таке, що

$$\varphi(a_1) = a_1', \quad \varphi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \varphi(a_n) = a_n'.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ — будь-які вектори лінійного простору L'. Розглянемо відповідність φ із лінійного простору L у лінійний простір L',

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, L' — лінійним простором на полем P, a_1, a_2, $\ldots$, a_n — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a_1', a_2', $\ldots$, a_n' лінійного простору L' існує єдине лінійне відображення $\varphi : L \to L'$ таке, що

$$\varphi(a_1) = a_1', \quad \varphi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \varphi(a_n) = a_n'.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і a_1', a_2', $\ldots$, a_n' — будь-які вектори лінійного простору L'. Розглянемо відповідність φ із лінійного простору L у лінійний простір L', задану наступним чином:

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, L' — лінійним простором на полем P, a_1, a_2, $\dots$, a_n — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a_1', a_2', $\dots$, a_n' лінійного простору L' існує єдине лінійне відображення $\varphi : L \to L'$ таке, що

$$\varphi(a_1) = a_1', \quad \varphi(a_2) = a_2', \quad \dots, \quad \varphi(a_n) = a_n'.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і a_1', a_2', $\dots$, a_n' — будь-які вектори лінійного простору L'. Розглянемо відповідність φ із лінійного простору L у лінійний простір L', задану наступним чином: кожному вектору a із L

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, L' — лінійним простором на полем P, $a_1, a_2, \dots, a_n$ — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів $a_1', a_2', \dots, a_n'$ лінійного простору L' існує єдине лінійне відображення $\varphi : L \to L'$ таке, що

$$\varphi(a_1) = a_1', \quad \varphi(a_2) = a_2', \quad \dots, \quad \varphi(a_n) = a_n'.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $a_1', a_2', \dots, a_n'$ — будь-які вектори лінійного простору L'. Розглянемо відповідність φ із лінійного простору L у лінійний простір L', задану наступним чином: кожному вектору a із L ставимо у відповідність лінійну комбінацію системи векторів $a_1', a_2', \dots, a_n'$

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, L' — лінійним простором на полем P, a_1, a_2, $\dots$, a_n — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів a_1', a_2', $\dots$, a_n' лінійного простору L' існує єдине лінійне відображення $\varphi : L \to L'$ таке, що

$$\varphi(a_1) = a_1', \quad \varphi(a_2) = a_2', \quad \dots, \quad \varphi(a_n) = a_n'.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і a_1', a_2', $\dots$, a_n' — будь-які вектори лінійного простору L'. Розглянемо відповідність φ із лінійного простору L у лінійний простір L', задану наступним чином: кожному вектору a із L ставимо у відповідність лінійну комбінацію системи векторів a_1', a_2', $\dots$, a_n' з коефіцієнтами, кожен з яких є відповідною координатою вектора a у базисі a_1, a_2, $\dots$, a_n лінійного простору L.

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, L' — лінійним простором на полем P, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ лінійного простору L' існує єдине лінійне відображення $\varphi : L \to L'$ таке, що

$$\varphi(a_1) = a'_1, \quad \varphi(a_2) = a'_2, \quad \ldots, \quad \varphi(a_n) = a'_n.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ — будь-які вектори лінійного простору L'. Розглянемо відповідність φ із лінійного простору L у лінійний простір L', задану наступним чином: кожному вектору a із L ставимо у відповідність лінійну комбінацію системи векторів $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ з коефіцієнтами, кожен з яких є відповідною координатою вектора a у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L. Тобто, якщо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, L' — лінійним простором на полем P, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ лінійного простору L' існує єдине лінійне відображення $\varphi : L \to L'$ таке, що

$$\varphi(a_1) = a_1', \quad \varphi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \varphi(a_n) = a_n'.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ — будь-які вектори лінійного простору L'. Розглянемо відповідність φ із лінійного простору L у лінійний простір L', задану наступним чином: кожному вектору a із L ставимо у відповідність лінійну комбінацію системи векторів $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ з коефіцієнтами, кожен з яких є відповідною координатою вектора a у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L. Тобто, якщо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

— розклад вектора a за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L,

Теорема 1 (про існування і єдиність лінійного відображення)

Нехай L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, L' — лінійним простором на полем P, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — деякий базис лінійного простору L. Тоді для будь-яких векторів $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ лінійного простору L' існує єдине лінійне відображення $\varphi : L \to L'$ таке, що

$$\varphi(a_1) = a_1', \quad \varphi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \varphi(a_n) = a_n'.$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ — будь-які вектори лінійного простору L'. Розглянемо відповідність φ із лінійного простору L у лінійний простір L', задану наступним чином: кожному вектору a із L ставимо у відповідність лінійну комбінацію системи векторів $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ з коефіцієнтами, кожен з яких є відповідною координатою вектора a у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L. Тобто, якщо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

— розклад вектора a за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L, то

$$\varphi(a) = \alpha_1 a_1' + \alpha_2 a_2' + \cdots + \alpha_n a_n'.$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно,

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням.

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням.

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L,

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n,$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L,

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) =$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n)$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \dots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1' + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2' + \dots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n'$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1' + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2' + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n' =$$

$$= \beta(\beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n') + \gamma(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_n a_n')$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1' + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2' + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n' =$$

$$= \beta(\beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n') + \gamma(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_n a_n') = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1' + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2' + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n' =$$

$$= \beta(\beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n') + \gamma(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_n a_n') = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).$$

До того ж

$$\varphi(a_1) =$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1' + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2' + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n' =$$

$$= \beta(\beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n') + \gamma(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_n a_n') = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).$$

До того ж

$$\varphi(a_1) = \varphi(1a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_n)$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a'_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a'_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a'_n =$$

$$= \beta(\beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \cdots + \beta_n a'_n) + \gamma(\gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_n a'_n) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).$$

До того ж

$$\varphi(a_1) = \varphi(1a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_n) = 1a'_1 + 0a'_2 + \cdots + 0a'_n$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1' + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2' + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n' =$$

$$= \beta(\beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n') + \gamma(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_n a_n') = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).$$

До того ж

$$\varphi(a_1) = \varphi(1a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_n) = 1a_1' + 0a_2' + \cdots + 0a_n' = a_1',$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1' + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2' + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n' =$$

$$= \beta(\beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n') + \gamma(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_n a_n') = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).$$

До того ж

$$\varphi(a_1) = \varphi(1a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_n) = 1a_1' + 0a_2' + \cdots + 0a_n' = a_1',$$

$$\varphi(a_2) =$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \dots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a'_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a'_2 + \dots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a'_n =$$

$$= \beta(\beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \dots + \beta_n a'_n) + \gamma(\gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \dots + \gamma_n a'_n) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).$$

До того ж

$$\varphi(a_1) = \varphi(1a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_n) = 1a'_1 + 0a'_2 + \dots + 0a'_n = a'_1,$$
$$\varphi(a_2) = \varphi(0a_1 + 1a_2 + \dots + 0a_n)$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, $\dots$, a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \dots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1' + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2' + \dots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n' =$$

$$= \beta(\beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \dots + \beta_n a_n') + \gamma(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \dots + \gamma_n a_n') = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).$$

До того ж

$$\varphi(a_1) = \varphi(1a_1 + 0a_2 + \dots + 0a_n) = 1a_1' + 0a_2' + \dots + 0a_n' = a_1',$$
$$\varphi(a_2) = \varphi(0a_1 + 1a_2 + \dots + 0a_n) = 0a_1' + 1a_2' + \dots + 0a_n'$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1' + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2' + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n' =$$

$$= \beta(\beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n') + \gamma(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_n a_n') = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).$$

До того ж

$$\varphi(a_1) = \varphi(1a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_n) = 1a_1' + 0a_2' + \cdots + 0a_n' = a_1',$$
$$\varphi(a_2) = \varphi(0a_1 + 1a_2 + \cdots + 0a_n) = 0a_1' + 1a_2' + \cdots + 0a_n' = a_2',$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1' + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2' + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n' =$$

$$= \beta(\beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n') + \gamma(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_n a_n') = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).$$

До того ж

$$\varphi(a_1) = \varphi(1a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_n) = 1a_1' + 0a_2' + \cdots + 0a_n' = a_1',$$
$$\varphi(a_2) = \varphi(0a_1 + 1a_2 + \cdots + 0a_n) = 0a_1' + 1a_2' + \cdots + 0a_n' = a_2',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(a_n) =$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, …, a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1' + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2' + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n' =$$

$$= \beta(\beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n') + \gamma(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_n a_n') = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).$$

До того ж

$$\begin{aligned} \varphi(a_1) &= \varphi(1a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_n) = 1a_1' + 0a_2' + \cdots + 0a_n' = a_1', \\ \varphi(a_2) &= \varphi(0a_1 + 1a_2 + \cdots + 0a_n) = 0a_1' + 1a_2' + \cdots + 0a_n' = a_2', \\ &\qquad \cdots\cdots\cdots \\ \varphi(a_n) &= \varphi(0a_1 + 0a_2 + \cdots + 1a_n) \end{aligned}$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1' + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2' + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n' =$$

$$= \beta(\beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n') + \gamma(\gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_n a_n') = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).$$

До того ж

$$\varphi(a_1) = \varphi(1a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_n) = 1a_1' + 0a_2' + \cdots + 0a_n' = a_1',$$
$$\varphi(a_2) = \varphi(0a_1 + 1a_2 + \cdots + 0a_n) = 0a_1' + 1a_2' + \cdots + 0a_n' = a_2',$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(a_n) = \varphi(0a_1 + 0a_2 + \cdots + 1a_n) = 0a_1' + 0a_2' + \cdots + 1a_n'$$

Доведення.

Оскільки координати вектора у заданому базисі лінійного простору визначаються цим вектором однозначно, от відповідність φ є відображенням. Із теореми про дії векторами у координатній формі слідує, що φ є лінійним відображенням. Дійсно, якщо b, c — будь-які вектори із L, β, γ — будь-які елементи поля P,

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n, \quad c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

— відповідно розклади векторів b і c за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L, то

$$\varphi(\beta b + \gamma c) = \varphi((\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a_n) =$$

$$= (\beta\beta_1 + \gamma\gamma_1)a'_1 + (\beta\beta_2 + \gamma\gamma_2)a'_2 + \cdots + (\beta\beta_n + \gamma\gamma_n)a'_n =$$

$$= \beta(\beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \cdots + \beta_n a'_n) + \gamma(\gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_n a'_n) = \beta\varphi(b) + \gamma\varphi(c).$$

До того ж

$$\begin{gathered}
\varphi(a_1) = \varphi(1a_1 + 0a_2 + \cdots + 0a_n) = 1a'_1 + 0a'_2 + \cdots + 0a'_n = a'_1, \\
\varphi(a_2) = \varphi(0a_1 + 1a_2 + \cdots + 0a_n) = 0a'_1 + 1a'_2 + \cdots + 0a'_n = a'_2, \\
\cdots\cdots\cdots \\
\varphi(a_n) = \varphi(0a_1 + 0a_2 + \cdots + 1a_n) = 0a'_1 + 0a'_2 + \cdots + 1a'_n = a'_n.
\end{gathered}$$

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ,

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми.

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \dots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L.

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$$

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_n лінійного простору L.

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \dots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, …, a_n лінійного простору L. Тоді

$\psi(b) =$

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, …, a_n лінійного простору L. Тоді

$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n)$

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a'_1, \quad \psi(a_2) = a'_2, \quad \dots, \quad \psi(a_n) = a'_n.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L. Тоді

$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \beta_1 \psi(a_1) + \beta_2 \psi(a_2) + \dots + \beta_n \psi(a_n)$$

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_n лінійного простору L. Тоді

$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) = \beta_1 \psi(a_1) + \beta_2 \psi(a_2) + \cdots + \beta_n \psi(a_n) =$$

$$= \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n'$$

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, $\ldots$, a_n лінійного простору L. Тоді

$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) = \beta_1 \psi(a_1) + \beta_2 \psi(a_2) + \cdots + \beta_n \psi(a_n) =$$

$$= \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n' = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n)$$

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L. Тоді

$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) = \beta_1 \psi(a_1) + \beta_2 \psi(a_2) + \cdots + \beta_n \psi(a_n) =$$

$$= \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n' = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) = \varphi(b).$$

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L. Тоді

$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) = \beta_1 \psi(a_1) + \beta_2 \psi(a_2) + \cdots + \beta_n \psi(a_n) =$$

$$= \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n' = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) = \varphi(b).$$

Це означає рівність відображень ψ і φ.

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \dots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L. Тоді

$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \beta_1 \psi(a_1) + \beta_2 \psi(a_2) + \dots + \beta_n \psi(a_n) =$$

$$= \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \dots + \beta_n a_n' = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \varphi(b).$$

Це означає рівність відображень ψ і φ. Теорема доведена. □

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \dots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом $a_1, a_2, \dots, a_n$ лінійного простору L. Тоді

$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \beta_1 \psi(a_1) + \beta_2 \psi(a_2) + \dots + \beta_n \psi(a_n) =$$

$$= \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \dots + \beta_n a_n' = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \varphi(b).$$

Це означає рівність відображень ψ і φ. Теорема доведена. □

Означення 1

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P,

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \ldots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L. Тоді

$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) = \beta_1 \psi(a_1) + \beta_2 \psi(a_2) + \cdots + \beta_n \psi(a_n) =$$

$$= \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n' = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n) = \varphi(b).$$

Це означає рівність відображень ψ і φ. Теорема доведена. □

Означення 1

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P, $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням,

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \dots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом $a_1, a_2, \dots, a_n$ лінійного простору L. Тоді

$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \beta_1 \psi(a_1) + \beta_2 \psi(a_2) + \dots + \beta_n \psi(a_n) =$$

$$= \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \dots + \beta_n a_n' = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \varphi(b).$$

Це означає рівність відображень ψ і φ. Теорема доведена. □

Означення 1

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P, $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням, $a_1, a_2, \dots, a_n$

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \dots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, $\dots$, a_n лінійного простору L. Тоді

$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \beta_1 \psi(a_1) + \beta_2 \psi(a_2) + \dots + \beta_n \psi(a_n) =$$

$$= \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \dots + \beta_n a_n' = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \varphi(b).$$

Це означає рівність відображень ψ і φ. Теорема доведена. □

Означення 1

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P, $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням, a_1, a_2, $\dots$, a_n та b_1, b_2, $\dots$, b_m

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \dots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L. Тоді

$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \beta_1\psi(a_1) + \beta_2\psi(a_2) + \dots + \beta_n\psi(a_n) =$$

$$= \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \dots + \beta_n a_n' = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \varphi(b).$$

Це означає рівність відображень ψ і φ. Теорема доведена. □

Означення 1

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P, $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням, a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m — відповідно базиси лінійних просторів L і L'.

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого
$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \dots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$
Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай
$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$$
— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L. Тоді
$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \beta_1 \psi(a_1) + \beta_2 \psi(a_2) + \dots + \beta_n \psi(a_n) =$$
$$= \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \dots + \beta_n a_n' = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \varphi(b).$$
Це означає рівність відображень ψ і φ. Теорема доведена. □

Означення 1

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P, $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням, a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m — відповідно базиси лінійних просторів L і L'. Матриця, складена із координатних стовпців образів $\psi(a_1)$, $\psi(a_2)$, ..., $\psi(a_n)$

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a_1', \quad \psi(a_2) = a_2', \quad \dots, \quad \psi(a_n) = a_n'.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L. Тоді

$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \beta_1\psi(a_1) + \beta_2\psi(a_2) + \dots + \beta_n\psi(a_n) =$$

$$= \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \dots + \beta_n a_n' = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \varphi(b).$$

Це означає рівність відображень ψ і φ. Теорема доведена. □

Означення 1

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P, $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням, a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m — відповідно базиси лінійних просторів L і L'. Матриця, складена із координатних стовпців образів $\psi(a_1)$, $\psi(a_2)$, ..., $\psi(a_n)$ у базисі b_1, b_2, ..., b_m лінійного простору L',

Доведення.

Доведемо єдиність лінійного відображення φ, що задовольняє умовам теореми. Припустимо, що $\psi : L \to L'$ — лінійне відображення, для якого

$$\psi(a_1) = a'_1, \quad \psi(a_2) = a'_2, \quad \dots, \quad \psi(a_n) = a'_n.$$

Розглянемо довільний вектор b із L. Нехай

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n$$

— розклад вектора b за базисом a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L. Тоді

$$\psi(b) = \psi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \beta_1 \psi(a_1) + \beta_2 \psi(a_2) + \dots + \beta_n \psi(a_n) =$$

$$= \beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \dots + \beta_n a'_n = \varphi(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n) = \varphi(b).$$

Це означає рівність відображень ψ і φ. Теорема доведена. □

Означення 1

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P, $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням, a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m — відповідно базиси лінійних просторів L і L'. Матриця, складена із координатних стовпців образів $\psi(a_1)$, $\psi(a_2)$, ..., $\psi(a_n)$ у базисі b_1, b_2, ..., b_m лінійного простору L', називається матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L'.

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11} b_1 + \gamma_{21} b_2 + \cdots + \gamma_{m1} b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12} b_1 + \gamma_{22} b_2 + \cdots + \gamma_{m2} b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n} b_1 + \gamma_{2n} b_2 + \cdots + \gamma_{mn} b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$;

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$,

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L',

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L', то матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L'

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L', то матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L' є матриця

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L', то матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L' є матриця

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розкладемо довільний вектор x лінійного простору L

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L', то матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, …, a_n та b_1, b_2, …, b_m відповідно лінійних просторів L і L' є матриця

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розкладемо довільний вектор x лінійного простору L за базисом його a_1, a_2, …, a_n:

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L', то матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L' є матриця

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розкладемо довільний вектор x лінійного простору L за базисом його a_1, a_2, ..., a_n:

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n,$$

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L', то матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L' є матриця

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \dots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розкладемо довільний вектор x лінійного простору L за базисом його a_1, a_2, ..., a_n:

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n,$$

де $\xi_j \in P$;

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L', то матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L' є матриця

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \dots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розкладемо довільний вектор x лінійного простору L за базисом його a_1, a_2, ..., a_n:

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n,$$

де $\xi_j \in P$; $j = 1, 2, \dots, n$.

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L', то матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L' є матриця

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розкладемо довільний вектор x лінійного простору L за базисом його a_1, a_2, ..., a_n:

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n,$$

де $\xi_j \in P$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Також розкладемо образ $\psi(x)$

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L', то матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L' є матриця

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розкладемо довільний вектор x лінійного простору L за базисом його a_1, a_2, ..., a_n:

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n,$$

де $\xi_j \in P$; $j = 1, 2, \dots, n$. Також розкладемо образ $\psi(x)$ за базисом b_1, ..., b_m лінійного простору L':

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L', то матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, …, a_n та b_1, b_2, …, b_m відповідно лінійних просторів L і L' є матриця

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \ldots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \ldots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \ldots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розкладемо довільний вектор x лінійного простору L за базисом його a_1, a_2, …, a_n:

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n,$$

де $\xi_j \in P$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Також розкладемо образ $\psi(x)$ за базисом b_1, …, b_m лінійного простору L':

$$\psi(x) = \zeta_1 b_1 + \zeta_2 b_2 + \cdots + \zeta_m b_m,$$

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L', то матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L' є матриця

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розкладемо довільний вектор x лінійного простору L за базисом його a_1, a_2, ..., a_n:

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n,$$

де $\xi_j \in P$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Також розкладемо образ $\psi(x)$ за базисом b_1, ..., b_m лінійного простору L':

$$\psi(x) = \zeta_1 b_1 + \zeta_2 b_2 + \cdots + \zeta_m b_m,$$

де $\zeta_i \in P$;

Тобто, якщо

$$\psi(a_1) = \gamma_{11}b_1 + \gamma_{21}b_2 + \cdots + \gamma_{m1}b_m,$$
$$\psi(a_2) = \gamma_{12}b_1 + \gamma_{22}b_2 + \cdots + \gamma_{m2}b_m,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\psi(a_n) = \gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m,$$

де $\gamma_{ij} \in P$; $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$, — розклади образів базисних векторів із L за базисом лінійного простору L', то матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L' є матриця

$$\Psi = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}.$$

Розкладемо довільний вектор x лінійного простору L за базисом його a_1, a_2, ..., a_n:

$$x = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n,$$

де $\xi_j \in P$; $j = 1, 2, \dots, n$. Також розкладемо образ $\psi(x)$ за базисом b_1, ..., b_m лінійного простору L':

$$\psi(x) = \zeta_1 b_1 + \zeta_2 b_2 + \cdots + \zeta_m b_m,$$

де $\zeta_i \in P$; $i = 1, 2, \dots, m$.

З іншого боку

$$\psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n) =$$

З іншого боку

$$\psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n) = \xi_1 \psi(a_1) + \xi_2 \psi(a_2) + \dots + \xi_n \psi(a_n)$$

З іншого боку

$$\psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n) = \xi_1 \psi(a_1) + \xi_2 \psi(a_2) + \cdots + \xi_n \psi(a_n) =$$

$$= \xi_1(\gamma_{11} b_1 + \cdots + \gamma_{m1} b_m) + \cdots + \xi_n(\gamma_{1n} b_1 + \gamma_{2n} b_2 + \cdots + \gamma_{mn} b_m)$$

З іншого боку

$$\psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n) = \xi_1 \psi(a_1) + \xi_2 \psi(a_2) + \cdots + \xi_n \psi(a_n) =$$

$$= \xi_1(\gamma_{11} b_1 + \cdots + \gamma_{m1} b_m) + \cdots + \xi_n(\gamma_{1n} b_1 + \gamma_{2n} b_2 + \cdots + \gamma_{mn} b_m) =$$

$$= (\gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n) b_1 + \cdots + (\gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n) b_m.$$

З іншого боку

$$\psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n) = \xi_1 \psi(a_1) + \xi_2 \psi(a_2) + \cdots + \xi_n \psi(a_n) =$$

$$= \xi_1(\gamma_{11} b_1 + \cdots + \gamma_{m1} b_m) + \cdots + \xi_n(\gamma_{1n} b_1 + \gamma_{2n} b_2 + \cdots + \gamma_{mn} b_m) =$$

$$= (\gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n) b_1 + \cdots + (\gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n) b_m.$$

Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору слідує,

З іншого боку

$$\psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \dots + \xi_n a_n) = \xi_1\psi(a_1) + \xi_2\psi(a_2) + \dots + \xi_n\psi(a_n) =$$

$$= \xi_1(\gamma_{11}b_1 + \dots + \gamma_{m1}b_m) + \dots + \xi_n(\gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \dots + \gamma_{mn}b_m) =$$

$$= (\gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \dots + \gamma_{1n}\xi_n)b_1 + \dots + (\gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \dots + \gamma_{mn}\xi_n)b_m.$$

Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору слідує, що

$$\zeta_1 = \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \dots + \gamma_{1n}\xi_n,$$

З іншого боку

$$\psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n) = \xi_1 \psi(a_1) + \xi_2 \psi(a_2) + \cdots + \xi_n \psi(a_n) =$$

$$= \xi_1(\gamma_{11} b_1 + \cdots + \gamma_{m1} b_m) + \cdots + \xi_n(\gamma_{1n} b_1 + \gamma_{2n} b_2 + \cdots + \gamma_{mn} b_m) =$$

$$= (\gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n) b_1 + \cdots + (\gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n) b_m.$$

Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору слідує, що

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n, \\ \zeta_2 &= \gamma_{21}\xi_1 + \gamma_{22}\xi_2 + \cdots + \gamma_{2n}\xi_n, \end{aligned}$$

З іншого боку

$$\psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n) = \xi_1\psi(a_1) + \xi_2\psi(a_2) + \cdots + \xi_n\psi(a_n) =$$

$$= \xi_1(\gamma_{11}b_1 + \cdots + \gamma_{m1}b_m) + \cdots + \xi_n(\gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m) =$$

$$= (\gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n)b_1 + \cdots + (\gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n)b_m.$$

Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору слідує, що

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n, \\ \zeta_2 &= \gamma_{21}\xi_1 + \gamma_{22}\xi_2 + \cdots + \gamma_{2n}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_m &= \gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n. \end{aligned} \tag{1}$$

З іншого боку

$$\psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n) = \xi_1\psi(a_1) + \xi_2\psi(a_2) + \cdots + \xi_n\psi(a_n) =$$

$$= \xi_1(\gamma_{11}b_1 + \cdots + \gamma_{m1}b_m) + \cdots + \xi_n(\gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m) =$$

$$= (\gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n)b_1 + \cdots + (\gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n)b_m.$$

Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору слідує, що

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n, \\ \zeta_2 &= \gamma_{21}\xi_1 + \gamma_{22}\xi_2 + \cdots + \gamma_{2n}\xi_n, \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_m &= \gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Рівності (1) називають формулами для координат образу вектора при лінійному відображенні ψ.

З іншого боку

$$\psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n) = \xi_1\psi(a_1) + \xi_2\psi(a_2) + \cdots + \xi_n\psi(a_n) =$$

$$= \xi_1(\gamma_{11}b_1 + \cdots + \gamma_{m1}b_m) + \cdots + \xi_n(\gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m) =$$

$$= (\gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n)b_1 + \cdots + (\gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n)b_m.$$

Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору слідує, що

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n, \\ \zeta_2 &= \gamma_{21}\xi_1 + \gamma_{22}\xi_2 + \cdots + \gamma_{2n}\xi_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_m &= \gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Рівності (1) називають формулами для координат образу вектора при лінійному відображенні ψ. Ці рівності можна переписати компактно у вигляді $Y = \Psi X$,

З іншого боку

$$\psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n) = \xi_1\psi(a_1) + \xi_2\psi(a_2) + \cdots + \xi_n\psi(a_n) =$$

$$= \xi_1(\gamma_{11}b_1 + \cdots + \gamma_{m1}b_m) + \cdots + \xi_n(\gamma_{1n}b_1 + \gamma_{2n}b_2 + \cdots + \gamma_{mn}b_m) =$$

$$= (\gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n)b_1 + \cdots + (\gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n)b_m.$$

Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору слідує, що

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n, \\ \zeta_2 &= \gamma_{21}\xi_1 + \gamma_{22}\xi_2 + \cdots + \gamma_{2n}\xi_n, \\ &\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_m &= \gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Рівності (1) називають формулами для координат образу вектора при лінійному відображенні ψ. Ці рівності можна переписати компактно у вигляді $Y = \Psi X$, якщо через X позначити координатний стовпець вектора x,

З іншого боку

$$\psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n) = \xi_1 \psi(a_1) + \xi_2 \psi(a_2) + \cdots + \xi_n \psi(a_n) =$$

$$= \xi_1(\gamma_{11} b_1 + \cdots + \gamma_{m1} b_m) + \cdots + \xi_n(\gamma_{1n} b_1 + \gamma_{2n} b_2 + \cdots + \gamma_{mn} b_m) =$$

$$= (\gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n) b_1 + \cdots + (\gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n) b_m.$$

Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору слідує, що

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n, \\ \zeta_2 &= \gamma_{21}\xi_1 + \gamma_{22}\xi_2 + \cdots + \gamma_{2n}\xi_n, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_m &= \gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n. \end{aligned} \qquad (1)$$

Рівності (1) називають формулами для координат образу вектора при лінійному відображенні ψ. Ці рівності можна переписати компактно у вигляді $Y = \Psi X$, якщо через X позначити координатний стовпець вектора x, а через Y — координатний стовпець образу $y = \psi(x)$:

З іншого боку

$$\psi(x) = \psi(\xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \cdots + \xi_n a_n) = \xi_1 \psi(a_1) + \xi_2 \psi(a_2) + \cdots + \xi_n \psi(a_n) =$$

$$= \xi_1(\gamma_{11} b_1 + \cdots + \gamma_{m1} b_m) + \cdots + \xi_n(\gamma_{1n} b_1 + \gamma_{2n} b_2 + \cdots + \gamma_{mn} b_m) =$$

$$= (\gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n) b_1 + \cdots + (\gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n) b_m.$$

Із однозначності розкладу за базисом лінійного простору слідує, що

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= \gamma_{11}\xi_1 + \gamma_{12}\xi_2 + \cdots + \gamma_{1n}\xi_n, \\ \zeta_2 &= \gamma_{21}\xi_1 + \gamma_{22}\xi_2 + \cdots + \gamma_{2n}\xi_n, \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \zeta_m &= \gamma_{m1}\xi_1 + \gamma_{m3}\xi_2 + \cdots + \gamma_{mn}\xi_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Рівності (1) називають формулами для координат образу вектора при лінійному відображенні ψ. Ці рівності можна переписати компактно у вигляді $Y = \Psi X$, якщо через X позначити координатний стовпець вектора x, а через Y — координатний стовпець образу $y = \psi(x)$:

$$X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}, \qquad Y = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \vdots \\ \zeta_m \end{pmatrix}.$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати $\zeta_1,\ \zeta_2,\ \ldots,\ \zeta_m$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ образу $\psi(x)$ вектора x

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, x_n$ вектора x

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, ..., ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, ..., x_n вектора x за допомогою формул (1)

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, ..., ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, ..., x_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L',

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, ..., ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, ..., x_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, x_n$ вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, ..., ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, ..., x_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P;

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, x_n$ вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням;

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, x_n$ вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням; $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, ..., ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, ..., x_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням; a_1, a_2, ..., a_n та a_1', a_2', ..., a_n'

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, $\ldots$, ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, $\ldots$, x_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням; a_1, a_2, $\ldots$, a_n та a_1', a_2', $\ldots$, a_n' — базиси лінійного простору L;

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, ..., ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, ..., x_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням; a_1, a_2, ..., a_n та a_1', a_2', ..., a_n' — базиси лінійного простору L; b_1, b_2, ..., b_m

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, ..., ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, ..., x_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням; a_1, a_2, ..., a_n та a'_1, a'_2, ..., a'_n — базиси лінійного простору L; b_1, b_2, ..., b_m та b'_1, b'_2, ..., b'_m

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, $\ldots$, ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, $\ldots$, x_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням; a_1, a_2, $\ldots$, a_n та a'_1, a'_2, $\ldots$, a'_n — базиси лінійного простору L; b_1, b_2, $\ldots$, b_m та b'_1, b'_2, $\ldots$, b'_m — базиси лінійного простору L'.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, ..., ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, ..., x_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням; a_1, a_2, ..., a_n та a'_1, a'_2, ..., a'_n — базиси лінійного простору L; b_1, b_2, ..., b_m та b'_1, b'_2, ..., b'_m — базиси лінійного простору L'. Якщо Ψ є матрицею лінійного відображення ψ

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, $\ldots$, ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi: L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, $\ldots$, x_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi: L \to L'$ є лінійним відображенням; a_1, a_2, $\ldots$, a_n та a'_1, a'_2, $\ldots$, a'_n — базиси лінійного простору L; b_1, b_2, $\ldots$, b_m та b'_1, b'_2, $\ldots$, b'_m — базиси лінійного простору L'. Якщо Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, $\ldots$, a_n та b_1, b_2, $\ldots$, b_m відповідно лінійних просторів L і L',

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, ..., ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, ..., x_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням; a_1, a_2, ..., a_n та a'_1, a'_2, ..., a'_n — базиси лінійного простору L; b_1, b_2, ..., b_m та b'_1, b'_2, ..., b'_m — базиси лінійного простору L'. Якщо Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ,

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, ..., ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, ..., x_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням; a_1, a_2, ..., a_n та a'_1, a'_2, ..., a'_n — базиси лінійного простору L; b_1, b_2, ..., b_m та b'_1, b'_2, ..., b'_m — базиси лінійного простору L'. Якщо Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах a'_1, a'_2, ..., a'_n та b'_1, b'_2, ..., b'_m відповідно лінійних просторів L і L',

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, x_n$ вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ — базиси лінійного простору L; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ — базиси лінійного простору L'. Якщо Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ відповідно лінійних просторів L і L', то

$$\Psi' = S^{-1}\Psi T,$$

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати ζ_1, ζ_2, $\ldots$, ζ_m образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами ξ_1, ξ_2, $\ldots$, x_n вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням; a_1, a_2, $\ldots$, a_n та a'_1, a'_2, $\ldots$, a'_n — базиси лінійного простору L; b_1, b_2, $\ldots$, b_m та b'_1, b'_2, $\ldots$, b'_m — базиси лінійного простору L'. Якщо Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, $\ldots$, a_n та b_1, b_2, $\ldots$, b_m відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах a'_1, a'_2, $\ldots$, a'_n та b'_1, b'_2, $\ldots$, b'_m відповідно лінійних просторів L і L', то

$$\Psi' = S^{-1}\Psi T,$$

де S — матриця переходу від базису b_1, $\ldots$, b_m до базису b'_1, $\ldots$, b'_m простору L',

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо координати $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_m$ образу $\psi(x)$ вектора x при лінійному відображенні $\psi : L \to L'$ пов'язані з координатами $\xi_1, \xi_2, \ldots, x_n$ вектора x за допомогою формул (1) у деяких вибраних базисах відповідно лінійних просторів L і L', то $m \times n$-матриця $\Psi = \|\gamma_{ij}\|$ є матрицею лінійного відображення ψ у цих базисах.

Теорема 2

Нехай L і L' є скінченновимірними лінійними просторами над одним і тим же полем P; $\psi : L \to L'$ є лінійним відображенням; $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ — базиси лінійного простору L; $b_1, b_2, \ldots, b_m$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ — базиси лінійного простору L'. Якщо Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ відповідно лінійних просторів L і L', то

$$\Psi' = S^{-1}\Psi T,$$

де S — матриця переходу від базису $b_1, \ldots, b_m$ до базису $b'_1, \ldots, b'_m$ простору L', а T — матриця переходу від базису $a_1, \ldots, a_n$ до базису $a'_1, \ldots, a'_n$ простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L',

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, ..., a_n та b_1, b_2, ..., b_m відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ та $b_1', b_2', \ldots, b_m'$ відповідно лінійних просторів L і L'.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ та $b_1', b_2', \ldots, b_m'$ відповідно лінійних просторів L і L'. Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах a_1, a_2, $\ldots$, a_n та b_1, b_2, $\ldots$, b_m відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах a'_1, a'_2, $\ldots$, a'_n та b'_1, b'_2, $\ldots$, b'_m відповідно лінійних просторів L і L'.
Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами a_1, a_2, $\ldots$, a_n

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ та $b_1', b_2', \ldots, b_m'$ відповідно лінійних просторів L і L'.
Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ лінійного простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ та $b_1', b_2', \ldots, b_m'$ відповідно лінійних просторів L і L'.
Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ лінійного простору L. Нехай X, X'

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ відповідно лінійних просторів L і L'.
Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ лінійного простору L. Нехай X, X' — координатні стовпці вектора x відповідно у цих базисах.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ відповідно лінійних просторів L і L'.
Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ лінійного простору L. Нехай X, X' — координатні стовпці вектора x відповідно у цих базисах. Тоді

$$X = TX', \tag{2}$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ відповідно лінійних просторів L і L'.
Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ лінійного простору L. Нехай X, X' — координатні стовпці вектора x відповідно у цих базисах. Тоді

$$X = TX', \tag{2}$$

де T — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ відповідно лінійних просторів L і L'.
Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ лінійного простору L. Нехай X, X' — координатні стовпці вектора x відповідно у цих базисах. Тоді

$$X = TX', \tag{2}$$

де T — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ лінійного простору L.
Аналогічно розкладемо образ $\psi(x)$ за базисами $b_1, b_2, \ldots, b_m$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ відповідно лінійних просторів L і L'.
Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ лінійного простору L. Нехай X, X' — координатні стовпці вектора x відповідно у цих базисах. Тоді

$$X = TX', \tag{2}$$

де T — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ лінійного простору L.
Аналогічно розкладемо образ $\psi(x)$ за базисами $b_1, b_2, \ldots, b_m$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ лінійного простору L'.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ та $b_1', b_2', \ldots, b_m'$ відповідно лінійних просторів L і L'.
Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ лінійного простору L. Нехай X, X' — координатні стовпці вектора x відповідно у цих базисах. Тоді

$$X = TX', \tag{2}$$

де T — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ лінійного простору L.
Аналогічно розкладемо образ $\psi(x)$ за базисами $b_1, b_2, \ldots, b_m$ та $b_1', b_2', \ldots, b_m'$ лінійного простору L'. Нехай Y, Y'

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ відповідно лінійних просторів L і L'.
Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ лінійного простору L. Нехай X, X' — координатні стовпці вектора x відповідно у цих базисах. Тоді

$$X = TX', \tag{2}$$

де T — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ лінійного простору L.
Аналогічно розкладемо образ $\psi(x)$ за базисами $b_1, b_2, \ldots, b_m$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ лінійного простору L'. Нехай Y, Y' — координатні стовпці вектора $\psi(x)$ відповідно у цих базисах.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \dots, a_n$ та $b_1, b_2, \dots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ та $b'_1, b'_2, \dots, b'_m$ відповідно лінійних просторів L і L'.
Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами $a_1, a_2, \dots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ лінійного простору L. Нехай X, X' — координатні стовпці вектора x відповідно у цих базисах. Тоді

$$X = TX', \tag{2}$$

де T — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \dots, a_n$ до базису $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ лінійного простору L.
Аналогічно розкладемо образ $\psi(x)$ за базисами $b_1, b_2, \dots, b_m$ та $b'_1, b'_2, \dots, b'_m$ лінійного простору L'. Нехай Y, Y' — координатні стовпці вектора $\psi(x)$ відповідно у цих базисах. Тоді

$$Y = SY', \tag{3}$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \dots, a_n$ та $b_1, b_2, \dots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ та $b'_1, b'_2, \dots, b'_m$ відповідно лінійних просторів L і L'.
Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами $a_1, a_2, \dots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ лінійного простору L. Нехай X, X' — координатні стовпці вектора x відповідно у цих базисах. Тоді

$$X = TX', \tag{2}$$

де T — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \dots, a_n$ до базису $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$ лінійного простору L.
Аналогічно розкладемо образ $\psi(x)$ за базисами $b_1, b_2, \dots, b_m$ та $b'_1, b'_2, \dots, b'_m$ лінійного простору L'. Нехай Y, Y' — координатні стовпці вектора $\psi(x)$ відповідно у цих базисах. Тоді

$$Y = SY', \tag{3}$$

де S — матриця переходу від базису $b_1, b_2, \dots, b_m$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і Ψ є матрицею лінійного відображення ψ у базисах $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $b_1, b_2, \ldots, b_m$ відповідно лінійних просторів L і L', а Ψ' є матрицею цього ж лінійного відображення ψ, але у базисах $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ відповідно лінійних просторів L і L'.
Розглянемо будь-який вектор x лінійного простору L. Розкладемо вектор x за базисами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ лінійного простору L. Нехай X, X' — координатні стовпці вектора x відповідно у цих базисах. Тоді

$$X = TX', \tag{2}$$

де T — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ лінійного простору L.
Аналогічно розкладемо образ $\psi(x)$ за базисами $b_1, b_2, \ldots, b_m$ та $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ лінійного простору L'. Нехай Y, Y' — координатні стовпці вектора $\psi(x)$ відповідно у цих базисах. Тоді

$$Y = SY', \tag{3}$$

де S — матриця переходу від базису $b_1, b_2, \ldots, b_m$ до базису $b'_1, b'_2, \ldots, b'_m$ лінійного простору L'.

Доведення.

Згідно формул координат образу

$$Y = \Psi X,$$

Доведення.

Згідно формул координат образу

$$Y = \Psi X, \qquad Y' = \Psi' X'. \tag{4}$$

Доведення.

Згідно формул координат образу

$$Y = \Psi X, \qquad Y' = \Psi' X'. \tag{4}$$

Звідси і рівностей (2), (3) одержуємо рівність

$$SY' = \Psi\left(TX'\right).$$

Доведення.

Згідно формул координат образу

$$Y = \Psi X, \qquad Y' = \Psi' X'. \tag{4}$$

Звідси і рівностей (2), (3) одержуємо рівність

$$SY' = \Psi\left(TX'\right). \tag{5}$$

Оскільки матриця переходу від одного базису до іншого базису лінійного простору є оборотною,

Доведення.

Згідно формул координат образу

$$Y = \Psi X, \qquad Y' = \Psi' X'. \tag{4}$$

Звідси і рівностей (2), (3) одержуємо рівність

$$SY' = \Psi\left(TX'\right). \tag{5}$$

Оскільки матриця переходу від одного базису до іншого базису лінійного простору є оборотною, то із рівності (5) слідує, що

$$Y' = \left(S^{-1}\Psi T\right) X'.$$

Доведення.

Згідно формул координат образу

$$Y = \Psi X, \qquad Y' = \Psi' X'. \tag{4}$$

Звідси і рівностей (2), (3) одержуємо рівність

$$SY' = \Psi\left(TX'\right). \tag{5}$$

Оскільки матриця переходу від одного базису до іншого базису лінійного простору є оборотною, то із рівності (5) слідує, що

$$Y' = \left(S^{-1}\Psi T\right)X'. \tag{6}$$

Рівність (6)

Доведення.

Згідно формул координат образу

$$Y = \Psi X, \qquad Y' = \Psi' X'. \tag{4}$$

Звідси і рівностей (2), (3) одержуємо рівність

$$SY' = \Psi\left(TX'\right). \tag{5}$$

Оскільки матриця переходу від одного базису до іншого базису лінійного простору є оборотною, то із рівності (5) слідує, що

$$Y' = \left(S^{-1}\Psi T\right) X'. \tag{6}$$

Рівність (6), так само як і друга з рівностей (4),

Доведення.

Згідно формул координат образу
$$Y = \Psi X, \qquad Y' = \Psi' X'. \tag{4}$$
Звідси і рівностей (2), (3) одержуємо рівність
$$SY' = \Psi \left(TX'\right). \tag{5}$$
Оскільки матриця переходу від одного базису до іншого базису лінійного простору є оборотною, то із рівності (5) слідує, що
$$Y' = \left(S^{-1}\Psi T\right) X'. \tag{6}$$
Рівність (6), так само як і друга з рівностей (4), вказує на зв'язок між координатами вектора x та координатами образу $\psi(x)$ відповідно у базисах a_1', a_2', $\ldots$, a_n' та b_1', b_2', $\ldots$, b_m' відповідно лінійних просторів L і L'.

Доведення.

Згідно формул координат образу

$$Y = \Psi X, \qquad Y' = \Psi' X'. \tag{4}$$

Звідси і рівностей (2), (3) одержуємо рівність

$$SY' = \Psi \left(TX' \right). \tag{5}$$

Оскільки матриця переходу від одного базису до іншого базису лінійного простору є оборотною, то із рівності (5) слідує, що

$$Y' = \left(S^{-1} \Psi T \right) X'. \tag{6}$$

Рівність (6), так само як і друга з рівностей (4), вказує на зв'язок між координатами вектора x та координатами образу $\psi(x)$ відповідно у базисах a_1', a_2', ..., a_n' та b_1', b_2', ..., b_m' відповідно лінійних просторів L і L'. Тому

$$\Psi' = S^{-1} \Psi T.$$

Доведення.

Згідно формул координат образу

$$Y = \Psi X, \qquad Y' = \Psi' X'. \tag{4}$$

Звідси і рівностей (2), (3) одержуємо рівність

$$SY' = \Psi\left(TX'\right). \tag{5}$$

Оскільки матриця переходу від одного базису до іншого базису лінійного простору є оборотною, то із рівності (5) слідує, що

$$Y' = \left(S^{-1}\Psi T\right) X'. \tag{6}$$

Рівність (6), так само як і друга з рівностей (4), вказує на зв'язок між координатами вектора x та координатами образу $\psi(x)$ відповідно у базисах a_1', a_2', ..., a_n' та b_1', b_2', ..., b_m' відповідно лінійних просторів L і L'. Тому

$$\Psi' = S^{-1}\Psi T.$$

Теорема доведена. □

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається оператором лінійного простору L над полем P.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається **оператором** лінійного простору L над полем P.

Зауваження 1

Якщо φ є лінійним оператором простору L

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається **оператором** лінійного простору L над полем P.

Зауваження 1

Якщо φ є лінійним оператором простору L і для деяких векторів x, $y \in L$

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається **операто-ром** лінійного простору L над полем P.

Зауваження 1

Якщо φ є лінійним оператором простору L і для деяких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $\varphi(x) = y$,

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається **оператором** лінійного простору L над полем P.

Зауваження 1

Якщо φ є лінійним оператором простору L і для деяких векторів $x, y \in L$ справджується рівність $\varphi(x) = y$, то інколи будемо говорити,

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається **оператором** лінійного простору L над полем P.

Зауваження 1

Якщо φ є лінійним оператором простору L і для деяких векторів $x, y \in L$ справджується рівність $\varphi(x) = y$, то інколи будемо говорити, що оператор φ **переводить** або **перетворює** вектор x у вектор y.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається **оператором** лінійного простору L над полем P.

Зауваження 1

Якщо φ є лінійним оператором простору L і для деяких векторів $x, y \in L$ справджується рівність $\varphi(x) = y$, то інколи будемо говорити, що оператор φ **переводить** або **перетворює** вектор x у вектор y.

Означення 3

Оператор φ лінійного простору L над полем P називається **лінійним**,

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається оператором лінійного простору L над полем P.

Зауваження 1

Якщо φ є лінійним оператором простору L і для деяких векторів $x, y \in L$ справджується рівність $\varphi(x) = y$, то інколи будемо говорити, що оператор φ переводить або перетворює вектор x у вектор y.

Означення 3

Оператор φ лінійного простору L над полем P називається лінійним, якщо виконуються умови:

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається оператором лінійного простору L над полем P.

Зауваження 1

Якщо φ є лінійним оператором простору L і для деяких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $\varphi(x) = y$, то інколи будемо говорити, що оператор φ переводить або перетворює вектор x у вектор y.

Означення 3

Оператор φ лінійного простору L над полем P називається лінійним, якщо виконуються умови:

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для будь-яких векторів x, $y \in L$;

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається **оператором** лінійного простору L над полем P.

Зауваження 1

Якщо φ є лінійним оператором простору L і для деяких векторів $x, y \in L$ справджується рівність $\varphi(x) = y$, то інколи будемо говорити, що оператор φ **переводить** або **перетворює** вектор x у вектор y.

Означення 3

Оператор φ лінійного простору L над полем P називається **лінійним**, якщо виконуються умови:

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для будь-яких векторів $x, y \in L$;
- $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ для будь-якого вектора $x \in L$ і елемента α поля P.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається **оператором** лінійного простору L над полем P.

Зауваження 1

Якщо φ є лінійним оператором простору L і для деяких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $\varphi(x) = y$, то інколи будемо говорити, що оператор φ **переводить** або **перетворює** вектор x у вектор y.

Означення 3

Оператор φ лінійного простору L над полем P називається **лінійним**, якщо виконуються умови:

- $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для будь-яких векторів x, $y \in L$;
- $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ для будь-якого вектора $x \in L$ і елемента α поля P.

Таким чином, лінійний оператор лінійного простору L

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається оператором лінійного простору L над полем P.

Зауваження 1

Якщо φ є лінійним оператором простору L і для деяких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $\varphi(x) = y$, то інколи будемо говорити, що оператор φ переводить або перетворює вектор x у вектор y.

Означення 3

Оператор φ лінійного простору L над полем P називається лінійним, якщо виконуються умови:

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для будь-яких векторів x, $y \in L$;
- $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ для будь-якого вектора $x \in L$ і елемента α поля P.

Таким чином, лінійний оператор лінійного простору L — це лінійне відображення простору L в себе.

Означення 2

Відображення $\varphi : L \to L$ лінійного простору L в себе називається **оператором** лінійного простору L над полем P.

Зауваження 1

Якщо φ є лінійним оператором простору L і для деяких векторів x, $y \in L$ справджується рівність $\varphi(x) = y$, то інколи будемо говорити, що оператор φ **переводить** або **перетворює** вектор x у вектор y.

Означення 3

Оператор φ лінійного простору L над полем P називається **лінійним**, якщо виконуються умови:

- $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для будь-яких векторів x, $y \in L$;
- $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ для будь-якого вектора $x \in L$ і елемента α поля P.

Таким чином, лінійний оператор лінійного простору L — це лінійне відображення простору L в себе. Властивості лінійних відображень, розглянуті раніше переносяться на лінійні оператори лінійного простору.

Означення 4

Лінійний оператор лінійного L над полем P,

Означення 4

Лінійний оператор лінійного L над полем P, що переводить кожний вектор із L в себе називається **одиничним**

Означення 4

Лінійний оператор лінійного L над полем P, що переводить кожний вектор із L в себе називається **одиничним** або **тотожним** оператором простору L.

Означення 4

Лінійний оператор лінійного L над полем P, що переводить кожний вектор із L в себе називається одиничним або тотожним оператором простору L.

Позначимо цей оператор через id_L.

Означення 4

Лінійний оператор лінійного L над полем P, що переводить кожний вектор із L в себе називається **одиничним** або **тотожним** оператором простору L.

Позначимо цей оператор через id_L. Отже,

$$\mathrm{id}_L(x) = x$$

Означення 4

Лінійний оператор лінійного L над полем P, що переводить кожний вектор із L в себе називається **одиничним** або **тотожним** оператором простору L.

Позначимо цей оператор через id_L. Отже,

$$\mathrm{id}_L(x) = x$$

для кожного вектора $x \in L$.

Означення 4

Лінійний оператор лінійного L над полем P, що переводить кожний вектор із L в себе називається одиничним або тотожним оператором простору L.

Позначимо цей оператор через id_L. Отже,

$$\mathrm{id}_L(x) = x$$

для кожного вектора $x \in L$.

Означення 5

Нехай φ — лінійний оператор простору L.

Означення 4

Лінійний оператор лінійного L над полем P, що переводить кожний вектор із L в себе називається одиничним або тотожним оператором простору L.

Позначимо цей оператор через id_L. Отже,

$$\mathrm{id}_L(x) = x$$

для кожного вектора $x \in L$.

Означення 5

Нехай φ — лінійний оператор простору L. Якщо існує лінійний оператор φ' лінійного простору L

Означення 4

Лінійний оператор лінійного L над полем P, що переводить кожний вектор із L в себе називається одиничним або тотожним оператором простору L.

Позначимо цей оператор через id_L. Отже,

$$\mathrm{id}_L(x) = x$$

для кожного вектора $x \in L$.

Означення 5

Нехай φ — лінійний оператор простору L. Якщо існує лінійний оператор φ' лінійного простору L такий, що $\varphi'\varphi = \mathrm{id}_L$

Означення 4

Лінійний оператор лінійного L над полем P, що переводить кожний вектор із L в себе називається одиничним або тотожним оператором простору L.

Позначимо цей оператор через id_L. Отже,

$$\mathrm{id}_L(x) = x$$

для кожного вектора $x \in L$.

Означення 5

Нехай φ — лінійний оператор простору L. Якщо існує лінійний оператор φ' лінійного простору L такий, що $\varphi'\varphi = \mathrm{id}_L$ (відповідно $\varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$),

Означення 4

Лінійний оператор лінійного L над полем P, що переводить кожний вектор із L в себе називається одиничним або тотожним оператором простору L.

Позначимо цей оператор через id_L. Отже,

$$\mathrm{id}_L(x) = x$$

для кожного вектора $x \in L$.

Означення 5

Нехай φ — лінійний оператор простору L. Якщо існує лінійний оператор φ' лінійного простору L такий, що $\varphi'\varphi = \mathrm{id}_L$ (відповідно $\varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$), то φ' називається лівим оберненим

Означення 4

Лінійний оператор лінійного L над полем P, що переводить кожний вектор із L в себе називається одиничним або тотожним оператором простору L.

Позначимо цей оператор через id_L. Отже,

$$\mathrm{id}_L(x) = x$$

для кожного вектора $x \in L$.

Означення 5

Нехай φ — лінійний оператор простору L. Якщо існує лінійний оператор φ' лінійного простору L такий, що $\varphi'\varphi = \mathrm{id}_L$ (відповідно $\varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$), то φ' називається лівим оберненим (відповідно правим оберненим) оператором для оператора φ.

Означення 4

Лінійний оператор лінійного L над полем P, що переводить кожний вектор із L в себе називається одиничним або тотожним оператором простору L.

Позначимо цей оператор через id_L. Отже,

$$\mathrm{id}_L(x) = x$$

для кожного вектора $x \in L$.

Означення 5

Нехай φ — лінійний оператор простору L. Якщо існує лінійний оператор φ' лінійного простору L такий, що $\varphi'\varphi = \mathrm{id}_L$ (відповідно $\varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$), то φ' називається лівим оберненим (відповідно правим оберненим) оператором для оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо для лінійного оператора φ лінійного простору L існують як лівий обернений, так і правий обернений, то ці обернені оператори співпадають.

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається **оборотним**,

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається оборотним, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L,

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається оборотним, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$.

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається оборотним, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається оберненим до оператора φ.

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається оборотним, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається оберненим до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним,

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається оборотним, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається оберненим до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається **оборотним**, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається **оберненим** до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

Обернений оператор до оборотного лінійного оператора φ позначається через φ^{-1}.

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається оборотним, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається оберненим до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

Обернений оператор до оборотного лінійного оператора φ позначається через φ^{-1}.

Завдання для самостійної роботи.

Розглянемо лінійний простір $C^{\infty}_{[0,1]}$

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається оборотним, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається оберненим до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

Обернений оператор до оборотного лінійного оператора φ позначається через φ^{-1}.

Завдання для самостійної роботи.

Розглянемо лінійний простір $C^{\infty}_{[0,1]}$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається оборотним, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається оберненим до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

Обернений оператор до оборотного лінійного оператора φ позначається через φ^{-1}.

Завдання для самостійної роботи.

Розглянемо лінійний простір $C^{\infty}_{[0,1]}$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел всіх нескінченно диференційованих функцій на сегменті $[0, 1]$.

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається оборотним, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається оберненим до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

Обернений оператор до оборотного лінійного оператора φ позначається через φ^{-1}.

Завдання для самостійної роботи.

Розглянемо лінійний простір $C^{\infty}_{[0,1]}$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел всіх нескінченно диференційованих функцій на сегменті $[0,1]$. Оператор $\mathfrak{D}$ диференціюванння

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається **оборотним**, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається **оберненим** до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

Обернений оператор до оборотного лінійного оператора φ позначається через φ^{-1}.

Завдання для самостійної роботи.

Розглянемо лінійний простір $C^{\infty}_{[0,1]}$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел всіх нескінченно диференційованих функцій на сегменті $[0, 1]$. Оператор $\mathfrak{D}$ диференціюванння і оператор $\mathfrak{I}$ інтегрування

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається **оборотним**, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається **оберненим** до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

Обернений оператор до оборотного лінійного оператора φ позначається через φ^{-1}.

Завдання для самостійної роботи.

Розглянемо лінійний простір $C^{\infty}_{[0,1]}$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел всіх нескінченно диференційованих функцій на сегменті $[0,1]$. Оператор $\mathfrak{D}$ диференціювањня і оператор $\mathfrak{I}$ інтегрування лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$ визначаємо так:

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається оборотним, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається оберненим до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

Обернений оператор до оборотного лінійного оператора φ позначається через φ^{-1}.

Завдання для самостійної роботи.

Розглянемо лінійний простір $C^{\infty}_{[0,1]}$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел всіх нескінченно диференційованих функцій на сегменті $[0,1]$. Оператор $\mathfrak{D}$ диференціюванння і оператор $\mathfrak{I}$ інтегрування лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$ визначаємо так: якщо $f \in C^{\infty}_{[0,1]}$,

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається оборотним, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається оберненим до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

Обернений оператор до оборотного лінійного оператора φ позначається через φ^{-1}.

Завдання для самостійної роботи.

Розглянемо лінійний простір $C^{\infty}_{[0,1]}$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел всіх нескінченно диференційованих функцій на сегменті $[0,1]$. Оператор $\mathfrak{D}$ диференціювананя і оператор $\mathfrak{I}$ інтегрування лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$ визначаємо так: якщо $f \in C^{\infty}_{[0,1]}$, то

$$[\mathfrak{D}(f)](x) = \frac{df(x)}{dx},$$

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається **оборотним**, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається **оберненим** до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

Обернений оператор до оборотного лінійного оператора φ позначається через φ^{-1}.

Завдання для самостійної роботи.

Розглянемо лінійний простір $C^\infty_{[0,1]}$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел всіх нескінченно диференційованих функцій на сегменті $[0,1]$. Оператор $\mathfrak{D}$ диференціюванння і оператор $\mathfrak{I}$ інтегрування лінійного простору $C^\infty_{[0,1]}$ визначаємо так: якщо $f \in C^\infty_{[0,1]}$, то

$$[\mathfrak{D}(f)](x) = \frac{df(x)}{dx}, \qquad [\mathfrak{I}(f)](x) = \int\limits_0^x f(t)dt, \quad x \in [0,1].$$

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається оборотним, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається оберненим до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

Обернений оператор до оборотного лінійного оператора φ позначається через φ^{-1}.

Завдання для самостійної роботи.

Розглянемо лінійний простір $C^{\infty}_{[0,1]}$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел всіх нескінченно диференційованих функцій на сегменті $[0,1]$. Оператор $\mathfrak{D}$ диференціюванння і оператор $\mathfrak{I}$ інтегрування лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$ визначаємо так: якщо $f \in C^{\infty}_{[0,1]}$, то

$$[\mathfrak{D}(f)](x) = \frac{df(x)}{dx}, \qquad [\mathfrak{I}(f)](x) = \int\limits_0^x f(t)dt, \quad x \in [0,1].$$

1. Показати, що $\mathfrak{D}$ і $\mathfrak{I}$ — лінійні оператори простору $C^{\infty}_{[0,1]}$.

Означення 6

Лінійний оператор φ лінійного простору L називається **оборотним**, якщо існує такий лінійний оператор φ' лінійного простору L, що $\varphi'\varphi = \varphi\varphi' = \mathrm{id}_L$. Оператор φ' при цьому називається **оберненим** до оператора φ.

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо лінійний оператор φ лінійного простору L є оборотним, то для нього існує тільки один обернений оператор.

Обернений оператор до оборотного лінійного оператора φ позначається через φ^{-1}.

Завдання для самостійної роботи.

Розглянемо лінійний простір $C^{\infty}_{[0,1]}$ над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел всіх нескінченно диференційованих функцій на сегменті $[0,1]$. Оператор $\mathfrak{D}$ диференціювання і оператор $\mathfrak{I}$ інтегрування лінійного простору $C^{\infty}_{[0,1]}$ визначаємо так: якщо $f \in C^{\infty}_{[0,1]}$, то

$$[\mathfrak{D}(f)](x) = \frac{df(x)}{dx}, \qquad [\mathfrak{I}(f)](x) = \int\limits_0^x f(t)dt, \quad x \in [0,1].$$

1. Показати, що $\mathfrak{D}$ і $\mathfrak{I}$ — лінійні оператори простору $C^{\infty}_{[0,1]}$.
2. Знайти $\mathfrak{I}\mathfrak{D}$ і $\mathfrak{D}\mathfrak{I}$.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли

Теорема 3

Лінійний оператор φ *лінійного простору* L *над полем* P *є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:*

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним,

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.
Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням. Дійсно те, що φ є срюр'єкцією слідує із рівності $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.
Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням. Дійсно те, що φ є срюр'єкцією слідує із рівності $\operatorname{Im}\varphi = L$. Якщо ж для векторів a і b із L справджується рівність $\varphi(a) = \varphi(b)$

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням. Дійсно те, що φ є срюр'єкцією слідує із рівності $\operatorname{Im}\varphi = L$. Якщо ж для векторів a і b із L справджується рівність $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $\varphi(a - b) =$

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням. Дійсно те, що φ є срюр'єкцією слідує із рівності $\operatorname{Im}\varphi = L$. Якщо ж для векторів a і b із L справджується рівність $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b)$

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.
Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням. Дійсно те, що φ є срюр'єкцією слідує із рівності $\operatorname{Im}\varphi = L$. Якщо ж для векторів a і b із L справджується рівність $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $\varphi(a - b) = \varphi(a) - \varphi(b) = \bar{0}$.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням. Дійсно те, що φ є срюр'єкцією слідує із рівності $\operatorname{Im}\varphi = L$. Якщо ж для векторів a і b із L справджується рівність $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = \bar{0}$. Тому $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi$

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.
Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням. Дійсно те, що φ є срюр'єкцією слідує із рівності $\operatorname{Im}\varphi = L$. Якщо ж для векторів a і b із L справджується рівність $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = \bar{0}$. Тому $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$,

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням. Дійсно те, що φ є срюр'єкцією слідує із рівності $\operatorname{Im}\varphi = L$. Якщо ж для векторів a і b із L справджується рівність $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = \bar{0}$. Тому $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$, звідки $a = b$.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.
Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням. Дійсно те, що φ є срюр'єкцією слідує із рівності $\operatorname{Im}\varphi = L$. Якщо ж для векторів a і b із L справджується рівність $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = \bar{0}$. Тому $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$, звідки $a = b$. Це означає, що φ є ін'єктивним відображенням.

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.
Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням. Дійсно те, що φ є срюр'єкцією слідує із рівності $\operatorname{Im}\varphi = L$. Якщо ж для векторів a і b із L справджується рівність $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = \bar{0}$. Тому $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$, звідки $a = b$. Це означає, що φ є ін'єктивним відображенням. Оскільки φ одночасно є лінійним оператором лінійного простору L

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням. Дійсно те, що φ є срюр'єкцією слідує із рівності $\operatorname{Im}\varphi = L$. Якщо ж для векторів a і b із L справджується рівність $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = \bar{0}$. Тому $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$, звідки $a = b$. Це означає, що φ є ін'єктивним відображенням. Оскільки φ одночасно є лінійним оператором лінійного простору L і бієктивним відображенням,

Теорема 3

Лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. *φ є ізоморфізмом лінійних просторів;*
2. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ *і* $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Доведення.

Нехай лінійний оператор φ лінійного простору L над полем P є оборотним. Тоді існує обернений лінійний оператор φ^{-1} лінійного простору L. Це означає, що відображення φ є оборотним, а отже і бієктивним. Тому за означенням лінійний оператор φ є ізоморфізмом. Із ін'єктивності φ слідує, що прообразом нульового вектора є тільки нульовий вектор. Із сюр'єктивності φ слідує, що $\operatorname{Im}\varphi = L$.

Навпаки, нехай $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$ і $\operatorname{Im}\varphi = L$.Тоді лінійний оператор φ є бієктивним відображенням. Дійсно те, що φ є срюр'єкцією слідує із рівності $\operatorname{Im}\varphi = L$. Якщо ж для векторів a і b із L справджується рівність $\varphi(a) = \varphi(b)$, то $\varphi(a-b) = \varphi(a) - \varphi(b) = \bar{0}$. Тому $a - b \in \operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$, звідки $a = b$. Це означає, що φ є ін'єктивним відображенням. Оскільки φ одночасно є лінійним оператором лінійного простору L і бієктивним відображенням, то φ є ізоморфізмом.

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$.

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним.

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$.

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення,

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$,

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$,

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$.

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) =$$

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b'))$$

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b'))$$

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b'$$

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Отже, φ^{-1} є оберненим лінійним оператором до φ,

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Отже, φ^{-1} є оберненим лінійним оператором до φ, як наслідок φ є оборотним лінійним оператором.

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Отже, φ^{-1} є оберненим лінійним оператором до φ, як наслідок φ є оборотним лінійним оператором. Теорема доведена.

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Отже, φ^{-1} є оберненим лінійним оператором до φ, як наслідок φ є оборотним лінійним оператором. Теорема доведена. $\square$

Означення 7

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Отже, φ^{-1} є оберненим лінійним оператором до φ, як наслідок φ є оборотним лінійним оператором. Теорема доведена. □

Означення 7

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L.

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Отже, φ^{-1} є оберненим лінійним оператором до φ, як наслідок φ є оборотним лінійним оператором. Теорема доведена. $\square$

Означення 7

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Матрицею лінійного оператора φ

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Отже, φ^{-1} є оберненим лінійним оператором до φ, як наслідок φ є оборотним лінійним оператором. Теорема доведена. □

Означення 7

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Матрицею лінійного оператора φ у деякому базисі a_1, a_2, ..., a_n

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Отже, φ^{-1} є оберненим лінійним оператором до φ, як наслідок φ є оборотним лінійним оператором. Теорема доведена. $\square$

Означення 7

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Матрицею лінійного оператора φ у деякому базисі a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Отже, φ^{-1} є оберненим лінійним оператором до φ, як наслідок φ є оборотним лінійним оператором. Теорема доведена. $\square$

Означення 7

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Матрицею лінійного оператора φ у деякому базисі a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P називається $n \times n$-матриця,

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Отже, φ^{-1} є оберненим лінійним оператором до φ, як наслідок φ є оборотним лінійним оператором. Теорема доведена. $\square$

Означення 7

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Матрицею лінійного оператора φ у деякому базисі a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P називається $n \times n$-матриця, складена із координатних стовпців

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Отже, φ^{-1} є оберненим лінійним оператором до φ, як наслідок φ є оборотним лінійним оператором. Теорема доведена. $\square$

Означення 7

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Матрицею лінійного оператора φ у деякому базисі a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P називається $n \times n$-матриця, складена із координатних стовпців образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_n)$ базисних векторів

Доведення.

Із бієктивності φ слідує існування оберненого відображення $\varphi^{-1} : L \to L$. Доведемо, що воно є лінійним. Розглянемо довільні елементи α, β поля P і вектори a, $b \in L$. Оскільки φ сюр'єктивне відображення, то знайдуться вектори a', $b' \in L$, що $\varphi(a') = a$, $\varphi(b') = b$. Тоді

$$\varphi^{-1}(\alpha a + \beta b) = \varphi^{-1}(\alpha\varphi(a') + \beta\varphi(b')) = \varphi^{-1}(\varphi(\alpha a' + \beta b')) =$$

$$= \alpha a' + \beta b' = \alpha\varphi^{-1}(a) + \beta\varphi^{-1}(b).$$

Отже, φ^{-1} є оберненим лінійним оператором до φ, як наслідок φ є оборотним лінійним оператором. Теорема доведена. □

Означення 7

Нехай L — скінченновимірний лінійний простір над полем P і φ — лінійний оператор простору L. Матрицею лінійного оператора φ у деякому базисі a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L над полем P називається $n \times n$-матриця, складена із координатних стовпців образів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_n)$ базисних векторів у цьому ж базисі.

Тобто, якщо

$$\varphi(a_1) = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n,$$

Тобто, якщо

$$\varphi(a_1) = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n,$$
$$\varphi(a_2) = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n,$$

Тобто, якщо

$$\begin{gathered}
\varphi(a_1) = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n, \\
\varphi(a_2) = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n, \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
\varphi(a_n) = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n,
\end{gathered}$$

Тобто, якщо

$$
\begin{gathered}
\varphi(a_1) = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n, \\
\varphi(a_2) = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi(a_n) = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n,
\end{gathered}
$$

де $\alpha_{ij} \in P$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

Тобто, якщо

$$\begin{aligned} \varphi(a_1) &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n, \\ \varphi(a_2) &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(a_n) &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n, \end{aligned}$$

де $\alpha_{ij} \in P$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, — розклади образів базисних векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_n

Тобто, якщо

$$\begin{aligned}\varphi(a_1) &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n,\\ \varphi(a_2) &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi(a_n) &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n,\end{aligned}$$

де $\alpha_{ij} \in P$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, — розклади образів базисних векторів a_1, a_2, ..., a_n за цим же базисом,

Тобто, якщо

$$\begin{gathered}\varphi(a_1)=\alpha_{11}a_1+\alpha_{21}a_2+\cdots+\alpha_{n1}a_n,\\ \varphi(a_2)=\alpha_{12}a_1+\alpha_{22}a_2+\cdots+\alpha_{n2}a_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ \varphi(a_n)=\alpha_{1n}a_1+\alpha_{2n}a_2+\cdots+\alpha_{nn}a_n,\end{gathered}$$

де $\alpha_{ij}\in P$; $i,j\in\{1,2,\dots,n\}$, — розклади образів базисних векторів a_1, a_2, …, a_n за цим же базисом, то квадратна матриця

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\dots&\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\dots&\alpha_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{n1}&\alpha_{n2}&\dots&\alpha_{nn}\end{pmatrix},$$

Тобто, якщо

$$\begin{gathered}\varphi(a_1) = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n,\\ \varphi(a_2) = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n,\\ \dots\dots\dots\dots\\ \varphi(a_n) = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n,\end{gathered}$$

де $\alpha_{ij} \in P$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, — розклади образів базисних векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_n за цим же базисом, то квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із координатних стовпців векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\ldots$, $\varphi(a_n)$, є матрицею лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n лінійного простору L.

Тобто, якщо

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1) &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n, \\
\varphi(a_2) &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi(a_n) &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n,
\end{aligned}$$

де $\alpha_{ij} \in P$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, — розклади образів базисних векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_n за цим же базисом, то квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із координатних стовпців векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\ldots$, $\varphi(a_n)$, є матрицею лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n лінійного простору L. Якщо в просторі L вибрати новий базис a_1', a_2', $\ldots$, a_n',

Тобто, якщо

$$\begin{aligned}
\varphi(a_1) &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \dots + \alpha_{n1}a_n, \\
\varphi(a_2) &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \dots + \alpha_{n2}a_n, \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
\varphi(a_n) &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \dots + \alpha_{nn}a_n,
\end{aligned}$$

де $\alpha_{ij} \in P$; $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, — розклади образів базисних векторів a_1, a_2, $\dots$, a_n за цим же базисом, то квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із координатних стовпців векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\dots$, $\varphi(a_n)$, є матрицею лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, $\dots$, a_n лінійного простору L. Якщо в просторі L вибрати новий базис a_1', a_2', $\dots$, a_n', то матрицю A' оператора φ у цьому базисі

Тобто, якщо

$$\varphi(a_1) = \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n,$$
$$\varphi(a_2) = \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi(a_n) = \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n,$$

де $\alpha_{ij} \in P$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, — розклади образів базисних векторів a_1, a_2, $\ldots$, a_n за цим же базисом, то квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із координатних стовпців векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, $\ldots$, $\varphi(a_n)$, є матрицею лінійного оператора φ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ лінійного простору L. Якщо в просторі L вибрати новий базис a'_1, a'_2, $\ldots$, a'_n, то матрицю A' оператора φ у цьому базисі можна знайти за формулою

$$A' = T^{-1}AT,$$

Тобто, якщо

$$\begin{aligned} \varphi(a_1) &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{21}a_2 + \cdots + \alpha_{n1}a_n, \\ \varphi(a_2) &= \alpha_{12}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \cdots + \alpha_{n2}a_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi(a_n) &= \alpha_{1n}a_1 + \alpha_{2n}a_2 + \cdots + \alpha_{nn}a_n, \end{aligned}$$

де $\alpha_{ij} \in P$; $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, — розклади образів базисних векторів a_1, a_2, ..., a_n за цим же базисом, то квадратна матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із координатних стовпців векторів $\varphi(a_1)$, $\varphi(a_2)$, ..., $\varphi(a_n)$, є матрицею лінійного оператора φ у базисі a_1, a_2, ..., a_n лінійного простору L. Якщо в просторі L вибрати новий базис a'_1, a'_2, ..., a'_n, то матрицю A' оператора φ у цьому базисі можна знайти за формулою

$$A' = T^{-1}AT,$$

де T — матриця переходу від базису a_1, a_2, ..., a_n до базису a'_1, a'_2, ..., a'_n простору L.

Зауваження 2

Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L.

Зауваження 2

Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L. Якщо оператор φ оборотний,

Зауваження 2

Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L. Якщо оператор φ оборотний, то матриці операторів φ і φ^{-1}

Зауваження 2

Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L. Якщо оператор φ оборотний, то матриці операторів φ і φ^{-1} — взаємно обернені

Зауваження 2

Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L. Якщо оператор φ оборотний, то матриці операторів φ і φ^{-1} — взаємно обернені (у будь-якому базисі лінійного просторуL).

Зауваження 2

Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L. Якщо оператор φ оборотний, то матриці операторів φ і φ^{-1} — взаємно обернені (у будь-якому базисі лінійного просторуL).

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо L є скінченновимірним лінійним простором над полем P,

Зауваження 2

Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L. Якщо оператор φ оборотний, то матриці операторів φ і φ^{-1} — взаємно обернені (у будь-якому базисі лінійного просторуL).

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, а φ є лінійним оператором простору L,

Зауваження 2

Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L. Якщо оператор φ оборотний, то матриці операторів φ і φ^{-1} — взаємно обернені (у будь-якому базисі лінійного просторуL).

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, а φ є лінійним оператором простору L, то лінійний оператор φ є оборотним

Зауваження 2

Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L. Якщо оператор φ оборотний, то матриці операторів φ і φ^{-1} — взаємно обернені (у будь-якому базисі лінійного просторуL).

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, а φ є лінійним оператором простору L, то лінійний оператор φ є оборотним тоді і тільки тоді,

Зауваження 2

Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L. Якщо оператор φ оборотний, то матриці операторів φ і φ^{-1} — взаємно обернені (у будь-якому базисі лінійного просторуL).

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, а φ є лінійним оператором простору L, то лінійний оператор φ є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$;

Зауваження 2

Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L. Якщо оператор φ оборотний, то матриці операторів φ і φ^{-1} — взаємно обернені (у будь-якому базисі лінійного просторуL).

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, а φ є лінійним оператором простору L, то лінійний оператор φ є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$;
2. $\operatorname{Im}\varphi = L$;

Зауваження 2

Відмітимо, що одинична матриця є матрицею одиничного оператора в будь-якому базисі простору L. Якщо оператор φ оборотний, то матриці операторів φ і φ^{-1} — взаємно обернені (у будь-якому базисі лінійного просторуL).

Завдання для самостійної роботи.

Довести, що якщо L є скінченновимірним лінійним простором над полем P, а φ є лінійним оператором простору L, то лінійний оператор φ є оборотним тоді і тільки тоді, коли виконується одна із наступних умов:

1. $\operatorname{Ker}\varphi = \{\bar{0}\}$;
2. $\operatorname{Im}\varphi = L$;
3. матриця оператора φ є невиродженою (незалежно від вибору базису).