Нормальна форма Фробеніуса. Нормальна форма Жордана

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

30 березня 2023 року

Нехай P — деяке поле.

Нехай P — деяке поле. A і B — квадратні матриці порядку n над полем P.

Нехай P — деяке поле. A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Нагадаємо, Нехай P — деяке поле. A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Нагадаємо, матриця B називаються подібною матриці A, Нехай P — деяке поле. A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Нагадаємо, матриця B називаються подібною матриці A, якщо існує оборотна матриця S порядку n над полем P, Нехай P — деяке поле. A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Нагадаємо, матриця B називаються подібною матриці A, якщо існує оборотна матриця S порядку n над полем P, така що $B = S^{-1}AS$.

Нехай P — деяке поле. A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Нагадаємо, матриця B називаються подібною матриці A, якщо існує оборотна матриця S порядку n над полем P, така що $B = S^{-1}AS$. Матриці лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору в різних базисах цього простору подібні одна одній.

Нехай P — деяке поле. A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Нагадаємо, матриця B називаються подібною матриці A, якщо існує оборотна матриця S порядку n над полем P, така що $B = S^{-1}AS$. Матриці лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору в різних базисах цього простору подібні одна одній. Відношення подібності матриць має наступні властивості:

1. $A \simeq A$ для будь-якої квадратної матриці A;

Нехай P — деяке поле. A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Нагадаємо, матриця B називаються подібною матриці A, якщо існує оборотна матриця S порядку n над полем P, така що $B = S^{-1}AS$. Матриці лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору в різних базисах цього простору подібні одна одній. Відношення подібності матриць має наступні властивості:

1. $A \simeq A$ для будь-якої квадратної матриці A;
2. якщо $A \simeq B$, то $B \simeq A$;

Нехай P — деяке поле. A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Нагадаємо, матриця B називаються подібною матриці A, якщо існує оборотна матриця S порядку n над полем P, така що $B = S^{-1}AS$. Матриці лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору в різних базисах цього простору подібні одна одній. Відношення подібності матриць має наступні властивості:

1. $A \simeq A$ для будь-якої квадратної матриці A;
2. якщо $A \simeq B$, то $B \simeq A$;
3. якщо $A \simeq B$ і $B \simeq C$, то $A \simeq C$.

Нехай P — деяке поле. A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Нагадаємо, матриця B називаються подібною матриці A, якщо існує оборотна матриця S порядку n над полем P, така що $B = S^{-1}AS$. Матриці лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору в різних базисах цього простору подібні одна одній. Відношення подібності матриць має наступні властивості:

1. $A \simeq A$ для будь-якої квадратної матриці A;
2. якщо $A \simeq B$, то $B \simeq A$;
3. якщо $A \simeq B$ і $B \simeq C$, то $A \simeq C$.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай A і B дві квадратні матриці над полем P не обов'язково одного порядку.

Нехай P — деяке поле. A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Нагадаємо, матриця B називаються подібною матриці A, якщо існує оборотна матриця S порядку n над полем P, така що $B = S^{-1}AS$. Матриці лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору в різних базисах цього простору подібні одна одній. Відношення подібності матриць має наступні властивості:

1. $A \simeq A$ для будь-якої квадратної матриці A;
2. якщо $A \simeq B$, то $B \simeq A$;
3. якщо $A \simeq B$ і $B \simeq C$, то $A \simeq C$.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай A і B дві квадратні матриці над полем P не обов'язково одного порядку. Показати, що:

1. $$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix};$$

Нехай P — деяке поле. A і B — квадратні матриці порядку n над полем P. Нагадаємо, матриця B називаються подібною матриці A, якщо існує оборотна матриця S порядку n над полем P, така що $B = S^{-1}AS$. Матриці лінійного оператора скінченновимірного лінійного простору в різних базисах цього простору подібні одна одній. Відношення подібності матриць має наступні властивості:

1. $A \simeq A$ для будь-якої квадратної матриці A;
2. якщо $A \simeq B$, то $B \simeq A$;
3. якщо $A \simeq B$ і $B \simeq C$, то $A \simeq C$.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай A і B дві квадратні матриці над полем P не обов'язково одного порядку. Показати, що:

1. $$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix};$$
2. якщо $A \simeq A'$, то $$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}.$$

Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць.

Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою.

Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою. Різні класи не перетинаються

Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою. Різні класи не перетинаються (тобто їх переріз дорівнює порожній множині).

Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою. Різні класи не перетинаються (тобто їх переріз дорівнює порожній множині). Якщо із кожного класу подібних матриць вибрати одну матрицю, Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою. Різні класи не перетинаються (тобто їх переріз дорівнює порожній множині). Якщо із кожного класу подібних матриць вибрати одну матрицю, то ми одержимо множину так званих нормальних форм.

Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою. Різні класи не перетинаються (тобто їх переріз дорівнює порожній множині). Якщо із кожного класу подібних матриць вибрати одну матрицю, то ми одержимо множину так званих нормальних форм. Кожна матриця над полем P

Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою. Різні класи не перетинаються (тобто їх переріз дорівнює порожній множині). Якщо із кожного класу подібних матриць вибрати одну матрицю, то ми одержимо множину так званих нормальних форм. Кожна матриця над полем P подібна деякій із утворених нормальних форм.

Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою. Різні класи не перетинаються (тобто їх переріз дорівнює порожній множині). Якщо із кожного класу подібних матриць вибрати одну матрицю, то ми одержимо множину так званих нормальних форм. Кожна матриця над полем P подібна деякій із утворених нормальних форм. Однією із нормальних форм матриць є нормальна форма Фробеніуса

Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою. Різні класи не перетинаються (тобто їх переріз дорівнює порожній множині). Якщо із кожного класу подібних матриць вибрати одну матрицю, то ми одержимо множину так званих нормальних форм. Кожна матриця над полем P подібна деякій із утворених нормальних форм. Однією із нормальних форм матриць є нормальна форма Фробеніуса (НФФ). Перейдемо до її визначення.

Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою. Різні класи не перетинаються (тобто їх переріз дорівнює порожній множині). Якщо із кожного класу подібних матриць вибрати одну матрицю, то ми одержимо множину так званих нормальних форм. Кожна матриця над полем P подібна деякій із утворених нормальних форм. Однією із нормальних форм матриць є нормальна форма Фробеніуса (НФФ). Перейдемо до її визначення.

Означення 1

Нехай

$$f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

— многочлен над полем P натурального степеня s і коефіцієнтами α_0, α_1, $\ldots$, α_{s-1} із поля P.

Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою. Різні класи не перетинаються (тобто їх переріз дорівнює порожній множині). Якщо із кожного класу подібних матриць вибрати одну матрицю, то ми одержимо множину так званих нормальних форм. Кожна матриця над полем P подібна деякій із утворених нормальних форм. Однією із нормальних форм матриць є нормальна форма Фробеніуса (НФФ). Перейдемо до її визначення.

Означення 1

Нехай

$$f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$

— многочлен над полем P натурального степеня s і коефіцієнтами α_0, α_1, $\ldots$, α_{s-1} із поля P. Матриця порядку s над полем P

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix}$$

Сукупність всіх квадратних матриць над полем P розбивається на класи подібних матриць. В одному класі знаходяться всі матриці, які подібні між собою. Різні класи не перетинаються (тобто їх переріз дорівнює порожній множині). Якщо із кожного класу подібних матриць вибрати одну матрицю, то ми одержимо множину так званих нормальних форм. Кожна матриця над полем P подібна деякій із утворених нормальних форм. Однією із нормальних форм матриць є нормальна форма Фробеніуса (НФФ). Перейдемо до її визначення.

Означення 1

Нехай
$$f(\lambda) = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0$$
— многочлен над полем P натурального степеня s і коефіцієнтами α_0, α_1, $\dots$, α_{s-1} із поля P. Матриця порядку s над полем P
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix}$$
називається супровідною матрицею многочлена $f(\lambda)$.

Супровідну матриця многочлена $f(\lambda)$

Супровідну матриця многочлена $f(\lambda)$ (звертаємо увагу старший коефіцієнт многочлена $f(\lambda)$ повинен дорівнювати 1)

Супровідну матриця многочлена $f(\lambda)$ (звертаємо увагу старший коефіцієнт многочлена $f(\lambda)$ повинен дорівнювати 1) будемо позначати через $\widetilde{f(\lambda)}$.

Супровідну матриця многочлена $f(\lambda)$ (звертаємо увагу старший коефіцієнт многочлена $f(\lambda)$ повинен дорівнювати 1) будемо позначати через $\widetilde{f(\lambda)}$.

Означення 2

Нехай $p(\lambda)$ — незвідний над полем P многочлен від λ із старшим коефіцієнтом 1

Супровідну матрицю многочлена $f(\lambda)$ (звертаємо увагу старший коефіцієнт многочлена $f(\lambda)$ повинен дорівнювати 1) будемо позначати через $\widetilde{f(\lambda)}$.

Означення 2

Нехай $p(\lambda)$ — незвідний над полем P многочлен від λ із старшим коефіцієнтом 1 і t — деяке натуральне число.

Супровідну матрицю многочлена $f(\lambda)$ (звертаємо увагу старший коефіцієнт многочлена $f(\lambda)$ повинен дорівнювати 1) будемо позначати через $\widetilde{f(\lambda)}$.

Означення 2

Нехай $p(\lambda)$ — незвідний над полем P многочлен від λ із старшим коефіцієнтом 1 і t — деяке натуральне число. Супровідна матриця $\widetilde{p(\lambda)^t}$

Супровідну матрицю многочлена $f(\lambda)$ (звертаємо увагу старший коефіцієнт многочлена $f(\lambda)$ повинен дорівнювати 1) будемо позначати через $\widetilde{f(\lambda)}$.

Означення 2

Нехай $p(\lambda)$ — незвідний над полем P многочлен від λ із старшим коефіцієнтом 1 і t — деяке натуральне число. Супровідна матриця $\widetilde{p(\lambda)^t}$ многочлена $p(\lambda)^t$

Супровідну матриця многочлена $f(\lambda)$ (звертаємо увагу старший коефіцієнт многочлена $f(\lambda)$ повинен дорівнювати 1) будемо позначати через $\widetilde{f(\lambda)}$.

Означення 2

Нехай $p(\lambda)$ — незвідний над полем P многочлен від λ із старшим коефіцієнтом 1 і t — деяке натуральне число. Супровідна матриця $\widetilde{p(\lambda)^t}$ многочлена $p(\lambda)^t$ називається кліткою Фробеніуса.

Супровідну матрицю многочлена $f(\lambda)$ (звертаємо увагу старший коефіцієнт многочлена $f(\lambda)$ повинен дорівнювати 1) будемо позначати через $\widetilde{f(\lambda)}$.

Означення 2

Нехай $p(\lambda)$ — незвідний над полем P многочлен від λ із старшим коефіцієнтом 1 і t — деяке натуральне число. Супровідна матриця $\widetilde{p(\lambda)^t}$ многочлена $p(\lambda)^t$ називається кліткою Фробеніуса.

Означення 3

Нормальною формою Фробеніуса

Супровідну матрицю многочлена $f(\lambda)$ (звертаємо увагу старший коефіцієнт многочлена $f(\lambda)$ повинен дорівнювати 1) будемо позначати через $\widetilde{f(\lambda)}$.

Означення 2

Нехай $p(\lambda)$ — незвідний над полем P многочлен від λ із старшим коефіцієнтом 1 і t — деяке натуральне число. Супровідна матриця $\widetilde{p(\lambda)^t}$ многочлена $p(\lambda)^t$ називається кліткою Фробеніуса.

Означення 3

Нормальною формою Фробеніуса називається матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p_1(\lambda)^{t_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{p_2(\lambda)^{t_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{p_k(\lambda)^{t_k}} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

Супровідну матриця многочлена $f(\lambda)$ (звертаємо увагу старший коефіцієнт многочлена $f(\lambda)$ повинен дорівнювати 1) будемо позначати через $\widetilde{f(\lambda)}$.

Означення 2

Нехай $p(\lambda)$ — незвідний над полем P многочлен від λ із старшим коефіцієнтом 1 і t — деяке натуральне число. Супровідна матриця $\widetilde{p(\lambda)^t}$ многочлена $p(\lambda)^t$ називається **кліткою Фробеніуса**.

Означення 3

Нормальною формою Фробеніуса називається матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p_1(\lambda)^{t_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{p_2(\lambda)^{t_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{p_k(\lambda)^{t_k}} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$, ..., $p_k(\lambda)$ — незвідні над полем P многочлени із старшими коефіцієнтами 1;

Супровідну матрицю многочлена $f(\lambda)$ (звертаємо увагу старший коефіцієнт многочлена $f(\lambda)$ повинен дорівнювати 1) будемо позначати через $\widetilde{f(\lambda)}$.

Означення 2

Нехай $p(\lambda)$ — незвідний над полем P многочлен від λ із старшим коефіцієнтом 1 і t — деяке натуральне число. Супровідна матриця $\widetilde{p(\lambda)^t}$ многочлена $p(\lambda)^t$ називається кліткою Фробеніуса.

Означення 3

Нормальною формою Фробеніуса називається матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p_1(\lambda)^{t_1}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \widetilde{p_2(\lambda)^{t_2}} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \widetilde{p_k(\lambda)^{t_k}} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

де $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$, ..., $p_k(\lambda)$ — незвідні над полем P многочлени із старшими коефіцієнтами 1; t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа

Супровідну матрицю многочлена $f(\lambda)$ (звертаємо увагу старший коефіцієнт многочлена $f(\lambda)$ повинен дорівнювати 1) будемо позначати через $\widetilde{f(\lambda)}$.

Означення 2

Нехай $p(\lambda)$ — незвідний над полем P многочлен від λ із старшим коефіцієнтом 1 і t — деяке натуральне число. Супровідна матриця $\widetilde{p(\lambda)^t}$ многочлена $p(\lambda)^t$ називається кліткою Фробеніуса.

Означення 3

Нормальною формою Фробеніуса називається матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} \widetilde{p_1(\lambda)^{t_1}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \widetilde{p_2(\lambda)^{t_2}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \widetilde{p_k(\lambda)^{t_k}} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

де $p_1(\lambda)$, $p_2(\lambda)$, ..., $p_k(\lambda)$ — незвідні над полем P многочлени із старшими коефіцієнтами 1; t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа і $\widetilde{p_1(\lambda)^{t_1}}$, $\widetilde{p_2(\lambda)^{t_2}}$, ..., $\widetilde{p_k(\lambda)^{t_k}}$ — клітки Фробеніуса.

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1)

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) з клітками Фробеніуса $\widetilde{p_1(\lambda)^{t_1}}, \widetilde{p_2(\lambda)^{t_2}}, \ldots, \widetilde{p_k(\lambda)^{t_k}}$

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) з клітками Фробеніуса $\widetilde{p_1(\lambda)^{t_1}}$, $\widetilde{p_2(\lambda)^{t_2}}$, …, $\widetilde{p_k(\lambda)^{t_k}}$ *дорівнює добутку*

$$p_1(\lambda)^{t_1} p_2(\lambda)^{t_2} \cdots p_k(\lambda)^{t_k}.$$

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) з клітками Фробеніуса $\widetilde{p_1(\lambda)^{t_1}}, \widetilde{p_2(\lambda)^{t_2}}, \ldots, \widetilde{p_k(\lambda)^{t_k}}$ дорівнює добутку

$$p_1(\lambda)^{t_1} p_2(\lambda)^{t_2} \cdots p_k(\lambda)^{t_k}.$$

Теорема 2

Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) з клітками Фробеніуса $\widetilde{p_1(\lambda)^{t_1}}$, $\widetilde{p_2(\lambda)^{t_2}}$, ..., $\widetilde{p_k(\lambda)^{t_k}}$ дорівнює добутку

$$p_1(\lambda)^{t_1} p_2(\lambda)^{t_2} \cdots p_k(\lambda)^{t_k}.$$

Теорема 2

Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.

Доведення.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P.

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) з клітками Фробеніуса $\widetilde{p_1(\lambda)^{t_1}}$, $\widetilde{p_2(\lambda)^{t_2}}$, ..., $\widetilde{p_k(\lambda)^{t_k}}$ дорівнює добутку

$$p_1(\lambda)^{t_1} p_2(\lambda)^{t_2} \cdots p_k(\lambda)^{t_k}.$$

Теорема 2

Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.

Доведення.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P. Розглянемо деякий лінійний простір L розмірності n над полем P

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) з клітками Фробеніуса $\widetilde{p_1(\lambda)^{t_1}}, \widetilde{p_2(\lambda)^{t_2}}, \ldots, \widetilde{p_k(\lambda)^{t_k}}$ *дорівнює добутку*

$$p_1(\lambda)^{t_1} p_2(\lambda)^{t_2} \cdots p_k(\lambda)^{t_k}.$$

Теорема 2

Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.

Доведення.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P. Розглянемо деякий лінійний простір L розмірності n над полем P (наприклад n-вимірний векторний простір P^n).

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) з клітками Фробеніуса $p_1(\lambda)^{t_1}$, $p_2(\lambda)^{t_2}$, ..., $p_k(\lambda)^{t_k}$ дорівнює добутку

$$p_1(\lambda)^{t_1} p_2(\lambda)^{t_2} \cdots p_k(\lambda)^{t_k}.$$

Теорема 2

Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.

Доведення.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P. Розглянемо деякий лінійний простір L розмірності n над полем P (наприклад n-вимірний векторний простір P^n). Нехай a_1, a_2, ..., a_n — базис лінійного простору L.

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) з клітками Фробеніуса $\widetilde{p_1(\lambda)}^{t_1}, \widetilde{p_2(\lambda)}^{t_2}, \ldots, \widetilde{p_k(\lambda)}^{t_k}$ *дорівнює добутку*

$$p_1(\lambda)^{t_1} p_2(\lambda)^{t_2} \cdots p_k(\lambda)^{t_k}.$$

Теорема 2

Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.

Доведення.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P. Розглянемо деякий лінійний простір L розмірності n над полем P (наприклад n-вимірний векторний простір P^n). Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — базис лінійного простору L. Розглянемо лінійний оператор φ

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) *з клітками Фробеніуса* $p_1(\lambda)^{t_1}$, $p_2(\lambda)^{t_2}$, $\ldots$, $p_k(\lambda)^{t_k}$ *дорівнює добутку*

$$p_1(\lambda)^{t_1} p_2(\lambda)^{t_2} \cdots p_k(\lambda)^{t_k}.$$

Теорема 2

Будь-яка квадратна матриця над полем P *подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.*

Доведення.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P. Розглянемо деякий лінійний простір L розмірності n над полем P (наприклад n-вимірний векторний простір P^n). Нехай a_1, a_2, $\ldots$, a_n — базис лінійного простору L. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) з клітками Фробеніуса $\widetilde{p_1(\lambda)}^{t_1}$, $\widetilde{p_2(\lambda)}^{t_2}$, ..., $\widetilde{p_k(\lambda)}^{t_k}$ *дорівнює добутку*

$$p_1(\lambda)^{t_1} p_2(\lambda)^{t_2} \cdots p_k(\lambda)^{t_k}.$$

Теорема 2

Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.

Доведення.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P. Розглянемо деякий лінійний простір L розмірності n над полем P (наприклад n-вимірний векторний простір P^n). Нехай a_1, a_2, ..., a_n — базис лінійного простору L. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L такий, що матриця цього оператора у базисі a_1, a_2, ..., a_n

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) *з клітками Фробеніуса* $\widetilde{p_1(\lambda)}^{t_1}$, $\widetilde{p_2(\lambda)}^{t_2}$, ..., $\widetilde{p_k(\lambda)}^{t_k}$ *дорівнює добутку*

$$p_1(\lambda)^{t_1} p_2(\lambda)^{t_2} \cdots p_k(\lambda)^{t_k}.$$

Теорема 2

Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.

Доведення.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P. Розглянемо деякий лінійний простір L розмірності n над полем P (наприклад n-вимірний векторний простір P^n). Нехай a_1, a_2, ..., a_n — базис лінійного простору L. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L такий, що матриця цього оператора у базисі a_1, a_2, ..., a_n співпадала б з матрицею A.

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) з клітками Фробеніуса $\widetilde{p_1(\lambda)}^{t_1}, \widetilde{p_2(\lambda)}^{t_2}, \ldots, \widetilde{p_k(\lambda)}^{t_k}$ дорівнює добутку

$$p_1(\lambda)^{t_1} p_2(\lambda)^{t_2} \cdots p_k(\lambda)^{t_k}.$$

Теорема 2

Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.

Доведення.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P. Розглянемо деякий лінійний простір L розмірності n над полем P (наприклад n-вимірний векторний простір P^n). Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — базис лінійного простору L. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L такий, що матриця цього оператора у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ співпадала б з матрицею A. Розкладемо лінійний простір L з оператором φ

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) з клітками Фробеніуса $\widetilde{p_1(\lambda)}^{t_1}$, $\widetilde{p_2(\lambda)}^{t_2}$, …, $\widetilde{p_k(\lambda)}^{t_k}$ *дорівнює добутку*

$$p_1(\lambda)^{t_1} p_2(\lambda)^{t_2} \cdots p_k(\lambda)^{t_k}.$$

Теорема 2

Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.

Доведення.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P. Розглянемо деякий лінійний простір L розмірності n над полем P (наприклад n-вимірний векторний простір P^n). Нехай a_1, a_2, …, a_n — базис лінійного простору L. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L такий, що матриця цього оператора у базисі a_1, a_2, …, a_n співпадала б з матрицею A. Розкладемо лінійний простір L з оператором φ у пряму суму примарних циклічних підпросторів:

$$L = C(b_1) \oplus C(b_2) \oplus \cdots \oplus C(b_s),$$

Теорема 1

Характеристичний многочлен нормальної форми Фробеніуса (1) з клітками Фробеніуса $\widetilde{p_1(\lambda)}^{t_1}$, $\widetilde{p_2(\lambda)}^{t_2}$, ..., $\widetilde{p_k(\lambda)}^{t_k}$ дорівнює добутку

$$p_1(\lambda)^{t_1} p_2(\lambda)^{t_2} \cdots p_k(\lambda)^{t_k}.$$

Теорема 2

Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Фробеніуса.

Доведення.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P. Розглянемо деякий лінійний простір L розмірності n над полем P (наприклад n-вимірний векторний простір P^n). Нехай $a_1, a_2, \dots, a_n$ — базис лінійного простору L. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L такий, що матриця цього оператора у базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ співпадала б з матрицею A. Розкладемо лінійний простір L з оператором φ у пряму суму примарних циклічних підпросторів:

$$L = C(b_1) \oplus C(b_2) \oplus \cdots \oplus C(b_s),$$

породжених відповідно деякими векторами $b_1, b_2, \dots, b_s$.

Доведення.

Виберемо новий базис лінійного простору L,

Доведення.

Виберемо новий базис лінійного простору L, провівши цей базис через базиси циклічних підпросторів $C(b_1)$, $C(b_2)$, $\dots$, $C(b_s)$:

Доведення.

Виберемо новий базис лінійного простору L, провівши цей базис через базиси циклічних підпросторів $C(b_1)$, $C(b_2)$, ..., $C(b_s)$:

$$
\begin{gathered}
b_1,\ \varphi(b_1),\ \ldots,\ \varphi^{k_1-1}(b_1),\\
b_2,\ \varphi(b_2),\ \ldots,\ \varphi^{k_2-1}(b_2),\\
\vdots\\
b_s,\ \varphi(b_s),\ \ldots,\ \varphi^{k_s-1}(b_s).
\end{gathered}
$$

Доведення.

Виберемо новий базис лінійного простору L, провівши цей базис через базиси циклічних підпросторів $C(b_1)$, $C(b_2)$, ..., $C(b_s)$:

$$
\begin{gathered}
b_1,\ \varphi(b_1),\ \ldots,\ \varphi^{k_1-1}(b_1),\\
b_2,\ \varphi(b_2),\ \ldots,\ \varphi^{k_2-1}(b_2),\\
\vdots\\
b_s,\ \varphi(b_s),\ \ldots,\ \varphi^{k_s-1}(b_s).
\end{gathered}
$$

Для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$

Доведення.

Виберемо новий базис лінійного простору L, провівши цей базис через базиси циклічних підпросторів $C(b_1)$, $C(b_2)$, $\ldots$, $C(b_s)$:

$$b_1,\ \varphi(b_1),\ \ldots,\ \varphi^{k_1-1}(b_1),$$

$$b_2,\ \varphi(b_2),\ \ldots,\ \varphi^{k_2-1}(b_2),$$

$$\vdots$$

$$b_s,\ \varphi(b_s),\ \ldots,\ \varphi^{k_s-1}(b_s).$$

Для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ матриця лінійного оператора $\varphi_{C(b_i)}$,

Доведення.

Виберемо новий базис лінійного простору L, провівши цей базис через базиси циклічних підпросторів $C(b_1)$, $C(b_2)$, $\ldots$, $C(b_s)$:

$$b_1,\ \varphi(b_1),\ \ldots,\ \varphi^{k_1-1}(b_1),$$

$$b_2,\ \varphi(b_2),\ \ldots,\ \varphi^{k_2-1}(b_2),$$

$$\vdots$$

$$b_s,\ \varphi(b_s),\ \ldots,\ \varphi^{k_s-1}(b_s).$$

Для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ матриця лінійного оператора $\varphi_{C(b_i)}$, який є обмеженням лінійного оператора φ на циклічний простір $C(b_i)$, є кліткою Фробеніуса.

Доведення.

Виберемо новий базис лінійного простору L, провівши цей базис через базиси циклічних підпросторів $C(b_1)$, $C(b_2)$, …, $C(b_s)$:

$$b_1,\ \varphi(b_1),\ \ldots,\ \varphi^{k_1-1}(b_1),$$

$$b_2,\ \varphi(b_2),\ \ldots,\ \varphi^{k_2-1}(b_2),$$

$$\vdots$$

$$b_s,\ \varphi(b_s),\ \ldots,\ \varphi^{k_s-1}(b_s).$$

Для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ матриця лінійного оператора $\varphi_{C(b_i)}$, який є обмеженням лінійного оператора φ на циклічний простір $C(b_i)$, є кліткою Фробеніуса. Тому матриця оператора φ у новому базисі є нормальною формою Фробеніуса. $\square$

Доведення.

Виберемо новий базис лінійного простору L, провівши цей базис через базиси циклічних підпросторів $C(b_1)$, $C(b_2)$, $\ldots$, $C(b_s)$:

$$b_1,\ \varphi(b_1),\ \ldots,\ \varphi^{k_1-1}(b_1),$$

$$b_2,\ \varphi(b_2),\ \ldots,\ \varphi^{k_2-1}(b_2),$$

$$\vdots$$

$$b_s,\ \varphi(b_s),\ \ldots,\ \varphi^{k_s-1}(b_s).$$

Для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ матриця лінійного оператора $\varphi_{C(b_i)}$, який є обмеженням лінійного оператора φ на циклічний простір $C(b_i)$, є кліткою Фробеніуса. Тому матриця оператора φ у новому базисі є нормальною формою Фробеніуса. □

Теорема 3

Нормальна форма Фробеніуса подібна деякій іншій нормальній формі Фробеніуса

Доведення.

Виберемо новий базис лінійного простору L, провівши цей базис через базиси циклічних підпросторів $C(b_1)$, $C(b_2)$, ..., $C(b_s)$:

$$b_1,\ \varphi(b_1),\ \ldots,\ \varphi^{k_1-1}(b_1),$$

$$b_2,\ \varphi(b_2),\ \ldots,\ \varphi^{k_2-1}(b_2),$$

$$\vdots$$

$$b_s,\ \varphi(b_s),\ \ldots,\ \varphi^{k_s-1}(b_s).$$

Для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ матриця лінійного оператора $\varphi_{C(b_i)}$, який є обмеженням лінійного оператора φ на циклічний простір $C(b_i)$, є кліткою Фробеніуса. Тому матриця оператора φ у новому базисі є нормальною формою Фробеніуса. □

Теорема 3

Нормальна форма Фробеніуса подібна деякій іншій нормальній формі Фробеніуса тоді і тільки тоді, коли

Доведення.

Виберемо новий базис лінійного простору L, провівши цей базис через базиси циклічних підпросторів $C(b_1)$, $C(b_2)$, ..., $C(b_s)$:

$$b_1,\ \varphi(b_1),\ \ldots,\ \varphi^{k_1-1}(b_1),$$

$$b_2,\ \varphi(b_2),\ \ldots,\ \varphi^{k_2-1}(b_2),$$

$$\vdots$$

$$b_s,\ \varphi(b_s),\ \ldots,\ \varphi^{k_s-1}(b_s).$$

Для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, s\}$ матриця лінійного оператора $\varphi_{C(b_i)}$, який є обмеженням лінійного оператора φ на циклічний простір $C(b_i)$, є кліткою Фробеніуса. Тому матриця оператора φ у новому базисі є нормальною формою Фробеніуса. □

Теорема 3

Нормальна форма Фробеніуса подібна деякій іншій нормальній формі Фробеніуса тоді і тільки тоді, коли вони складаються з однакових кліток Фробеніуса,

Доведення.

Виберемо новий базис лінійного простору L, провівши цей базис через базиси циклічних підпросторів $C(b_1)$, $C(b_2)$, $\dots$, $C(b_s)$:

$$b_1,\ \varphi(b_1),\ \dots,\ \varphi^{k_1-1}(b_1),$$

$$b_2,\ \varphi(b_2),\ \dots,\ \varphi^{k_2-1}(b_2),$$

$$\vdots$$

$$b_s,\ \varphi(b_s),\ \dots,\ \varphi^{k_s-1}(b_s).$$

Для кожного $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ матриця лінійного оператора $\varphi_{C(b_i)}$, який є обмеженням лінійного оператора φ на циклічний простір $C(b_i)$, є кліткою Фробеніуса. Тому матриця оператора φ у новому базисі є нормальною формою Фробеніуса. □

Теорема 3

Нормальна форма Фробеніуса подібна деякій іншій нормальній формі Фробеніуса тоді і тільки тоді, коли вони складаються з однакових кліток Фробеніуса, розташованих можливо по різному вздовж діагоналей.

Теорема 4

Дві квадратні матриці над полем P подібні одна одній тоді і тільки тоді, коли нормальні форми Фробеніуса цих матриць співпадають з точністю до порядку слідування кліток Фробеніуса вздовж діагоналей цих форм.

Теорема 4

Дві квадратні матриці над полем P подібні одна одній тоді і тільки тоді, коли нормальні форми Фробеніуса цих матриць співпадають з точністю до порядку слідування кліток Фробеніуса вздовж діагоналей цих форм.

Означення 4

Нехай α — деякий елемент поля P.

Означення 4

Нехай α — деякий елемент поля P. Матриця порядку s над полем P вигляду:

Означення 4

Нехай α — деякий елемент поля P. Матриця порядку s над полем P вигляду:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{2}$$

називається кліткою Жордна.

Означення 4

Нехай α — деякий елемент поля P. Матриця порядку s над полем P вигляду:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{2}$$

називається кліткою Жордана.

Клітку Жордана порядку s з елементом α на діагоналі, тобто матрицю вигляду (2), будемо позначати через $J_s(\alpha)$.

Означення 4

Нехай α — деякий елемент поля P. Матриця порядку s над полем P вигляду:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{2}$$

називається кліткою Жордна.

Клітку Жордана порядку s з елементом α на діагоналі, тобто матрицю вигляду (2), будемо позначати через $J_s(\alpha)$.

Означення 5

Нехай k, s_1, s_2, $\dots$, s_k — деякі натуральні числа;

Означення 4

Нехай α — деякий елемент поля P. Матриця порядку s над полем P вигляду:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{2}$$

називається кліткою Жордана.

Клітку Жордана порядку s з елементом α на діагоналі, тобто матрицю вигляду (2), будемо позначати через $J_s(\alpha)$.

Означення 5

Нехай k, s_1, s_2, ..., s_k — деякі натуральні числа; α_1, α_2, ... α_k — деякі елементи поля P

Означення 4

Нехай α — деякий елемент поля P. Матриця порядку s над полем P вигляду:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{2}$$

називається кліткою Жордна.

Клітку Жордана порядку s з елементом α на діагоналі, тобто матрицю вигляду (2), будемо позначати через $J_s(\alpha)$.

Означення 5

Нехай k, s_1, s_2, ..., s_k — деякі натуральні числа; α_1, α_2, ... α_k — деякі елементи поля P (не обов'язково всі попарно різні як s_1, s_2, ..., s_k,

Означення 4

Нехай α — деякий елемент поля P. Матриця порядку s над полем P вигляду:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{2}$$

називається кліткою Жордна.

Клітку Жордана порядку s з елементом α на діагоналі, тобто матрицю вигляду (2), будемо позначати через $J_s(\alpha)$.

Означення 5

Нехай k, s_1, s_2, ..., s_k — деякі натуральні числа; α_1, α_2, ... α_k — деякі елементи поля P (не обов'язково всі попарно різні як s_1, s_2, ..., s_k, так і α_1, α_2, ... α_k).

Означення 4

Нехай α — деякий елемент поля P. Матриця порядку s над полем P вигляду:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{2}$$

називається кліткою Жордна.

Клітку Жордана порядку s з елементом α на діагоналі, тобто матрицю вигляду (2), будемо позначати через $J_s(\alpha)$.

Означення 5

Нехай k, s_1, s_2, $\dots$, s_k — деякі натуральні числа; α_1, α_2, $\dots$ α_k — деякі елементи поля P (не обов'язково всі попарно різні як s_1, s_2, $\dots$, s_k, так і α_1, α_2, $\dots$ α_k). Матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} J_{s_1}(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{s_2}(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{s_k}(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

Означення 4

Нехай α — деякий елемент поля P. Матриця порядку s над полем P вигляду:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix} \tag{2}$$

називається кліткою Жордна.

Клітку Жордана порядку s з елементом α на діагоналі, тобто матрицю вигляду (2), будемо позначати через $J_s(\alpha)$.

Означення 5

Нехай k, s_1, s_2, ..., s_k — деякі натуральні числа; α_1, α_2, ... α_k — деякі елементи поля P (не обов'язково всі попарно різні як s_1, s_2, ..., s_k, так і α_1, α_2, ... α_k). Матриця вигляду

$$\begin{pmatrix} J_{s_1}(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{s_2}(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{s_k}(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

називається нормальною формою Жордана.

Теорема 5

Нехай α *— деякий елемент поля* P*,*

Теорема 5

Нехай α *— деякий елемент поля* P*, а* s *— деяке натуральне число.*

Теорема 5

Нехай α — деякий елемент поля P, а s — деяке натуральне число. Супровідна матриця многочлена $(\lambda - \alpha)^s$ від невідомого λ над полем P подібна клітці Жордана $J_s(\alpha)$.

Теорема 5

Нехай α — деякий елемент поля P, а s — деяке натуральне число. Супровідна матриця многочлена $(\lambda - \alpha)^s$ від невідомого λ над полем P подібна клітці Жордана $J_s(\alpha)$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми

Теорема 5

Нехай α — деякий елемент поля P, а s — деяке натуральне число. Супровідна матриця многочлена $(\lambda - \alpha)^s$ від невідомого λ над полем P подібна клітці Жордана $J_s(\alpha)$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і L — деякий скінченновимірний лінійний простір розмірності s над полем P.

Теорема 5

Нехай α — деякий елемент поля P, а s — деяке натуральне число. Супровідна матриця многочлена $(\lambda-\alpha)^s$ від невідомого λ над полем P подібна клітці Жордана $J_s(\alpha)$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і L — деякий скінченновимірний лінійний простір розмірності s над полем P. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L,

Теорема 5

Нехай α — деякий елемент поля P, а s — деяке натуральне число. Супровідна матриця многочлена $(\lambda-\alpha)^s$ від невідомого λ над полем P подібна клітці Жордана $J_s(\alpha)$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і L — деякий скінченновимірний лінійний простір розмірності s над полем P. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L, який у деякому його базисі $a_1, a_2, \ldots, a_s$ має матрицю

$$\widetilde{f(\lambda)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix},$$

Теорема 5

Нехай α — деякий елемент поля P, а s — деяке натуральне число. Супровідна матриця многочлена $(\lambda-\alpha)^s$ від невідомого λ над полем P подібна клітці Жордана $J_s(\alpha)$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і L — деякий скінченновимірний лінійний простір розмірності s над полем P. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L, який у деякому його базисі $a_1, a_2, \ldots, a_s$ має матрицю

$$\widetilde{f(\lambda)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix},$$

де

$$f(\lambda) = (\lambda-\alpha)^s = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Теорема 5

Нехай α — деякий елемент поля P, а s — деяке натуральне число. Супровідна матриця многочлена $(\lambda-\alpha)^s$ від невідомого λ над полем P подібна клітці Жордана $J_s(\alpha)$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і L — деякий скінченновимірний лінійний простір розмірності s над полем P. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L, який у деякому його базисі $a_1, a_2, \ldots, a_s$ має матрицю

$$\widetilde{f(\lambda)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix},$$

де

$$f(\lambda) = (\lambda-\alpha)^s = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Тоді

$$\varphi(a_1) = a_2,$$

Теорема 5

Нехай α — деякий елемент поля P, а s — деяке натуральне число. Супровідна матриця многочлена $(\lambda - \alpha)^s$ від невідомого λ над полем P подібна клітці Жордана $J_s(\alpha)$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і L — деякий скінченновимірний лінійний простір розмірності s над полем P. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L, який у деякому його базисі $a_1, a_2, \ldots, a_s$ має матрицю

$$\widetilde{f(\lambda)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix},$$

де

$$f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Тоді

$$\varphi(a_1) = a_2, \quad \varphi(a_2) = a_3,$$

Теорема 5

Нехай α — деякий елемент поля P, а s — деяке натуральне число. Супровідна матриця многочлена $(\lambda-\alpha)^s$ від невідомого λ над полем P подібна клітці Жордана $J_s(\alpha)$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і L — деякий скінченновимірний лінійний простір розмірності s над полем P. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L, який у деякому його базисі $a_1, a_2, \ldots, a_s$ має матрицю

$$\widetilde{f(\lambda)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix},$$

де

$$f(\lambda) = (\lambda-\alpha)^s = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Тоді

$$\varphi(a_1) = a_2, \quad \varphi(a_2) = a_3, \ \ldots, \ \varphi(a_{s-1}) = a_s,$$

Теорема 5

Нехай α — деякий елемент поля P, а s — деяке натуральне число. Супровідна матриця многочлена $(\lambda-\alpha)^s$ від невідомого λ над полем P подібна клітці Жордана $J_s(\alpha)$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і L — деякий скінченновимірний лінійний простір розмірності s над полем P. Розглянемо лінійний оператор φ лінійного простору L, який у деякому його базисі $a_1, a_2, \ldots, a_s$ має матрицю

$$\widetilde{f(\lambda)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -\alpha_{s-1} \end{pmatrix},$$

де

$$f(\lambda) = (\lambda-\alpha)^s = \lambda^s + \alpha_{s-1}\lambda^{s-1} + \cdots + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

Тоді

$$\varphi(a_1) = a_2, \quad \varphi(a_2) = a_3, \ \ldots, \ \varphi(a_{s-1}) = a_s,$$

$$\varphi(a_s) = -\alpha_0 a_1 - \alpha_1 a_2 - \cdots - \alpha_{s-1} a_s.$$

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$,

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1,

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$,

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ.

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ. Тому

$$\left[(\varphi - \alpha)^s\right](a) = \bar{0},$$

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ. Тому

$$\left[(\varphi - \alpha)^s\right](a) = \bar{0}, \qquad \left[(\varphi - \alpha)^{s-1}\right](a) \neq \bar{0}.$$

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ. Тому

$$\left[(\varphi - \alpha)^s\right](a) = \bar{0}, \qquad \left[(\varphi - \alpha)^{s-1}\right](a) \neq \bar{0}.$$

У лінійному просторі L розглянемо систему векторів:

$$v_1 = \left[(\varphi - \alpha)^{s-1}\right](a_1),$$

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ. Тому

$$\left[(\varphi - \alpha)^s\right](a) = \bar{0}, \qquad \left[(\varphi - \alpha)^{s-1}\right](a) \neq \bar{0}.$$

У лінійному просторі L розглянемо систему векторів:

$$v_1 = \left[(\varphi - \alpha)^{s-1}\right](a_1),\; v_2 = \left[(\varphi - \alpha)^{s-2}\right](a_1),$$

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ. Тому

$$\big[(\varphi - \alpha)^s\big](a) = \bar{0}, \qquad \big[(\varphi - \alpha)^{s-1}\big](a) \neq \bar{0}.$$

У лінійному просторі L розглянемо систему векторів:

$$v_1 = \big[(\varphi - \alpha)^{s-1}\big](a_1),\ v_2 = \big[(\varphi - \alpha)^{s-2}\big](a_1),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ v_{s-1} = \big[(\varphi - \alpha)(a_1)\big],$$

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ. Тому

$$\big[(\varphi - \alpha)^s\big](a) = \bar{0}, \qquad \big[(\varphi - \alpha)^{s-1}\big](a) \neq \bar{0}.$$

У лінійному просторі L розглянемо систему векторів:

$$v_1 = \big[(\varphi - \alpha)^{s-1}\big](a_1),\ v_2 = \big[(\varphi - \alpha)^{s-2}\big](a_1),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ v_{s-1} = \big[(\varphi - \alpha)(a_1)\big],\ v_s = a_1.$$

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ. Тому

$$\big[(\varphi - \alpha)^s\big](a) = \bar{0}, \qquad \big[(\varphi - \alpha)^{s-1}\big](a) \neq \bar{0}.$$

У лінійному просторі L розглянемо систему векторів:

$$v_1 = \big[(\varphi - \alpha)^{s-1}\big](a_1),\ v_2 = \big[(\varphi - \alpha)^{s-2}\big](a_1),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ v_{s-1} = \big[(\varphi - \alpha)(a_1)\big],\ v_s = a_1.$$

Ця система є базисом L

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ. Тому

$$\big[(\varphi - \alpha)^s\big](a) = \bar{0}, \qquad \big[(\varphi - \alpha)^{s-1}\big](a) \neq \bar{0}.$$

У лінійному просторі L розглянемо систему векторів:

$$v_1 = \big[(\varphi - \alpha)^{s-1}\big](a_1),\ v_2 = \big[(\varphi - \alpha)^{s-2}\big](a_1),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ v_{s-1} = \big[(\varphi - \alpha)(a_1)\big],\ v_s = a_1.$$

Ця система є базисом L (цей базис називається жордановим базисом).

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ. Тому

$$\left[(\varphi - \alpha)^s\right](a) = \bar{0}, \qquad \left[(\varphi - \alpha)^{s-1}\right](a) \neq \bar{0}.$$

У лінійному просторі L розглянемо систему векторів:

$$v_1 = \left[(\varphi - \alpha)^{s-1}\right](a_1),\ v_2 = \left[(\varphi - \alpha)^{s-2}\right](a_1),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ v_{s-1} = \left[(\varphi - \alpha)(a_1)\right],\ v_s = a_1.$$

Ця система є базисом L (цей базис називається жордановим базисом). Матрицею оператора φ в цьому базисі є клітка Жордана $J_s(\alpha)$.

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ. Тому

$$\left[(\varphi - \alpha)^s\right](a) = \bar{0}, \qquad \left[(\varphi - \alpha)^{s-1}\right](a) \neq \bar{0}.$$

У лінійному просторі L розглянемо систему векторів:

$$v_1 = \left[(\varphi - \alpha)^{s-1}\right](a_1),\ v_2 = \left[(\varphi - \alpha)^{s-2}\right](a_1),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ v_{s-1} = \left[(\varphi - \alpha)(a_1)\right],\ v_s = a_1.$$

Ця система є базисом L (цей базис називається жордановим базисом). Матрицею оператора φ в цьому базисі є клітка Жордана $J_s(\alpha)$. Оскільки супровідна матриця $\widetilde{f(\lambda)}$ многочлена $(\lambda - \alpha)^s$,

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ. Тому

$$\left[(\varphi - \alpha)^s\right](a) = \bar{0}, \qquad \left[(\varphi - \alpha)^{s-1}\right](a) \neq \bar{0}.$$

У лінійному просторі L розглянемо систему векторів:

$$v_1 = \left[(\varphi - \alpha)^{s-1}\right](a_1),\ v_2 = \left[(\varphi - \alpha)^{s-2}\right](a_1),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ v_{s-1} = \left[(\varphi - \alpha)(a_1)\right],\ v_s = a_1.$$

Ця система є базисом L (цей базис називається жордановим базисом). Матрицею оператора φ в цьому базисі є клітка Жордана $J_s(\alpha)$. Оскільки супровідна матриця $\widetilde{f(\lambda)}$ многочлена $(\lambda - \alpha)^s$, так само як і Жоржанова клітка $J_s(\alpha)$, є матрицею лінійного оператора φ лінійного простору L, то ці матриці подібні одна одній.

Доведення.

Це означає, що $L = C(a_1)$, тобто L є примарним циклічним простором, породженим вектором a_1, мінімальним анулятором якого є многочлен $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^s$, який також є мінімальним многочленом лінійного оператора φ. Тому

$$\left[(\varphi - \alpha)^s\right](a) = \bar{0}, \qquad \left[(\varphi - \alpha)^{s-1}\right](a) \neq \bar{0}.$$

У лінійному просторі L розглянемо систему векторів:

$$v_1 = \left[(\varphi - \alpha)^{s-1}\right](a_1),\ v_2 = \left[(\varphi - \alpha)^{s-2}\right](a_1),\ \ldots,$$

$$\ldots,\ v_{s-1} = \left[(\varphi - \alpha)(a_1)\right],\ v_s = a_1.$$

Ця система є базисом L (цей базис називається жордановим базисом). Матрицею оператора φ в цьому базисі є клітка Жордана $J_s(\alpha)$. Оскільки супровідна матриця $\widetilde{f(\lambda)}$ многочлена $(\lambda - \alpha)^s$, так само як і Жоржанова клітка $J_s(\alpha)$, є матрицею лінійного оператора φ лінійного простору L, то ці матриці подібні одна одній. Теорема доведена. □

Наслідок 1

Будь-яка нормальна форма Жордана над полем P подібна над цим полем деякій нормальній формі Фробеніуса.

Наслідок 1

Будь-яка нормальна форма Жордана над полем P подібна над цим полем деякій нормальній формі Фробеніуса. Навпаки, якщо незвідні многочлени, зв'язані з даною формою Фробеніуса,

Наслідок 1

Будь-яка нормальна форма Жордана над полем P подібна над цим полем деякій нормальній формі Фробеніуса. Навпаки, якщо незвідні многочлени, зв'язані з даною формою Фробеніуса, є лінійними многочленами над полем P,

Наслідок 1

Будь-яка нормальна форма Жордана над полем P подібна над цим полем деякій нормальній формі Фробеніуса. Навпаки, якщо незвідні многочлени, зв'язані з даною формою Фробеніуса, є лінійними многочленами над полем P, то ця нормальна форма Фробеніуса подібна нормальній формі Жордана.

Наслідок 1

Будь-яка нормальна форма Жордана над полем P подібна над цим полем деякій нормальній формі Фробеніуса. Навпаки, якщо незвідні многочлени, зв'язані з даною формою Фробеніуса, є лінійними многочленами над полем P, то ця нормальна форма Фробеніуса подібна нормальній формі Жордана.

Наслідок 2

Якщо характеристичний многочлен квадратної матриці A над полем P розкладається над цим полем в добуток лінійних множників,

Наслідок 1

Будь-яка нормальна форма Жордана над полем P подібна над цим полем деякій нормальній формі Фробеніуса. Навпаки, якщо незвідні многочлени, зв'язані з даною формою Фробеніуса, є лінійними многочленами над полем P, то ця нормальна форма Фробеніуса подібна нормальній формі Жордана.

Наслідок 2

Якщо характеристичний многочлен квадратної матриці A над полем P розкладається над цим полем в добуток лінійних множників, то матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана.

Наслідок 1

Будь-яка нормальна форма Жордана над полем P подібна над цим полем деякій нормальній формі Фробеніуса. Навпаки, якщо незвідні многочлени, зв'язані з даною формою Фробеніуса, є лінійними многочленами над полем P, то ця нормальна форма Фробеніуса подібна нормальній формі Жордана.

Наслідок 2

Якщо характеристичний многочлен квадратної матриці A над полем P розкладається над цим полем в добуток лінійних множників, то матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана.

Теореми для нормальних форм Фробеніуса мають аналоги для нормальних форм Жордана.

Наслідок 1

Будь-яка нормальна форма Жордана над полем P подібна над цим полем деякій нормальній формі Фробеніуса. Навпаки, якщо незвідні многочлени, зв'язані з даною формою Фробеніуса, є лінійними многочленами над полем P, то ця нормальна форма Фробеніуса подібна нормальній формі Жордана.

Наслідок 2

Якщо характеристичний многочлен квадратної матриці A над полем P розкладається над цим полем в добуток лінійних множників, то матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана.

Теореми для нормальних форм Фробеніуса мають аналоги для нормальних форм Жордана.

Теорема 6 (основна теорема про нормальну форму Жордана)

Нехай P — алгебраїчно замкнене поле.

Наслідок 1

Будь-яка нормальна форма Жордана над полем P подібна над цим полем деякій нормальній формі Фробеніуса. Навпаки, якщо незвідні многочлени, зв'язані з даною формою Фробеніуса, є лінійними многочленами над полем P, то ця нормальна форма Фробеніуса подібна нормальній формі Жордана.

Наслідок 2

Якщо характеристичний многочлен квадратної матриці A над полем P розкладається над цим полем в добуток лінійних множників, то матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана.

Теореми для нормальних форм Фробеніуса мають аналоги для нормальних форм Жордана.

Теорема 6 (основна теорема про нормальну форму Жордана)

Нехай P — алгебраїчно замкнене поле. Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Жордана.

Наслідок 1

Будь-яка нормальна форма Жордана над полем P подібна над цим полем деякій нормальній формі Фробеніуса. Навпаки, якщо незвідні многочлени, зв'язані з даною формою Фробеніуса, є лінійними многочленами над полем P, то ця нормальна форма Фробеніуса подібна нормальній формі Жордана.

Наслідок 2

Якщо характеристичний многочлен квадратної матриці A над полем P розкладається над цим полем в добуток лінійних множників, то матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана.

Теореми для нормальних форм Фробеніуса мають аналоги для нормальних форм Жордана.

Теорема 6 (основна теорема про нормальну форму Жордана)

Нехай P — алгебраїчно замкнене поле. Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Жордана. Дві матриці над полем P подібні тоді і тільки тоді,

Наслідок 1

Будь-яка нормальна форма Жордана над полем P подібна над цим полем деякій нормальній формі Фробеніуса. Навпаки, якщо незвідні многочлени, зв'язані з даною формою Фробеніуса, є лінійними многочленами над полем P, то ця нормальна форма Фробеніуса подібна нормальній формі Жордана.

Наслідок 2

Якщо характеристичний многочлен квадратної матриці A над полем P розкладається над цим полем в добуток лінійних множників, то матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана.

Теореми для нормальних форм Фробеніуса мають аналоги для нормальних форм Жордана.

Теорема 6 (основна теорема про нормальну форму Жордана)

Нехай P — алгебраїчно замкнене поле. Будь-яка квадратна матриця над полем P подібна деякій нормальній формі Жордана. Дві матриці над полем P подібні тоді і тільки тоді, коли їхні нормальні форми Жордана співпадають з точністю до порядку розташування кліток Жордана вздовж діагоналей цих форм.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P

Відшукання нормальної форми Жордана.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

Відшукання нормальної форми Жордана.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

Відшукання нормальної форми Жордана.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A-\lambda E|$,

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A - \lambda E|$, що належать полю P,

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A - \lambda E|$, що належать полю P, а t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа.

Відшукання нормальної форми Жордана.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A - \lambda E|$, що належать полю P, а t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа. Тоді матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана,

Відшукання нормальної форми Жордана.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A - \lambda E|$, що належать полю P, а t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа. Тоді матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана, яку позначимо через НФЖ(A).

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A-\lambda E|$, що належать полю P, а t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа. Тоді матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана, яку позначимо через НФЖ(A).
Зафіксуємо деяке значення для $i \in \{1,\ 2,\ \dots,\ k\}$.

Відшукання нормальної форми Жордана.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — попарно різні корені многочлена $|A - \lambda E|$, що належать полю P, а $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — деякі натуральні числа. Тоді матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана, яку позначимо через НФЖ(A).

Зафіксуємо деяке значення для $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Щоб знайти всі клітки Жордана з діагональним елементом α_i,

Відшукання нормальної форми Жордана.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A-\lambda E|$, що належать полю P, а t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа. Тоді матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана, яку позначимо через НФЖ(A).

Зафіксуємо деяке значення для $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$. Щоб знайти всі клітки Жордана з діагональним елементом α_i, що входять в НФЖ(A) потрібно послідовно знаходити ранги матриць:

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A-\lambda E|$, що належать полю P, а t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа. Тоді матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана, яку позначимо через НФЖ(A).

Зафіксуємо деяке значення для $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Щоб знайти всі клітки Жордана з діагональним елементом α_i, що входять в НФЖ(A) потрібно послідовно знаходити ранги матриць:

$$A - \alpha_i E,$$

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A-\lambda E|$, що належать полю P, а t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа. Тоді матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана, яку позначимо через НФЖ(A).
Зафіксуємо деяке значення для $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Щоб знайти всі клітки Жордана з діагональним елементом α_i, що входять в НФЖ(A) потрібно послідовно знаходити ранги матриць:

$$A - \alpha_i E, \quad (A - \alpha_i E)^2,$$

Відшукання нормальної форми Жордана.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A - \lambda E|$, що належать полю P, а t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа. Тоді матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана, яку позначимо через НФЖ(A).

Зафіксуємо деяке значення для $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Щоб знайти всі клітки Жордана з діагональним елементом α_i, що входять в НФЖ(A) потрібно послідовно знаходити ранги матриць:

$$A - \alpha_i E, \quad (A - \alpha_i E)^2, \quad (A - \alpha_i E)^3, \quad \ldots ,$$

Відшукання нормальної форми Жордана.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A - \lambda E|$, що належать полю P, а t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа. Тоді матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана, яку позначимо через НФЖ(A).
Зафіксуємо деяке значення для $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Щоб знайти всі клітки Жордана з діагональним елементом α_i, що входять в НФЖ(A) потрібно послідовно знаходити ранги матриць:

$$A - \alpha_i E, \quad (A - \alpha_i E)^2, \quad (A - \alpha_i E)^3, \quad \ldots ,$$

де E — одинична матриця порядку n.

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A - \lambda E|$, що належать полю P, а t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа. Тоді матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана, яку позначимо через НФЖ(A).
Зафіксуємо деяке значення для $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Щоб знайти всі клітки Жордана з діагональним елементом α_i, що входять в НФЖ(A) потрібно послідовно знаходити ранги матриць:

$$A - \alpha_i E, \quad (A - \alpha_i E)^2, \quad (A - \alpha_i E)^3, \quad \ldots ,$$

де E — одинична матриця порядку n. Обчислення рангів цих матриць зупиняємо на першому такому кроці $l_i + 1$, що

$$\mathrm{rank}(A - \alpha E)^{l_i+1} = \mathrm{rank}(A - \alpha E)^{l_i}.$$

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A-\lambda E|$, що належать полю P, а t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа. Тоді матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана, яку позначимо через НФЖ(A).
Зафіксуємо деяке значення для $i \in \{1,\ 2,\ \dots,\ k\}$. Щоб знайти всі клітки Жордана з діагональним елементом α_i, що входять в НФЖ(A) потрібно послідовно знаходити ранги матриць:

$$A - \alpha_i E, \quad (A - \alpha_i E)^2, \quad (A - \alpha_i E)^3, \quad \dots\ ,$$

де E — одинична матриця порядку n. Обчислення рангів цих матриць зупиняємо на першому такому кроці $l_i + 1$, що

$$\mathrm{rank}(A - \alpha E)^{l_i+1} = \mathrm{rank}(A - \alpha E)^{l_i}.$$

Нехай

$r_{i1} = \mathrm{rank}(A-\alpha_i E)$,

Нехай A — квадратна матриця порядку n над полем P і $n > 1$. Припустимо, що характеристичний многочлен $|A - \lambda E|$ матриці A розкладається над полем P у добуток лінійних множників

$$|A - \lambda E| = \pm(\lambda - \alpha_1)^{t_1} \cdots (\lambda - \alpha_k)^{t_k},$$

де α_1, α_2, ..., α_k — попарно різні корені многочлена $|A - \lambda E|$, що належать полю P, а t_1, t_2, ..., t_k — деякі натуральні числа. Тоді матриця A подібна деякій нормальній формі Жордана, яку позначимо через НФЖ(A).
Зафіксуємо деяке значення для $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Щоб знайти всі клітки Жордана з діагональним елементом α_i, що входять в НФЖ(A) потрібно послідовно знаходити ранги матриць:

$$A - \alpha_i E, \quad (A - \alpha_i E)^2, \quad (A - \alpha_i E)^3, \quad \ldots \, ,$$

де E — одинична матриця порядку n. Обчислення рангів цих матриць зупиняємо на першому такому кроці $l_i + 1$, що

$$\mathrm{rank}(A - \alpha E)^{l_i+1} = \mathrm{rank}(A - \alpha E)^{l_i}.$$

Нехай

$$r_{i1} = \mathrm{rank}(A - \alpha_i E), \quad r_{i2} = \mathrm{rank}(A - \alpha_i E)^2, \quad \ldots, \quad r_{il_i} = \mathrm{rank}(A - \alpha_i E)^{l_i}.$$

Складемо діаграму

$$\mathcal{D}(\alpha_i): \quad \begin{array}{cccccccccc} * & * & \ldots & * & & & & & & \\ * & * & \ldots & * & \ldots & * & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & & \\ * & * & \ldots & * & \ldots & * & * & \ldots & * & \end{array},$$

Складемо діаграму

$$\mathcal{D}(\alpha_i): \begin{array}{ccccccccc} * & * & \dots & * & & & & & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \end{array},$$

помістивши в перший знизу рядок $n - r_{i1}$ зірки,

Складемо діаграму

$$\mathcal{D}(\alpha_i) : \begin{array}{ccccccccc} * & * & \dots & * & & & & & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \end{array},$$

помістивши в перший знизу рядок $n - r_{i1}$ зірки, в 2-й — $r_{i1} - r_{i2}$ зірки

Складемо діаграму

$$\mathcal{D}(\alpha_i): \begin{array}{ccccccccc} * & * & \dots & * & & & & & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \end{array},$$

помістивши в перший знизу рядок $n-r_{i1}$ зірки, в 2-й — $r_{i1}-r_{i2}$ зірки і т. д.

Складемо діаграму

$$\mathcal{D}(\alpha_i): \begin{array}{ccccccccc} * & * & \dots & * & & & & & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \end{array},$$

помістивши в перший знизу рядок $n-r_{i1}$ зірки, в 2-й — $r_{i1}-r_{i2}$ зірки і т. д. Нехай h_{i1}, h_{i2} і т. д. — висоти цієї діаграми

Складемо діаграму

$$\mathcal{D}(\alpha_i): \begin{array}{cccccccccc} * & * & \dots & * & & & & & & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \end{array},$$

помістивши в перший знизу рядок $n - r_{i1}$ зірки, в 2-й — $r_{i1} - r_{i2}$ зірки і т. д. Нехай h_{i1}, h_{i2} і т. д. — висоти цієї діаграми (тобто h_{i1} — кількість зірок у 1-му стовпці,

Складемо діаграму

$$\mathcal{D}(\alpha_i):\quad \begin{array}{cccccccccc} * & * & \dots & * & & & & & & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * & \end{array},$$

помістивши в перший знизу рядок $n-r_{i1}$ зірки, в 2-й — $r_{i1}-r_{i2}$ зірки і т. д. Нехай h_{i1}, h_{i2} і т. д. — висоти цієї діаграми (тобто h_{i1} — кількість зірок у 1-му стовпці, h_{i2} — кількість зірок у 2-му стовпці і т. д.). Поставимо у відповідність діаграмі $\mathcal{D}(\alpha_i)$ наступну нормальну форму Жордана:

Складемо діаграму

$$\mathcal{D}(\alpha_i):\quad \begin{array}{ccccccccc} * & * & \dots & * & & & & & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \end{array},$$

помістивши в перший знизу рядок $n-r_{i1}$ зірки, в 2-й — $r_{i1}-r_{i2}$ зірки і т. д. Нехай h_{i1}, h_{i2} і т. д. — висоти цієї діаграми (тобто h_{i1} — кількість зірок у 1-му стовпці, h_{i2} — кількість зірок у 2-му стовпці і т. д.). Поставимо у відповідність діаграмі $\mathcal{D}(\alpha_i)$ наступну нормальну форму Жордана:

$$J(\alpha_i)=\begin{pmatrix} J_{h_{i1}}(\alpha_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{h_{i2}}(\alpha_i) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{h_{iq_i}}(\alpha_i) \end{pmatrix},$$

Складемо діаграму

$$\mathcal{D}(\alpha_i): \begin{array}{ccccccccc} * & * & \dots & * & & & & & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \end{array},$$

помістивши в перший знизу рядок $n-r_{i1}$ зірки, в 2-й — $r_{i1}-r_{i2}$ зірки і т. д. Нехай h_{i1}, h_{i2} і т. д. — висоти цієї діаграми (тобто h_{i1} — кількість зірок у 1-му стовпці, h_{i2} — кількість зірок у 2-му стовпці і т. д.). Поставимо у відповідність діаграмі $\mathcal{D}(\alpha_i)$ наступну нормальну форму Жордана:

$$J(\alpha_i) = \begin{pmatrix} J_{h_{i1}}(\alpha_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{h_{i2}}(\alpha_i) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{h_{iq_i}}(\alpha_i) \end{pmatrix},$$

де q_i — число стовпців діаграми $\mathcal{D}(\alpha_i)$.

Складемо діаграму

$$\mathcal{D}(\alpha_i): \begin{array}{ccccccccc} * & * & \dots & * & & & & & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \end{array},$$

помістивши в перший знизу рядок $n - r_{i1}$ зірки, в 2-й — $r_{i1} - r_{i2}$ зірки і т. д. Нехай h_{i1}, h_{i2} і т. д. — висоти цієї діаграми (тобто h_{i1} — кількість зірок у 1-му стовпці, h_{i2} — кількість зірок у 2-му стовпці і т. д.). Поставимо у відповідність діаграмі $\mathcal{D}(\alpha_i)$ наступну нормальну форму Жордана:

$$J(\alpha_i) = \begin{pmatrix} J_{h_{i1}}(\alpha_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{h_{i2}}(\alpha_i) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{h_{iq_i}}(\alpha_i) \end{pmatrix},$$

де q_i — число стовпців діаграми $\mathcal{D}(\alpha_i)$. Матриця $J(\alpha_i)$ містить всі клітки Жордана НФЖ(A),

Складемо діаграму

$$\mathcal{D}(\alpha_i): \begin{array}{ccccccccc} * & * & \dots & * & & & & & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ * & * & \dots & * & \dots & * & * & \dots & * \end{array},$$

помістивши в перший знизу рядок $n-r_{i1}$ зірки, в 2-й — $r_{i1}-r_{i2}$ зірки і т. д. Нехай h_{i1}, h_{i2} і т. д. — висоти цієї діаграми (тобто h_{i1} — кількість зірок у 1-му стовпці, h_{i2} — кількість зірок у 2-му стовпці і т. д.). Поставимо у відповідність діаграмі $\mathcal{D}(\alpha_i)$ наступну нормальну форму Жордана:

$$J(\alpha_i) = \begin{pmatrix} J_{h_{i1}}(\alpha_i) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{h_{i2}}(\alpha_i) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{h_{iq_i}}(\alpha_i) \end{pmatrix},$$

де q_i — число стовпців діаграми $\mathcal{D}(\alpha_i)$. Матриця $J(\alpha_i)$ містить всі клітки Жордана НФЖ(A), в яких на діагоналі знаходиться елемент α_i.

Тому блочна матриця

$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

є тією нормальною формою Жордана,

Тому блочна матриця

$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

є тією нормальною формою Жордана, якій подібна дана матриця A.

Тому блочна матриця

$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

є тією нормальною формою Жордана, якій подібна дана матриця A.

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

Розглянемо приклад матриці A порядку $n = 3$

Тому блочна матриця

$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

є тією нормальною формою Жордана, якій подібна дана матриця A.

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

Розглянемо приклад матриці A порядку $n = 3$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел.

Тому блочна матриця

$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

є тією нормальною формою Жордана, якій подібна дана матриця A.

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

Розглянемо приклад матриці A порядку $n = 3$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Характеристичний многочлен матриці A має три корені, враховуючи їх кратність.

Тому блочна матриця

$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

є тією нормальною формою Жордана, якій подібна дана матриця A.

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

Розглянемо приклад матриці A порядку $n = 3$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Характеристичний многочлен матриці A має три корені, враховуючи їх кратність. Нехай α_1, α_2, α_3 — корені характеристичного многочлена матриці A.

Тому блочна матриця

$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

є тією нормальною формою Жордана, якій подібна дана матриця A.

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

Розглянемо приклад матриці A порядку $n = 3$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Характеристичний многочлен матриці A має три корені, враховуючи їх кратність. Нехай α_1, α_2, α_3 — корені характеристичного многочлена матриці A. В залежності від кратностей цих коренів будемо мати три випадки:

Тому блочна матриця

$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

є тією нормальною формою Жордана, якій подібна дана матриця A.

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

Розглянемо приклад матриці A порядку $n = 3$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Характеристичний многочлен матриці A має три корені, враховуючи їх кратність. Нехай α_1, α_2, α_3 — корені характеристичного многочлена матриці A. В залежності від кратностей цих коренів будемо мати три випадки:
1) α_1, α_2, α_3 — попарно різні.

Тому блочна матриця

$$\begin{pmatrix} J(\alpha_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J(\alpha_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J(\alpha_k) \end{pmatrix}$$

є тією нормальною формою Жордана, якій подібна дана матриця A.

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

Розглянемо приклад матриці A порядку $n = 3$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. Характеристичний многочлен матриці A має три корені, враховуючи їх кратність. Нехай α_1, α_2, α_3 — корені характеристичного многочлена матриці A. В залежності від кратностей цих коренів будемо мати три випадки: 1) α_1, α_2, α_3 — попарно різні. Тоді

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix};$$

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

2) $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$.

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

2) $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$. Якщо $\operatorname{rank}(A - \alpha_1 E) = 1$,

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

2) $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$. Якщо $\mathrm{rank}(A - \alpha_1 E) = 1$, то

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix};$$

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

2) $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$. Якщо $\mathrm{rank}(A - \alpha_1 E) = 1$, то

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix};$$

Якщо ж $\mathrm{rank}(A - \alpha_1 E) = 2$,

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

2) $\alpha_1 = \alpha_2 \neq \alpha_3$. Якщо $\mathrm{rank}(A - \alpha_1 E) = 1$, то

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix};$$

Якщо ж $\mathrm{rank}(A - \alpha_1 E) = 2$, то

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix};$$

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

3) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Тоді або

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

3) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Тоді або

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

або

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

якщо $\mathrm{rank}(A - \alpha E) = 1$,

Приклад нормальних форм Жордана порядку 3.

3) $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$. Тоді або

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

або

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

якщо $\mathrm{rank}(A - \alpha E) = 1$, або

$$\text{НФЖ}(A) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix},$$

якщо $\mathrm{rank}(A - \alpha E) = 2$.