Унімодулярні λ-матриці. Зв'язок подібності матриць над полем з еквівалентністю їх харатеристичних матриць

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

10 квітня 2023 року

Нехай P — деяке поле,

Нехай P — деяке поле, n — деяке натуральне число.

Нехай P — деяке поле, n — деяке натуральне число.

Означення 1

Квадратна λ-матриця A порядку n

Нехай P — деяке поле, n — деяке натуральне число.

Означення 1

Квадратна λ-матриця A порядку n називається унімодулярною λ-матрицею,

Нехай P — деяке поле, n — деяке натуральне число.

Означення 1

Квадратна λ-матриця A порядку n називається унімодулярною λ-матрицею, якщо вона еквівалентна одиничній матриці,

Нехай P — деяке поле, n — деяке натуральне число.

Означення 1

Квадратна λ-матриця A порядку n називається унімодулярною λ-матрицею, якщо вона еквівалентна одиничній матриці, або, що теж саме, кожен із n інваріантних множників матриці A

Нехай P — деяке поле, n — деяке натуральне число.

Означення 1

Квадратна λ-матриця A порядку n називається унімодулярною λ-матрицею, якщо вона еквівалентна одиничній матриці, або, що теж саме, кожен із n інваріантних множників матриці A дорівнює 1.

Нехай P — деяке поле, n — деяке натуральне число.

Означення 1

Квадратна λ-матриця A порядку n називається унімодулярною λ-матрицею, якщо вона еквівалентна одиничній матриці, або, що теж саме, кожен із n інваріантних множників матриці A дорівнює 1.

Приклади унімодулярних λ-матриць:

Нехай P — деяке поле, n — деяке натуральне число.

Означення 1

Квадратна λ-матриця A порядку n називається унімодулярною λ-матрицею, якщо вона еквівалентна одиничній матриці, або, що теж саме, кожен із n інваріантних множників матриці A дорівнює 1.

Приклади унімодулярних λ-матриць:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

Нехай P — деяке поле, n — деяке натуральне число.

Означення 1

Квадратна λ-матриця A порядку n називається **унімодулярною λ-матрицею**, якщо вона еквівалентна одиничній матриці, або, що теж саме, кожен із n інваріантних множників матриці A дорівнює 1.

Приклади унімодулярних λ-матриць:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3\lambda^2 + 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Нехай P — деяке поле, n — деяке натуральне число.

Означення 1

Квадратна λ-матриця A порядку n називається унімодулярною λ-матрицею, якщо вона еквівалентна одиничній матриці, або, що теж саме, кожен із n інваріантних множників матриці A дорівнює 1.

Приклади унімодулярних λ-матриць:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3\lambda^2+5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай P — деяке поле, n — деяке натуральне число.

Означення 1

Квадратна λ-матриця A порядку n називається унімодулярною λ-матрицею, якщо вона еквівалентна одиничній матриці, або, що теж саме, кожен із n інваріантних множників матриці A дорівнює 1.

Приклади унімодулярних λ-матриць:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3\lambda^2+5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так звані, матриці елементарних перетворень λ-матриць є унімодулярними λ–матрицями.

Означення 2

Матрицями елементарних перетворень називаються наступні матриці:

- $$S_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & \\ & & & 0 & & \dots & & 1 & & \\ & & & & 1 & & & & & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\ & & & & & & 1 & & & \\ & & & 1 & & \dots & & 0 & & \\ & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

  — квадратна матриця порядку n, що одержується із одиничної матриці порядку n перестановкою i-го та j-го рядків, де $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ та $i \neq j$;

- $$T_{ij}(f(\lambda)) = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & f(\lambda) & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

  — квадратна матриця порядку n, в i-му рядку та j-му стовпці якої стоїть многочлен $f(\lambda) \in P[\lambda]$, де $i \neq j$, а всі інші елементи цієї матриці такі самі як відповідні елементи одиничної матриці порядку n;

- $$Q_i(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & \alpha & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

  — квадратна матриця порядку n, на діагоналі якої на i-му місці стоїть ненульовий елемент α поля P, а всі інші елементи матриці $Q_i(\alpha)$ такі ж як відповідні елементи одиничної матриці порядку n.

Самостійна робота.

Довести, що для довільної λ-матриці A порядку n, будь-яких різних i, j із $\{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$, будь-якого многочлена $f(\lambda)$ із $P[\lambda]$ та будь-якого ненульового елемента α поля P справджується наступне:

- добуток $S_{ij}A$ (добуток AS_{ij}) є матрицею, що одержується з матриці A перестановкою i-го та j-го рядків (стовпців) матриці A.
- добуток $T_{ij}(f(\lambda))A$ є матрицею, що одержується з матриці A додаванням до i-го рядка матриці A її j-го рядка, помноженого на $f(\lambda)$;
- добуток $AT_{ij}(f(\lambda))$ є матрицею, що одержується з матриці A додаванням до j-го стовпця матриці A її i-го стовпця, помноженого на $f(\lambda)$;
- добуток $Q_i(\alpha)A$ (добуток $AQ_i(\alpha)$) є матрицею, що одержується з матриці A множенням на α рядка (стовпця) з номером i матриці A;
- $S_{ij} = T_{ij}(1)T_{ij}(-1)T_{ij}(1)Q_i(-1)$.

Теорема 1

Квадратна λ-матриця

Теорема 1

Квадратна λ-матриця є унімодулярною λ-матрицею

Теорема 1

Квадратна λ-матриця є унімодулярною λ-матрицею тоді і тільки тоді,

Теорема 1

Квадратна λ-матриця є унімодулярною λ-матрицею тоді і тільки тоді, коли цю матрицю можна представити у вигляді добутку

Теорема 1

Квадратна λ-матриця є унімодулярною λ-матрицею тоді і тільки тоді, коли цю матрицю можна представити у вигляді добутку матриць елементарних перетворень.

Теорема 1

Квадратна λ-матриця є унімодулярною λ-матрицею тоді і тільки тоді, коли цю матрицю можна представити у вигляді добутку матриць елементарних перетворень.

Доведення.

Доведемо спочатку достатність.

Теорема 1

Квадратна λ-матриця є унімодулярною λ-матрицею тоді і тільки тоді, коли цю матрицю можна представити у вигляді добутку матриць елементарних перетворень.

Доведення.

Доведемо спочатку достатність. Нехай λ-матриця A є добутком деяких матриць елементарних перетворень U_1, U_2, ..., U_k:

$$A = U_1 U_2 \cdots U_k.$$

Тоді

$$A = (\cdots((E \cdot U_1)U_2) \cdots U_{k-1})U_k,$$

де E — одинична матриця такого ж порядку як і матриця A. Це означає, що матрицю A можна одержати із одиничної матриці E шляхом послідовного виконання елементарних перетворень над стовпцями, що відповідають матрицям U_1, U_2, ..., U_k. Це в свою чергу означає, що λ-матриця A еквівалентна одиничній матриці E. Отже, за означенням A — унімодулярна λ-матриця.

Доведення.

Доведемо тепер необхідність.

Доведення.

Доведемо тепер необхідність. Нехай λ-матриця A є унімодулярною λ-матрицею. За означенням унімодулярної λ-матриці A еквівалентна одиничній матриці і навпаки. Тому за допомогою деяких елементарних перетворень над рядками або стовпцями λ-матриць із одиничної матриці E можна одержати λ-матрицю A. Нехай U_1, U_2, ..., U_k — матриці відповідних елементарних перетворень над рядками, а V_1, V_2, ..., V_l — матриці відповідних елементарних перетворень над стовпцями, за допомогою яких послідовно одержали матрицю A із E. Незважаючи на порядок виконання елементарних перетворень (чи спочатку над рядками, а потім над стовпцями, чи, скажімо, почергово над рядками та стовпцями), але при цьому зберігаючи порядок послідовності перетворень окремо над рядками та окремо над стовпцями, через те що операція множення матриць задовольняє асоціативній властивості, ми можемо записати

$$A = U_k U_{k-1} \cdots U_2 U_1 E V_1 V_2 \cdots V_{l-1} V_l.$$

Таким чином, A є добутком деяких матриць елементарних перетворень. $\square$

Теорема 2

Квадратна λ-матриця A

Теорема 2

Квадратна λ-матриця A над полем P

Теорема 2

Квадратна λ-матриця A над полем P є унімодулярною λ-матрицею

Теорема 2

Квадратна λ-матриця A над полем P є унімодулярною λ-матрицею тоді і тільки тоді,

Теорема 2

Квадратна λ-матриця A над полем P є унімодулярною λ-матрицею тоді і тільки тоді, коли детермінант матриці A є ненульовим елементом поля P.

Теорема 2

Квадратна λ-матриця A над полем P є унімодулярною λ-матрицею тоді і тільки тоді, коли детермінант матриці A є ненульовим елементом поля P.

Доведення.

Якщо A є унімодулярною λ-матрицею порядку n, то A еквівалентна одиничній матриці цього ж порядку. Тому всі інваріантні множники матриці λ-матриці A дорівнюють 1 і їх є n. З іншого боку n-й інваріантний множник матриці A дорівнює добутку детермінанта $|A|$ на обернений елемент до старшого коефіцієнта a_0 многочлена $|A|$. Тобто $a_0^{-1}|A| = 1$. Звідси $|A| = a_0 \in P$. Навпаки, якщо $|A| \in P \setminus \{0\}$, то n-й інваріантний множник λ-матриці A, а отже і всі інші її інваріантні множники, дорівнюють 1. Тобто нормальною формою Сміта λ-матриці A є одинична матриця порядку n. Це означає λ-матриця A еквівалентна одиничній матриці. □

Теорема 3

λ-матриця A

Теорема 3

λ-матриця A еквівалентна λ-матриці B

Теорема 3

λ-матриця A еквівалентна λ-матриці B тоді і тільки тоді,

Теорема 3

λ-матриця A еквівалентна λ-матриці B тоді і тільки тоді, коли існують такі унімодулярні λ-матриці S і T,

Теорема 3

λ-матриця A еквівалентна λ-матриці B тоді і тільки тоді, коли існують такі унімодулярні λ-матриці S і T, що $A = SBT$.

Доведення.

Нехай λ-матриця A еквівалентна λ-матриці B. Тоді за допомогою деяких елементарних перетворень над рядками або стовпцями λ-матриць із λ-матриці B можна одержати λ-матрицю A. Нехай $U_1, U_2, \ldots, U_k$ — матриці відповідних елементарних перетворень над рядками, а $V_1, V_2, \ldots, V_l$ — матриці відповідних елементарних перетворень над стовпцями, за допомогою яких послідовно одержали матрицю A із B. Аналогічно доведенню теореми 1 можна записати

$$A = U_k U_{k-1} \cdots U_2 U_1 B V_1 V_2 \cdots V_{l-1} V_l = SBT,$$

де $S = U_k U_{k-1} \cdots U_2 U_1$, $T = V_1 V_2 \cdots V_{l-1} V_l$ за теоремою 1 є унімодулярними λ-матрицями.

Достатність теореми доводиться аналогічно необхідності лише у зворотному напрямку.

$\square$

Нехай n — деяке натуральне число.

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа звичайним чином, Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа звичайним чином, як це раніше було зроблено для матриць над полем.

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа звичайним чином, як це раніше було зроблено для матриць над полем. Тоді будь-яку λ-матрицю A із $P[\lambda]_{n\times n}$ можна представити у вигляді:

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа звичайним чином, як це раніше було зроблено для матриць над полем. Тоді будь-яку λ-матрицю A із $P[\lambda]_{n\times n}$ можна представити у вигляді:

$$A = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа звичайним чином, як це раніше було зроблено для матриць над полем. Тоді будь-яку λ-матрицю A із $P[\lambda]_{n\times n}$ можна представити у вигляді:

$$A = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0, \tag{1}$$

де k — деяке натуральне число або нуль,

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа звичайним чином, як це раніше було зроблено для матриць над полем. Тоді будь-яку λ-матрицю A із $P[\lambda]_{n\times n}$ можна представити у вигляді:

$$A = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0, \tag{1}$$

де k — деяке натуральне число або нуль, A_0, A_1, ..., A_k — деякі матриці порядку n над полем P.

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа звичайним чином, як це раніше було зроблено для матриць над полем. Тоді будь-яку λ-матрицю A із $P[\lambda]_{n\times n}$ можна представити у вигляді:

$$A = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0, \tag{1}$$

де k — деяке натуральне число або нуль, A_0, A_1, ..., A_k — деякі матриці порядку n над полем P. Навпаки, значення будь-якого алгебраїчного виразу вигляду (1) є λ-матрицею.

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа звичайним чином, як це раніше було зроблено для матриць над полем. Тоді будь-яку λ-матрицю A із $P[\lambda]_{n\times n}$ можна представити у вигляді:

$$A = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0, \tag{1}$$

де k — деяке натуральне число або нуль, A_0, A_1, ..., A_k — деякі матриці порядку n над полем P. Навпаки, значення будь-якого алгебраїчного виразу вигляду (1) є λ-матрицею.

Означення 3

Алгебраїчний вираз вигляду (1)

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа звичайним чином, як це раніше було зроблено для матриць над полем. Тоді будь-яку λ-матрицю A із $P[\lambda]_{n\times n}$ можна представити у вигляді:

$$A = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0, \qquad (1)$$

де k — деяке натуральне число або нуль, A_0, A_1, ..., A_k — деякі матриці порядку n над полем P. Навпаки, значення будь-якого алгебраїчного виразу вигляду (1) є λ-матрицею.

Означення 3

Алгебраїчний вираз вигляду (1) називається матричним многочленом порядку n над полем P.

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа звичайним чином, як це раніше було зроблено для матриць над полем. Тоді будь-яку λ-матрицю A із $P[\lambda]_{n\times n}$ можна представити у вигляді:

$$A = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0, \qquad (1)$$

де k — деяке натуральне число або нуль, A_0, A_1, ..., A_k — деякі матриці порядку n над полем P. Навпаки, значення будь-якого алгебраїчного виразу вигляду (1) є λ-матрицею.

Означення 3

Алгебраїчний вираз вигляду (1) називається матричним многочленом порядку n над полем P. Якщо A_k — ненульова матриця,

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа звичайним чином, як це раніше було зроблено для матриць над полем. Тоді будь-яку λ-матрицю A із $P[\lambda]_{n\times n}$ можна представити у вигляді:

$$A = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0, \qquad (1)$$

де k — деяке натуральне число або нуль, $A_0, A_1, \ldots, A_k$ — деякі матриці порядку n над полем P. Навпаки, значення будь-якого алгебраїчного виразу вигляду (1) є λ-матрицею.

Означення 3

Алгебраїчний вираз вигляду (1) називається матричним многочленом порядку n над полем P. Якщо A_k — ненульова матриця, то k називається степенем цього матричного многочлена,

Нехай n — деяке натуральне число. Визначимо на множині $P[\lambda]_{n\times n}$ всіх λ-матриць порядку n над полем P операції додавання, множення матриць та операцію множення многочленів із $P[\lambda]$ на матрицю як зліва, так і справа звичайним чином, як це раніше було зроблено для матриць над полем. Тоді будь-яку λ-матрицю A із $P[\lambda]_{n\times n}$ можна представити у вигляді:

$$A = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0, \tag{1}$$

де k — деяке натуральне число або нуль, A_0, A_1, ..., A_k — деякі матриці порядку n над полем P. Навпаки, значення будь-якого алгебраїчного виразу вигляду (1) є λ-матрицею.

Означення 3

Алгебраїчний вираз вигляду (1) називається матричним многочленом порядку n над полем P. Якщо A_k — ненульова матриця, то k називається степенем цього матричного многочлена, а матриця A_k називається його старшим матричним коефіцієнтом.

Приклад запису λ-матриці у вигляді матричного многочлена і навпаки

Приклад запису λ-матриці у вигляді матричного многочлена і навпаки

$$\begin{pmatrix} -2\lambda + 5 & 2\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7 \\ 3\lambda^2 + 5\lambda & 6 \end{pmatrix}$$

Приклад запису λ-матриці у вигляді матричного многочлена і навпаки

$$\begin{pmatrix} -2\lambda+5 & 2\lambda^3-4\lambda^2-7 \\ 3\lambda^2+5\lambda & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 +$$

Приклад запису λ-матриці у вигляді матричного многочлена і навпаки

$$\begin{pmatrix} -2\lambda+5 & 2\lambda^3-4\lambda^2-7 \\ 3\lambda^2+5\lambda & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 +$$

Приклад запису λ-матриці у вигляді матричного многочлена і навпаки

$$\begin{pmatrix} -2\lambda+5 & 2\lambda^3-4\lambda^2-7 \\ 3\lambda^2+5\lambda & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 +$$

$$+\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\lambda +$$

Приклад запису λ-матриці у вигляді матричного многочлена і навпаки

$$\begin{pmatrix} -2\lambda+5 & 2\lambda^3-4\lambda^2-7 \\ 3\lambda^2+5\lambda & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 +$$
$$+ \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

Приклад запису λ-матриці у вигляді матричного многочлена і навпаки

$$\begin{pmatrix} -2\lambda+5 & 2\lambda^3-4\lambda^2-7 \\ 3\lambda^2+5\lambda & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \\ + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -7 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Приклад запису λ-матриці у вигляді матричного многочлена і навпаки

$$\begin{pmatrix} -2\lambda+5 & 2\lambda^3-4\lambda^2-7 \\ 3\lambda^2+5\lambda & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \\ + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -7 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \left(\begin{matrix} \lambda^2-2\lambda & & \\ & & \\ & & \end{matrix} \right.$$

Приклад запису λ-матриці у вигляді матричного многочлена і навпаки

$$\begin{pmatrix} -2\lambda+5 & 2\lambda^3-4\lambda^2-7 \\ 3\lambda^2+5\lambda & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \\ + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -7 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \lambda^2-2\lambda & 0 & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Приклад запису λ-матриці у вигляді матричного многочлена і навпаки

$$\begin{pmatrix} -2\lambda+5 & 2\lambda^3-4\lambda^2-7 \\ 3\lambda^2+5\lambda & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \\ + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -7 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \left(\begin{matrix} \lambda^2-2\lambda & 0 & 5\lambda \\ & & \\ & & \end{matrix} \right.$$

Приклад запису λ-матриці у вигляді матричного многочлена і навпаки

$$\begin{pmatrix} -2\lambda+5 & 2\lambda^3-4\lambda^2-7 \\ 3\lambda^2+5\lambda & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\lambda^3 + \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\lambda^2 + \\ + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 0 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\lambda^2 + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & -7 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}\lambda + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \lambda^2-2\lambda & 0 & 5\lambda \\ 3\lambda & \lambda^2 & -7\lambda \\ 5\lambda & \lambda & \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l.

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l. Якщо B_l є оборотною матрицею над полем P,

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l. Якщо B_l є оборотною матрицею над полем P, то існує єдина пара матричних многочленів

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l. Якщо B_l є оборотною матрицею над полем P, то існує єдина пара матричних многочленів $Q_1(\lambda)$,

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l. Якщо B_l є оборотною матрицею над полем P, то існує єдина пара матричних многочленів $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l. Якщо B_l є оборотною матрицею над полем P, то існує єдина пара матричних многочленів $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ $\big(Q_2(\lambda)$,

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l. Якщо B_l є оборотною матрицею над полем P, то існує єдина пара матричних многочленів $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ $\big(Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)\big)$

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l. Якщо B_l є оборотною матрицею над полем P, то існує єдина пара матричних многочленів $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ $\big(Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)\big)$ порядку n,

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l. Якщо B_l є оборотною матрицею над полем P, то існує єдина пара матричних многочленів $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ $\big(Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)\big)$ порядку n, для якої справджується рівність:

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l. Якщо B_l є оборотною матрицею над полем P, то існує єдина пара матричних многочленів $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ $\big(Q_2(\lambda), R_2(\lambda)\big)$ порядку n, для якої справджується рівність:

$$A(\lambda) = B(\lambda)Q_1(\lambda) + R_1(\lambda),$$

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l. Якщо B_l є оборотною матрицею над полем P, то існує єдина пара матричних многочленів $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ $\big(Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)\big)$ порядку n, для якої справджується рівність:

$$A(\lambda) = B(\lambda)Q_1(\lambda) + R_1(\lambda), \quad \big(A(\lambda) = Q_2(\lambda)B(\lambda) + R_2(\lambda)\big)$$

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l. Якщо B_l є оборотною матрицею над полем P, то існує єдина пара матричних многочленів $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ $\big(Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)\big)$ порядку n, для якої справджується рівність:

$$A(\lambda) = B(\lambda)Q_1(\lambda) + R_1(\lambda), \quad \big(A(\lambda) = Q_2(\lambda)B(\lambda) + R_2(\lambda)\big)$$

і або степінь матричного многочлена $R_1(\lambda)$ $(R_2(\lambda))$

Можна довести, що для матричних многочленів за деякої умови справджується аналог теореми про ділення із остачею.

Теорема 4

Нехай

$$A(\lambda) = A_k\lambda^k + A_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + A_1\lambda + A_0,$$

$$B(\lambda) = B_l\lambda^l + B_{l-1}\lambda^{l-1} + \cdots + B_1\lambda + B_0$$

— деякі матричні многочлени порядку n над полем P відповідно степенів k і l. Якщо B_l є оборотною матрицею над полем P, то існує єдина пара матричних многочленів $Q_1(\lambda)$, $R_1(\lambda)$ $\big(Q_2(\lambda)$, $R_2(\lambda)\big)$ порядку n, для якої справджується рівність:

$$A(\lambda) = B(\lambda)Q_1(\lambda) + R_1(\lambda), \quad \big(A(\lambda) = Q_2(\lambda)B(\lambda) + R_2(\lambda)\big)$$

і або степінь матричного многочлена $R_1(\lambda)$ $(R_2(\lambda))$ менша ніж l, або $R_1(\lambda) = 0$ $(R_2(\lambda) = 0)$.

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A *і* B *— деякі матриці над полем* P*.*

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді,

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A *і* B *— деякі матриці над полем* P*. Матриця* B *подібна матриці* A *тоді і тільки тоді, коли характеристична* λ*-матриця* $B - \lambda E$ *матриці* B

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A *і* B *— деякі матриці над полем* P*. Матриця* B *подібна матриці* A *тоді і тільки тоді, коли характеристична* λ*-матриця* $B - \lambda E$ *матриці* B *еквівалентна характеристичний* λ*-матриці* $A - \lambda E$

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичній λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичній λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичній λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A.

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичній λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичній λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така,

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичній λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$.

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичний λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A - \lambda E)C =$$

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичній λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A - \lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda(C^{-1}EC)$$

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичній λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A - \lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda(C^{-1}EC) = B - \lambda E.$$

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичний λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A - \lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda(C^{-1}EC) = B - \lambda E.$$

Оскільки $|C|,\ |C^{-1}| \in P \backslash \{0\}$,

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B-\lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичний λ-матриці $A-\lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B=C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A-\lambda E)C=C^{-1}AC-\lambda(C^{-1}EC)=B-\lambda E.$$

Оскільки $|C|$, $|C^{-1}|\in P\backslash\{0\}$, то матриці C і C^{-1} є унімодулярними λ-матрицями,

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A *і* B *— деякі матриці над полем* P*. Матриця* B *подібна матриці* A *тоді і тільки тоді, коли характеристична* λ*-матриця* $B - \lambda E$ *матриці* B *еквівалентна характеристичний* λ*-матриці* $A - \lambda E$ *матриці* A*.*

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A - \lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda(C^{-1}EC) = B - \lambda E.$$

Оскільки $|C|$, $|C^{-1}| \in P \backslash \{0\}$, то матриці C і C^{-1} є унімодулярними λ-матрицями, а тому за ознакою еквівалентності матриць звідси слідує,

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B-\lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичний λ-матриці $A-\lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A-\lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda(C^{-1}EC) = B - \lambda E.$$

Оскільки $|C|,\ |C^{-1}| \in P\backslash\{0\}$, то матриці C і C^{-1} є унімодулярними λ-матрицями, а тому за ознакою еквівалентності матриць звідси слідує, що λ-матриця $B-\lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A-\lambda E$.

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B-\lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичний λ-матриці $A-\lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B=C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A-\lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda(C^{-1}EC) = B - \lambda E.$$

Оскільки $|C|,\ |C^{-1}| \in P\backslash\{0\}$, то матриці C і C^{-1} є унімодулярними λ-матрицями, а тому за ознакою еквівалентності матриць звідси слідує, що λ-матриця $B-\lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A-\lambda E$. Це доводить необхідність теореми.

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичній λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A - \lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda(C^{-1}EC) = B - \lambda E.$$

Оскільки $|C|$, $|C^{-1}| \in P\backslash\{0\}$, то матриці C і C^{-1} є унімодулярними λ-матрицями, а тому за ознакою еквівалентності матриць звідси слідує, що λ-матриця $B - \lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A - \lambda E$. Це доводить необхідність теореми.

Доведемо тепер достатність теореми.

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичний λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A - \lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda(C^{-1}EC) = B - \lambda E.$$

Оскільки $|C|$, $|C^{-1}| \in P\backslash\{0\}$, то матриці C і C^{-1} є унімодулярними λ-матрицями, а тому за ознакою еквівалентності матриць звідси слідує, що λ-матриця $B - \lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A - \lambda E$. Це доводить необхідність теореми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A - \lambda E$.

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичній λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A - \lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda(C^{-1}EC) = B - \lambda E.$$

Оскільки $|C|$, $|C^{-1}| \in P\backslash\{0\}$, то матриці C і C^{-1} є унімодулярними λ-матрицями, а тому за ознакою еквівалентності матриць звідси слідує, що λ-матриця $B - \lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A - \lambda E$. Це доводить необхідність теореми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A - \lambda E$. Тоді існують унімодулярні λ-матриці S і T такі, що

$$S(A - \lambda E)T = B - \lambda E.$$

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B-\lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичний λ-матриці $A-\lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A-\lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda(C^{-1}EC) = B - \lambda E.$$

Оскільки $|C|$, $|C^{-1}| \in P\backslash\{0\}$, то матриці C і C^{-1} є унімодулярними λ-матрицями, а тому за ознакою еквівалентності матриць звідси слідує, що λ-матриця $B-\lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A-\lambda E$. Це доводить необхідність теореми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай характеристична λ-матриця $B-\lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A-\lambda E$. Тоді існують унімодулярні λ-матриці S і T такі, що

$$S(A-\lambda E)T = B - \lambda E. \tag{2}$$

Оскільки S і T є унімодулярними λ-матрицями,

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичній λ-матриці $A - \lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A - \lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda(C^{-1}EC) = B - \lambda E.$$

Оскільки $|C|$, $|C^{-1}| \in P\backslash\{0\}$, то матриці C і C^{-1} є унімодулярними λ-матрицями, а тому за ознакою еквівалентності матриць звідси слідує, що λ-матриця $B - \lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A - \lambda E$. Це доводить необхідність теореми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай характеристична λ-матриця $B - \lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A - \lambda E$. Тоді існують унімодулярні λ-матриці S і T такі, що

$$S(A - \lambda E)T = B - \lambda E. \tag{2}$$

Оскільки S і T є унімодулярними λ-матрицями, то до них існують обернені матриці S^{-1} і T^{-1} відповідно.

Теорема 5 (ознака подібності матриць над полем)

Нехай A і B — деякі матриці над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли характеристична λ-матриця $B-\lambda E$ матриці B еквівалентна характеристичній λ-матриці $A-\lambda E$ матриці A.

Доведення.

Нехай справджуються умови теореми і матриця B подібна матриці A. Тоді існує оборотна матриця C над полем P така, що $B = C^{-1}AC$. Але тоді

$$C^{-1}(A-\lambda E)C = C^{-1}AC - \lambda(C^{-1}EC) = B - \lambda E.$$

Оскільки $|C|$, $|C^{-1}| \in P\backslash\{0\}$, то матриці C і C^{-1} є унімодулярними λ-матрицями, а тому за ознакою еквівалентності матриць звідси слідує, що λ-матриця $B-\lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A-\lambda E$. Це доводить необхідність теореми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай характеристична λ-матриця $B-\lambda E$ є еквівалентною λ-матриці $A-\lambda E$. Тоді існують унімодулярні λ-матриці S і T такі, що

$$S(A-\lambda E)T = B - \lambda E. \tag{2}$$

Оскільки S і T є унімодулярними λ-матрицями, то до них існують обернені матриці S^{-1} і T^{-1} відповідно. Тому із рівності (2) слідують наступні дві

Доведення.

рівності:

$$S(A - \lambda E) = (B - \lambda E)T^{-1},$$

Доведення.

рівності:

$$S(A - \lambda E) = (B - \lambda E)T^{-1}, \quad (A - \lambda E)T = S^{-1}(B - \lambda E). \tag{3}$$

Доведення.

рівності:

$$S(A - \lambda E) = (B - \lambda E)T^{-1}, \quad (A - \lambda E)T = S^{-1}(B - \lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \qquad (3)$$

Далі, через те що λ-матриці S,

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T,

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \qquad (3)$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1},\quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів,

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$

Доведення.

рівності:

$$S(A - \lambda E) = (B - \lambda E)T^{-1}, \quad (A - \lambda E)T = S^{-1}(B - \lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B - \lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B - \lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею,

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S=(B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1,$$

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1},\quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S=(B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1,\quad T=Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+R_2, \tag{4}$$

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1},\quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S=(B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1,\quad T=Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+R_2, \tag{4}$$

де $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, R_1, R_2

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S=(B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1, \quad T=Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+R_2, \tag{4}$$

де $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, R_1, R_2 є деякими матричними многочленами над полем P,

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S=(B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1, \quad T=Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+R_2, \tag{4}$$

де $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, R_1, R_2 є деякими матричними многочленами над полем P, причому, якщо R_1 або R_2 є ненульовими матричними многочленами,

Доведення.

рівності:

$$S(A - \lambda E) = (B - \lambda E)T^{-1}, \quad (A - \lambda E)T = S^{-1}(B - \lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B - \lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B - \lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S = (B - \lambda E)Q_1(\lambda) + R_1, \quad T = Q_2(\lambda)(B - \lambda E) + R_2, \tag{4}$$

де $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, R_1, R_2 є деякими матричними многочленами над полем P, причому, якщо R_1 або R_2 є ненульовими матричними многочленами, то їх степінь дорівнює 0,

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S=(B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1, \quad T=Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+R_2, \tag{4}$$

де $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, R_1, R_2 є деякими матричними многочленами над полем P, причому, якщо R_1 або R_2 є ненульовими матричними многочленами, то їх степінь дорівнює 0, а отже вони є матрицями над полем P.

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E) = (B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T = S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S = (B-\lambda E)Q_1(\lambda) + R_1, \quad T = Q_2(\lambda)(B-\lambda E) + R_2, \tag{4}$$

де $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, R_1, R_2 є деякими матричними многочленами над полем P, причому, якщо R_1 або R_2 є ненульовими матричними многочленами, то їх степінь дорівнює 0, а отже вони є матрицями над полем P. Використовуючи рівності (4)

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E) = (B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T = S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S = (B-\lambda E)Q_1(\lambda) + R_1, \quad T = Q_2(\lambda)(B-\lambda E) + R_2, \tag{4}$$

де $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, R_1, R_2 є деякими матричними многочленами над полем P, причому, якщо R_1 або R_2 є ненульовими матричними многочленами, то їх степінь дорівнює 0, а отже вони є матрицями над полем P. Використовуючи рівності (4) із (2) одержимо

$$R_1(A-\lambda E)R_2 =$$

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S=(B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1, \quad T=Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+R_2, \tag{4}$$

де $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, R_1, R_2 є деякими матричними многочленами над полем P, причому, якщо R_1 або R_2 є ненульовими матричними многочленами, то їх степінь дорівнює 0, а отже вони є матрицями над полем P. Використовуючи рівності (4) із (2) одержимо

$$R_1(A-\lambda E)R_2=\Big(S-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)\Big)(A-\lambda E)\Big(T-Q_2(\lambda)(B-\lambda E)\Big)$$

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \qquad (3)$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S=(B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1, \quad T=Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+R_2, \qquad (4)$$

де $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, R_1, R_2 є деякими матричними многочленами над полем P, причому, якщо R_1 або R_2 є ненульовими матричними многочленами, то їх степінь дорівнює 0, а отже вони є матрицями над полем P. Використовуючи рівності (4) із (2) одержимо

$$R_1(A-\lambda E)R_2=\Big(S-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)\Big)(A-\lambda E)\Big(T-Q_2(\lambda)(B-\lambda E)\Big)=$$
$$=S(A-\lambda E)T$$

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \qquad (3)$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S=(B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1, \quad T=Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+R_2, \qquad (4)$$

де $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, R_1, R_2 є деякими матричними многочленами над полем P, причому, якщо R_1 або R_2 є ненульовими матричними многочленами, то їх степінь дорівнює 0, а отже вони є матрицями над полем P. Використовуючи рівності (4) із (2) одержимо

$$R_1(A-\lambda E)R_2=\Big(S-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)\Big)(A-\lambda E)\Big(T-Q_2(\lambda)(B-\lambda E)\Big)=$$
$$=S(A-\lambda E)T-S(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-$$

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E) = (B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T = S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S = (B-\lambda E)Q_1(\lambda) + R_1, \quad T = Q_2(\lambda)(B-\lambda E) + R_2, \tag{4}$$

де $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, R_1, R_2 є деякими матричними многочленами над полем P, причому, якщо R_1 або R_2 є ненульовими матричними многочленами, то їх степінь дорівнює 0, а отже вони є матрицями над полем P. Використовуючи рівності (4) із (2) одержимо

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = \Big(S-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)\Big)(A-\lambda E)\Big(T-Q_2(\lambda)(B-\lambda E)\Big) =$$

$$= S(A-\lambda E)T - S(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E) -$$

$$-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)T +$$

Доведення.

рівності:

$$S(A-\lambda E)=(B-\lambda E)T^{-1}, \quad (A-\lambda E)T=S^{-1}(B-\lambda E). \tag{3}$$

Далі, через те що λ-матриці S, T, $B-\lambda E$ можуть бути представлені у вигляді матричних многочленів, а степінь матричного многочлена $B-\lambda E$ дорівнює 1 і старший матричний коефіцієнт $-E$ є, очевидно, оборотною матрицею, то до них можна застосувати теорему 4 про ділення матричних многочленів з остачею:

$$S=(B-\lambda E)Q_1(\lambda)+R_1, \quad T=Q_2(\lambda)(B-\lambda E)+R_2, \tag{4}$$

де $Q_1(\lambda)$, $Q_2(\lambda)$, R_1, R_2 є деякими матричними многочленами над полем P, причому, якщо R_1 або R_2 є ненульовими матричними многочленами, то їх степінь дорівнює 0, а отже вони є матрицями над полем P. Використовуючи рівності (4) із (2) одержимо

$$R_1(A-\lambda E)R_2=\Big(S-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)\Big)(A-\lambda E)\Big(T-Q_2(\lambda)(B-\lambda E)\Big)=$$
$$=S(A-\lambda E)T-S(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-$$
$$-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)T+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)$$

Доведення.

Враховуючи рівності (2) і (3), звідси слідує, що

$$R_1(A - \lambda E)R_2 =$$

Доведення.

Враховуючи рівності (2) і (3), звідси слідує, що

$$R_1(A - \lambda E)R_2 = (B - \lambda E)$$

Доведення.

Враховуючи рівності (2) і (3), звідси слідує, що

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E) -$$

$$-(B-\lambda E)T^{-1}Q_2(\lambda)(B-\lambda E)$$

Доведення.

Враховуючи рівності (2) і (3), звідси слідує, що

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E)-$$

$$-(B-\lambda E)T^{-1}Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)S^{-1}(B-\lambda E)$$

Доведення.

Враховуючи рівності (2) і (3), звідси слідує, що

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E)-$$

$$-(B-\lambda E)T^{-1}Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)S^{-1}(B-\lambda E)+$$

$$+$$

Доведення.

Враховуючи рівності (2) і (3), звідси слідує, що

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E)-$$

$$-(B-\lambda E)T^{-1}Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)S^{-1}(B-\lambda E)+$$

$$+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)$$

Доведення.

Враховуючи рівності (2) і (3), звідси слідує, що

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E)-$$

$$-(B-\lambda E)T^{-1}Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)S^{-1}(B-\lambda E)+$$

$$+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E) =$$

$$= (B-\lambda E)-$$

Доведення.

Враховуючи рівності (2) і (3), звідси слідує, що

$$R_1(A-\lambda E)R_2=(B-\lambda E)-$$

$$-(B-\lambda E)T^{-1}Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)S^{-1}(B-\lambda E)+$$

$$+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)=$$

$$=(B-\lambda E)-$$

$$-\Big[(B-\lambda E)\Big(T^{-1}Q_2(\lambda)+Q_1(\lambda)S^{-1}-Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)\Big)(B-\lambda E)\Big].$$

Доведення.

Враховуючи рівності (2) і (3), звідси слідує, що

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E)-$$

$$-(B-\lambda E)T^{-1}Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)S^{-1}(B-\lambda E)+$$

$$+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E) =$$

$$=(B-\lambda E)-$$

$$-\Big[(B-\lambda E)\Big(T^{-1}Q_2(\lambda)+Q_1(\lambda)S^{-1}-Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)\Big)(B-\lambda E)\Big].$$

Матричний многочлен, що є результатом обчислення алгебраїчного виразу у квадратних дужках дорівнює 0.

Доведення.

Враховуючи рівності (2) і (3), звідси слідує, що

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E)-$$

$$-(B-\lambda E)T^{-1}Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)S^{-1}(B-\lambda E)+$$

$$+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E) =$$

$$=(B-\lambda E)-$$

$$-\Big[(B-\lambda E)\Big(T^{-1}Q_2(\lambda)+Q_1(\lambda)S^{-1}-Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)\Big)(B-\lambda E)\Big].$$

Матричний многочлен, що є результатом обчислення алгебраїчного виразу у квадратних дужках дорівнює 0. У протилежному випадку цей матричний многочлен повинен мати степінь щонайменше 2,

Доведення.

Враховуючи рівності (2) і (3), звідси слідує, що

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E)-$$
$$-(B-\lambda E)T^{-1}Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)S^{-1}(B-\lambda E)+$$
$$+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)=$$
$$=(B-\lambda E)-$$
$$-\Big[(B-\lambda E)\Big(T^{-1}Q_2(\lambda)+Q_1(\lambda)S^{-1}-Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)\Big)(B-\lambda E)\Big].$$

Матричний многочлен, що є результатом обчислення алгебраїчного виразу у квадратних дужках дорівнює 0. У протилежному випадку цей матричний многочлен повинен мати степінь щонайменше 2, а це суперечить тому, що матричний многочлен $R_1(A-\lambda E)R_2$ має степінь 1.

Доведення.

Враховуючи рівності (2) і (3), звідси слідує, що

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E)-$$

$$-(B-\lambda E)T^{-1}Q_2(\lambda)(B-\lambda E)-(B-\lambda E)Q_1(\lambda)S^{-1}(B-\lambda E)+$$

$$+(B-\lambda E)Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)(B-\lambda E)=$$

$$=(B-\lambda E)-$$

$$-\Big[(B-\lambda E)\Big(T^{-1}Q_2(\lambda)+Q_1(\lambda)S^{-1}-Q_1(\lambda)(A-\lambda E)Q_2(\lambda)\Big)(B-\lambda E)\Big].$$

Матричний многочлен, що є результатом обчислення алгебраїчного виразу у квадратних дужках дорівнює 0. У протилежному випадку цей матричний многочлен повинен мати степінь щонайменше 2, а це суперечить тому, що матричний многочлен $R_1(A-\lambda E)R_2$ має степінь 1. Отже,

$$R_1(A-\lambda E)R_2 = (B-\lambda E).$$

Звідси

$$R_1AR_2 = B, \qquad R_1R_2 = E.$$

Доведення.

Із останньої рівності слідує, що матриця R_2 є оборотною матрицею над полем P

Доведення.

Із останньої рівності слідує, що матриця R_2 є оборотною матрицею над полем P і $R_1 = R_2^{-1}$.

Доведення.

Із останньої рівності слідує, що матриця R_2 є оборотною матрицею над полем P і $R_1 = R_2^{-1}$. І попередньої тоді одержимо, що

$$R_2^{-1} A R_2 = B.$$

Доведення.

Із останньої рівності слідує, що матриця R_2 є оборотною матрицею над полем P і $R_1 = R_2^{-1}$. І попередньої тоді одержимо, що

$$R_2^{-1} A R_2 = B.$$

Це означає, що матриця B подібна матриці А.

Доведення.

Із останньої рівності слідує, що матриця R_2 є оборотною матрицею над полем P і $R_1 = R_2^{-1}$. І попередньої тоді одержимо, що

$$R_2^{-1} A R_2 = B.$$

Це означає, що матриця B подібна матриці А. Теорема доведена. $\square$