Знаходження нормальної форми Жордана

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

10 квітня 2023 року

Нехай α — деякий елемент поля P.

Нехай α — деякий елемент поля P. Знайдемо канонічний вигляд характеристичної матриці клітки Жордна порядку n з елементом α на головній діагоналі,

Нехай α — деякий елемент поля P. Знайдемо канонічний вигляд характеристичної матриці клітки Жордна порядку n з елементом α на головній діагоналі, тобто матриці

$$J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Нехай α — деякий елемент поля P. Знайдемо канонічний вигляд характеристичної матриці клітки Жордна порядку n з елементом α на головній діагоналі, тобто матриці

$$J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Нехай $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, ..., $d_n(\lambda)$

Нехай α — деякий елемент поля P. Знайдемо канонічний вигляд характеристичної матриці клітки Жордна порядку n з елементом α на головній діагоналі, тобто матриці

$$J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Нехай $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, ..., $d_n(\lambda)$ — найбільші спільні дільники мінорів відповідно 1-го, 2-го, ..., n-го порядків характеристичної матриці $J_n(\alpha) - \lambda E$ матриці (1),

Нехай α — деякий елемент поля P. Знайдемо канонічний вигляд характеристичної матриці клітки Жордна порядку n з елементом α на головній діагоналі, тобто матриці

$$J_n(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Нехай $d_1(\lambda)$, $d_2(\lambda)$, ..., $d_n(\lambda)$ — найбільші спільні дільники мінорів відповідно 1-го, 2-го, ..., n-го порядків характеристичної матриці $J_n(\alpha) - \lambda E$ матриці (1), причому їх старші коефіцієнти дорівнюють 1.

Оскільки

$$J_n(\alpha) - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha - \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha - \lambda \end{pmatrix}$$

Оскільки

$$J_n(\alpha) - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

то очевидно

$$d_n(\lambda) = (\lambda-\alpha)^n.$$

Оскільки

$$J_n(\alpha) - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

то очевидно

$$d_n(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n.$$

З іншого боку, мінор $(n-1)$-го порядку матриці $J_n(\alpha)-\lambda E$,

Оскільки

$$J_n(\alpha) - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

то очевидно

$$d_n(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n.$$

З іншого боку, мінор $(n-1)$-го порядку матриці $J_n(\alpha)-\lambda E$, що знаходиться у перших $n-1$ і останніх $n-1$ стовпцях дорівнює 1,

Оскільки

$$J_n(\alpha) - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

то очевидно

$$d_n(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n.$$

З іншого боку, мінор $(n-1)$-го порядку матриці $J_n(\alpha) - \lambda E$, що знаходиться у перших $n-1$ і останніх $n-1$ стовпцях дорівнює 1, тому

$$d_{n-1}(\lambda) = 1.$$

Оскільки

$$J_n(\alpha) - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

то очевидно

$$d_n(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n.$$

З іншого боку, мінор $(n-1)$-го порядку матриці $J_n(\alpha) - \lambda E$, що знаходиться у перших $n-1$ і останніх $n-1$ стовпцях дорівнює 1, тому

$$d_{n-1}(\lambda) = 1.$$

Як наслідок звідси одержимо, що

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \ldots = d_{n-2}(\lambda) = 1.$$

Оскільки

$$J_n(\alpha) - \lambda E = \begin{pmatrix} \alpha-\lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \alpha-\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha-\lambda \end{pmatrix}$$

то очевидно

$$d_n(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n.$$

З іншого боку, мінор $(n-1)$-го порядку матриці $J_n(\alpha) - \lambda E$, що знаходиться у перших $n-1$ і останніх $n-1$ стовпцях дорівнює 1, тому

$$d_{n-1}(\lambda) = 1.$$

Як наслідок звідси одержимо, що

$$d_1(\lambda) = d_2(\lambda) = \ldots = d_{n-2}(\lambda) = 1.$$

Таким чином многочлени

$$e_1(\lambda) = d_1(\lambda) = 1, \quad e_2(\lambda) = \frac{d_2(\lambda)}{d_1(\lambda)} = 1, \quad \ldots, \quad e_{n-1}(\lambda) = \frac{d_{n-1}(\lambda)}{d_{n-2}(\lambda)} = 1,$$

$$e_n(\lambda) = \frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)} = (\lambda - \alpha)^n$$

$$e_n(\lambda) = \frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)} = (\lambda - \alpha)^n$$

є інваріантними множниками матриці $J_n(\alpha) - \lambda E$,

$$e_n(\lambda) = \frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)} = (\lambda - \alpha)^n$$

є інваріантними множниками матриці $J_n(\alpha) - \lambda E$, а сама ця матриці еквівалентна наступного канонічного вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (\lambda - \alpha)^n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

$$e_n(\lambda) = \frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)} = (\lambda - \alpha)^n$$

є інваріантними множниками матриці $J_n(\alpha) - \lambda E$, а сама ця матриці еквівалентна наступного канонічного вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (\lambda-\alpha)^n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Лема 1

Нехай s *—деяке натуральне число,*

$$e_n(\lambda) = \frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)} = (\lambda - \alpha)^n$$

є інваріантними множниками матриці $J_n(\alpha) - \lambda E$, а сама ця матриці еквівалентна наступного канонічного вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (\lambda - \alpha)^n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Лема 1

Нехай s —деяке натуральне число, $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_s(\lambda)$ — деякі попарно взаємно прості многочлени над полем P.

$$e_n(\lambda) = \frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)} = (\lambda - \alpha)^n$$

є інваріантними множниками матриці $J_n(\alpha) - \lambda E$, а сама ця матриці еквівалентна наступного канонічного вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (\lambda - \alpha)^n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Лема 1

Нехай s —деяке натуральне число, $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_s(\lambda)$ — деякі попарно взаємно прості многочлени над полем P. Тоді справджується наступна еквівалентність діагональних λ-матриць

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_s(\lambda) \end{pmatrix}$$

$$e_n(\lambda) = \frac{d_n(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)} = (\lambda - \alpha)^n$$

є інваріантними множниками матриці $J_n(\alpha) - \lambda E$, а сама ця матриці еквівалентна наступного канонічного вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & (\lambda - \alpha)^n \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Лема 1

Нехай s —деяке натуральне число, $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_s(\lambda)$ — деякі попарно взаємно прості многочлени над полем P. Тоді справджується наступна еквівалентність діагональних λ-матриць

$$\begin{pmatrix} f_1(\lambda) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f_2(\lambda) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_s(\lambda) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & f_1(\lambda)f_2(\lambda)\cdots f_s(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана

Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться відповідно елементам α_1, α_2, ..., α_k

Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться відповідно елементам α_1, α_2, ..., α_k та відповідно порядку n_1, n_2, ..., n_k.

Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться відповідно елементам α_1, α_2, ..., α_k та відповідно порядку n_1, n_2, ..., n_k. Тобто матриці

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) - \lambda E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2) - \lambda E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_k}(\alpha_k) - \lambda E_k \end{pmatrix},$$

Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться відповідно елементам α_1, α_2, ..., α_k та відповідно порядку n_1, n_2, ..., n_k. Тобто матриці

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) - \lambda E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2) - \lambda E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_k}(\alpha_k) - \lambda E_k \end{pmatrix},$$

де E_j — одинична матриця порядку n_j, Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J-\lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться відповідно елементам α_1, α_2, ..., α_k та відповідно порядку n_1, n_2, ..., n_k. Тобто матриці

$$J-\lambda E=\begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1)-\lambda E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2)-\lambda E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_k}(\alpha_k)-\lambda E_k \end{pmatrix},$$

де E_j — одинична матриця порядку n_j, $j\in\{1,2,\dots,k\}$.

Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J-\lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться відповідно елементам α_1, α_2, ..., α_k та відповідно порядку n_1, n_2, ..., n_k. Тобто матриці

$$J-\lambda E=\begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1)-\lambda E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2)-\lambda E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_k}(\alpha_k)-\lambda E_k \end{pmatrix},$$

де E_j — одинична матриця порядку n_j, $j\in\{1,2,\dots,k\}$. Зауважимо, що серед елементів α_1, α_2, ..., α_k поля P можуть бути рівні,

Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться відповідно елементам α_1, α_2, ..., α_k та відповідно порядку n_1, n_2, ..., n_k. Тобто матриці

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) - \lambda E_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2) - \lambda E_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{n_k}(\alpha_k) - \lambda E_k \end{pmatrix},$$

де E_j — одинична матриця порядку n_j, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Зауважимо, що серед елементів α_1, α_2, ..., α_k поля P можуть бути рівні, так само як і серед натуральних чисел n_1, n_2, ..., n_k.

Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться відповідно елементам α_1, α_2, ..., α_k та відповідно порядку n_1, n_2, ..., n_k. Тобто матриці

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) - \lambda E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2) - \lambda E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_k}(\alpha_k) - \lambda E_k \end{pmatrix},$$

де E_j — одинична матриця порядку n_j, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Зауважимо, що серед елементів α_1, α_2, ..., α_k поля P можуть бути рівні, так само як і серед натуральних чисел n_1, n_2, ..., n_k. За вище доведеним можна показати, що λ-матриця $J - \lambda E$ еквівалентна діагональній матриці,

Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться відповідно елементам α_1, α_2, ..., α_k та відповідно порядку n_1, n_2, ..., n_k. Тобто матриці

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) - \lambda E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2) - \lambda E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_k}(\alpha_k) - \lambda E_k \end{pmatrix},$$

де E_j — одинична матриця порядку n_j, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Зауважимо, що серед елементів α_1, α_2, ..., α_k поля P можуть бути рівні, так само як і серед натуральних чисел n_1, n_2, ..., n_k. За вище доведеним можна показати, що λ-матриця $J - \lambda E$ еквівалентна діагональній матриці, у якої на діагоналі стоять деяке число одиниць та многочлени

$$(\lambda - \alpha_1)^{n_1}, \quad (\lambda - \alpha_2)^{n_2}, \quad \dots, \quad (\lambda - \alpha_k)^{n_k}. \tag{3}$$

Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться відповідно елементам α_1, α_2, ..., α_k та відповідно порядку n_1, n_2, ..., n_k. Тобто матриці

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) - \lambda E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2) - \lambda E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_k}(\alpha_k) - \lambda E_k \end{pmatrix},$$

де E_j — одинична матриця порядку n_j, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Зауважимо, що серед елементів α_1, α_2, ..., α_k поля P можуть бути рівні, так само як і серед натуральних чисел n_1, n_2, ..., n_k. За вище доведеним можна показати, що λ-матриця $J - \lambda E$ еквівалентна діагональній матриці, у якої на діагоналі стоять деяке число одиниць та многочлени

$$(\lambda - \alpha_1)^{n_1}, \quad (\lambda - \alpha_2)^{n_2}, \quad \dots, \quad (\lambda - \alpha_k)^{n_k}. \tag{3}$$

Розташуємо ці многочлени, які у подальшому називатимемо елементарними дільниками матриці, певним чином у таблиці, яку побудуємо наступним чином.

Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться відповідно елементам α_1, α_2, ..., α_k та відповідно порядку n_1, n_2, ..., n_k. Тобто матриці

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) - \lambda E_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2) - \lambda E_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{n_k}(\alpha_k) - \lambda E_k \end{pmatrix},$$

де E_j — одинична матриця порядку n_j, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Зауважимо, що серед елементів α_1, α_2, ..., α_k поля P можуть бути рівні, так само як і серед натуральних чисел n_1, n_2, ..., n_k. За вище доведеним можна показати, що λ-матриця $J - \lambda E$ еквівалентна діагональній матриці, у якої на діагоналі стоять деяке число одиниць та многочлени

$$(\lambda - \alpha_1)^{n_1}, \quad (\lambda - \alpha_2)^{n_2}, \quad \ldots, \quad (\lambda - \alpha_k)^{n_k}. \tag{3}$$

Розташуємо ці многочлени, які у подальшому називатимемо елементарними дільниками матриці, певним чином у таблиці, яку побудуємо наступним чином. Спочатку нами перенумеровано елементи α_1, α_2, ..., α_k

Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться відповідно елементам α_1, α_2, ..., α_k та відповідно порядку n_1, n_2, ..., n_k. Тобто матриці

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) - \lambda E_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2) - \lambda E_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_k}(\alpha_k) - \lambda E_k \end{pmatrix},$$

де E_j — одинична матриця порядку n_j, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Зауважимо, що серед елементів α_1, α_2, ..., α_k поля P можуть бути рівні, так само як і серед натуральних чисел n_1, n_2, ..., n_k. За вище доведеним можна показати, що λ-матриця $J - \lambda E$ еквівалентна діагональній матриці, у якої на діагоналі стоять деяке число одиниць та многочлени

$$(\lambda - \alpha_1)^{n_1}, \quad (\lambda - \alpha_2)^{n_2}, \quad \dots, \quad (\lambda - \alpha_k)^{n_k}. \tag{3}$$

Розташуємо ці многочлени, які у подальшому називатимемо елементарними дільниками матриці, певним чином у таблиці, яку побудуємо наступним чином. Спочатку нами перенумеровано елементи α_1, α_2, ..., α_k чином, що перші l з них попарно різні, Знайдемо тепер канонічний вигляд характеристичної матриці $J - \lambda E$ нормальної форми Жордана J, яка складається з k кліток Жордана у кожної з яких на головній діагоналі знаходиться відповідно елементам $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ та відповідно порядку $n_1, n_2, \ldots, n_k$. Тобто матриці

$$J - \lambda E = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\alpha_1) - \lambda E_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & J_{n_2}(\alpha_2) - \lambda E_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & J_{n_k}(\alpha_k) - \lambda E_k \end{pmatrix},$$

де E_j — одинична матриця порядку n_j, $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Зауважимо, що серед елементів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ поля P можуть бути рівні, так само як і серед натуральних чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$. За вище доведеним можна показати, що λ-матриця $J - \lambda E$ еквівалентна діагональній матриці, у якої на діагоналі стоять деяке число одиниць та многочлени

$$(\lambda - \alpha_1)^{n_1}, \quad (\lambda - \alpha_2)^{n_2}, \quad \ldots, \quad (\lambda - \alpha_k)^{n_k}. \tag{3}$$

Розташуємо ці многочлени, які у подальшому називатимемо елементарними дільниками матриці, певним чином у таблиці, яку побудуємо наступним чином. Спочатку нами перенумеровано елементи $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ чином, що перші l з них попарно різні, а всі інші починаючи з $l+1$ дорівнюють хоча б одному з l перших.

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i}

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, $\ldots$, n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, тобто

$$n_{i1} \geq n_{i2} \geq \ldots \geq n_{iq_i},$$

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, тобто

$$n_{i1} \geq n_{i2} \geq \ldots \geq n_{iq_i},$$

де q_i — число таких многочленів,

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, тобто

$$n_{i1} \geq n_{i2} \geq \ldots \geq n_{iq_i},$$

де q_i — число таких многочленів, $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$.

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, тобто

$$n_{i1} \geq n_{i2} \geq \ldots \geq n_{iq_i},$$

де q_i — число таких многочленів, $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Нехай q — максимальне серед чисел q_1, q_2, ..., q_l.

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, тобто

$$n_{i1} \geq n_{i2} \geq \ldots \geq n_{iq_i},$$

де q_i — число таких многочленів, $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Нехай q — максимальне серед чисел q_1, q_2, ..., q_l. Розглянемо таблицю, в якій l рядків та q стовпців

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, тобто

$$n_{i1} \geq n_{i2} \geq \ldots \geq n_{iq_i},$$

де q_i — число таких многочленів, $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Нехай q — максимальне серед чисел q_1, q_2, ..., q_l. Розглянемо таблицю, в якій l рядків та q стовпців і яка утворюється «дописуванням» у кожному з наступних рядків необхідної кількості одиниць:

$$\begin{array}{l} (\lambda - \alpha_1)^{n_{11}},\ (\lambda - \alpha_1)^{n_{12}},\ \ldots,\ (\lambda - \alpha_1)^{n_{1q_1}}, \\ (\lambda - \alpha_2)^{n_{21}},\ (\lambda - \alpha_2)^{n_{22}},\ \ldots,\ (\lambda - \alpha_2)^{n_{2q_2}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\lambda - \alpha_l)^{n_{l1}},\ (\lambda - \alpha_l)^{n_{l2}},\ \ldots,\ (\lambda - \alpha_l)^{n_{2q_l}}. \end{array}$$

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, тобто

$$n_{i1} \geq n_{i2} \geq \ldots \geq n_{iq_i},$$

де q_i — число таких многочленів, $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Нехай q — максимальне серед чисел q_1, q_2, ..., q_l. Розглянемо таблицю, в якій l рядків та q стовпців і яка утворюється «дописуванням» у кожному з наступних рядків необхідної кількості одиниць:

$$\begin{array}{l}
(\lambda - \alpha_1)^{n_{11}},\ (\lambda - \alpha_1)^{n_{12}},\ \ldots,\ (\lambda - \alpha_1)^{n_{1q_1}}, \\
(\lambda - \alpha_2)^{n_{21}},\ (\lambda - \alpha_2)^{n_{22}},\ \ldots,\ (\lambda - \alpha_2)^{n_{2q_2}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\lambda - \alpha_l)^{n_{l1}},\ (\lambda - \alpha_l)^{n_{l2}},\ \ldots,\ (\lambda - \alpha_l)^{n_{2q_l}}.
\end{array}$$

Позначимо

$$n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{q_i} n_{ij},$$

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, тобто

$$n_{i1} \geq n_{i2} \geq \ldots \geq n_{iq_i},$$

де q_i — число таких многочленів, $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Нехай q — максимальне серед чисел q_1, q_2, ..., q_l. Розглянемо таблицю, в якій l рядків та q стовпців і яка утворюється «дописуванням» у кожному з наступних рядків необхідної кількості одиниць:

$$\begin{array}{l}
(\lambda-\alpha_1)^{n_{11}},\ (\lambda-\alpha_1)^{n_{12}},\ \ldots,\ (\lambda-\alpha_1)^{n_{1q_1}},\\
(\lambda-\alpha_2)^{n_{21}},\ (\lambda-\alpha_2)^{n_{22}},\ \ldots,\ (\lambda-\alpha_2)^{n_{2q_2}},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(\lambda-\alpha_l)^{n_{l1}},\ (\lambda-\alpha_l)^{n_{l2}},\ \ldots,\ (\lambda-\alpha_l)^{n_{2q_l}}.
\end{array}$$

Позначимо

$$n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{q_i} n_{ij},$$

$$e_{n-t+1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{l} (\lambda-\alpha_i)^{n_{it}},$$

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, тобто

$$n_{i1} \geq n_{i2} \geq \ldots \geq n_{iq_i},$$

де q_i — число таких многочленів, $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Нехай q — максимальне серед чисел q_1, q_2, ..., q_l. Розглянемо таблицю, в якій l рядків та q стовпців і яка утворюється «дописуванням» у кожному з наступних рядків необхідної кількості одиниць:

$$\begin{array}{l}
(\lambda-\alpha_1)^{n_{11}},\ (\lambda-\alpha_1)^{n_{12}},\ \ldots,\ (\lambda-\alpha_1)^{n_{1q_1}}, \\
(\lambda-\alpha_2)^{n_{21}},\ (\lambda-\alpha_2)^{n_{22}},\ \ldots,\ (\lambda-\alpha_2)^{n_{2q_2}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\lambda-\alpha_l)^{n_{l1}},\ (\lambda-\alpha_l)^{n_{l2}},\ \ldots,\ (\lambda-\alpha_l)^{n_{2q_l}}.
\end{array}$$

Позначимо

$$n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{q_i} n_{ij},$$

$$e_{n-t+1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{l} (\lambda-\alpha_i)^{n_{it}},$$

де $t \in \{1, 2, \ldots, q\}$,

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, тобто

$$n_{i1} \geq n_{i2} \geq \ldots \geq n_{iq_i},$$

де q_i — число таких многочленів, $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Нехай q — максимальне серед чисел q_1, q_2, ..., q_l. Розглянемо таблицю, в якій l рядків та q стовпців і яка утворюється «дописуванням» у кожному з наступних рядків необхідної кількості одиниць:

$$\begin{array}{l}
(\lambda - \alpha_1)^{n_{11}},\ (\lambda - \alpha_1)^{n_{12}},\ \ldots,\ (\lambda - \alpha_1)^{n_{1q_1}}, \\
(\lambda - \alpha_2)^{n_{21}},\ (\lambda - \alpha_2)^{n_{22}},\ \ldots,\ (\lambda - \alpha_2)^{n_{2q_2}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\lambda - \alpha_l)^{n_{l1}},\ (\lambda - \alpha_l)^{n_{l2}},\ \ldots,\ (\lambda - \alpha_l)^{n_{2q_l}}.
\end{array}$$

Позначимо

$$n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{q_i} n_{ij},$$

$$e_{n-t+1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{l} (\lambda - \alpha_i)^{n_{it}},$$

де $t \in \{1, 2, \ldots, q\}$, тобто $e_n(\lambda)$ є добутком всіх многочленів 1-го стовпця вище згаданої таблиці,

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, тобто

$$n_{i1} \geq n_{i2} \geq \ldots \geq n_{iq_i},$$

де q_i — число таких многочленів, $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Нехай q — максимальне серед чисел q_1, q_2, ..., q_l. Розглянемо таблицю, в якій l рядків та q стовпців і яка утворюється «дописуванням» у кожному з наступних рядків необхідної кількості одиниць:

$$\begin{gathered}
(\lambda-\alpha_1)^{n_{11}},\ (\lambda-\alpha_1)^{n_{12}},\ \ldots,\ (\lambda-\alpha_1)^{n_{1q_1}}, \\
(\lambda-\alpha_2)^{n_{21}},\ (\lambda-\alpha_2)^{n_{22}},\ \ldots,\ (\lambda-\alpha_2)^{n_{2q_2}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\lambda-\alpha_l)^{n_{l1}},\ (\lambda-\alpha_l)^{n_{l2}},\ \ldots,\ (\lambda-\alpha_l)^{n_{2q_l}}.
\end{gathered}$$

Позначимо

$$n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{q_i} n_{ij},$$

$$e_{n-t+1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{l} (\lambda-\alpha_i)^{n_{it}},$$

де $t \in \{1, 2, \ldots, q\}$, тобто $e_n(\lambda)$ є добутком всіх многочленів 1-го стовпця вище згаданої таблиці, $e_{n-1}(\lambda)$ є добутком всіх многочленів 2-го стовпця цієї таблиці, і т. д.

Далі нехай n_{i1}, n_{i2}, ..., n_{iq_i} — степені тих многочленів із (3), що мають корінь α_i і вони розташовані у порядку незростання, тобто

$$n_{i1} \geq n_{i2} \geq \ldots \geq n_{iq_i},$$

де q_i — число таких многочленів, $i \in \{1, 2, \ldots, l\}$. Нехай q — максимальне серед чисел q_1, q_2, ..., q_l. Розглянемо таблицю, в якій l рядків та q стовпців і яка утворюється «дописуванням» у кожному з наступних рядків необхідної кількості одиниць:

$$\begin{array}{l}
(\lambda-\alpha_1)^{n_{11}},\ (\lambda-\alpha_1)^{n_{12}},\ \ldots,\ (\lambda-\alpha_1)^{n_{1q_1}}, \\
(\lambda-\alpha_2)^{n_{21}},\ (\lambda-\alpha_2)^{n_{22}},\ \ldots,\ (\lambda-\alpha_2)^{n_{2q_2}}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
(\lambda-\alpha_l)^{n_{l1}},\ (\lambda-\alpha_l)^{n_{l2}},\ \ldots,\ (\lambda-\alpha_l)^{n_{2q_l}}.
\end{array}$$

Позначимо

$$n = \sum_{i=1}^{l} \sum_{j=1}^{q_i} n_{ij},$$

$$e_{n-t+1}(\lambda) = \prod_{i=1}^{l} (\lambda-\alpha_i)^{n_{it}},$$

де $t \in \{1, 2, \ldots, q\}$, тобто $e_n(\lambda)$ є добутком всіх многочленів 1-го стовпця вище згаданої таблиці, $e_{n-1}(\lambda)$ є добутком всіх многочленів 2-го стовпця цієї таблиці, і т. д.

Використовуючи лему 1 можна нескладно показати, що характеристична матриця $J - \lambda E$ еквівалентна λ-матриці наступного канонічного вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & e_{n-q+1}(\lambda) & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Нами доведено таку теорему.

Використовуючи лему 1 можна нескладно показати, що характеристична матриця $J-\lambda E$ еквівалентна λ-матриці наступного канонічного вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & e_{n-q+1}(\lambda) & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Нами доведено таку теорему.

Теорема 1

Дві квадратні матриці над полем P нормальної форми Жордана подібні

Використовуючи лему 1 можна нескладно показати, що характеристична матриця $J - \lambda E$ еквівалентна λ-матриці наступного канонічного вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & e_{n-q+1}(\lambda) & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Нами доведено таку теорему.

Теорема 1

Дві квадратні матриці над полем P нормальної форми Жордана подібні тоді і тільки тоді,

Використовуючи лему 1 можна нескладно показати, що характеристична матриця $J - \lambda E$ еквівалентна λ-матриці наступного канонічного вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & e_{n-q+1}(\lambda) & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Нами доведено таку теорему.

Теорема 1

Дві квадратні матриці над полем P нормальної форми Жордана подібні тоді і тільки тоді, коли вони складаються з одних і тих же кліток Жордана,

Використовуючи лему 1 можна нескладно показати, що характеристична матриця $J - \lambda E$ еквівалентна λ-матриці наступного канонічного вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \mathbf{0} & \\ & & 1 & & & \\ & & & e_{n-q+1}(\lambda) & & \\ & \mathbf{0} & & & \ddots & \\ & & & & & e_n(\lambda) \end{pmatrix}.$$

Нами доведено таку теорему.

Теорема 1

Дві квадратні матриці над полем P нормальної форми Жордана подібні тоді і тільки тоді, коли вони складаються з одних і тих же кліток Жордана, розміщених лише можливо по-різному на головних діагоналях даних нормальних форм.

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Розглянемо матрицю нормальної форми Жордана

$$J = \begin{pmatrix}
5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2
\end{pmatrix}.$$

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Розглянемо матрицю нормальної форми Жордана

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & 5 & 1 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 5 & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & & & & & & \\ & & & & 0 & 2 & & & & & & & \\ & & & & & & 5 & 1 & & & & & \\ & & & & & & 0 & 5 & & & & & \\ & & & & & & & & 2 & 1 & & & \\ & & & & & & & & 0 & 2 & & & \\ & & & & & & & & & & 5 & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Таблиця елементарних дільників матриці J виглядає так:

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Розглянемо матрицю нормальної форми Жордана

$$J = \begin{pmatrix}
5 & 1 & 0 & & & & & & & & & & & \\
0 & 5 & 1 & & & & & & & & & & & \\
0 & 0 & 5 & & & & & & & & & & & \\
& & & 1 & & & & & & & & & & \\
& & & & 2 & 1 & & & & & & & & \\
& & & & 0 & 2 & & & & & & & & \\
& & & & & & 5 & 1 & & & & & & \\
& & & & & & 0 & 5 & & & & & & \\
& & & & & & & & 2 & 1 & & & & \\
& & & & & & & & 0 & 2 & & & & \\
& & & & & & & & & & 5 & & & \\
& & & & & & & & & & & 1 & & \\
& & & & & & & & & & & & 2 &
\end{pmatrix}.$$

Таблиця елементарних дільників матриці J виглядає так:

$$\lambda - 1 \qquad \lambda - 1$$

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Розглянемо матрицю нормальної форми Жордана

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & 5 & 1 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 5 & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & & & & & & \\ & & & & 0 & 2 & & & & & & & \\ & & & & & & 5 & 1 & & & & & \\ & & & & & & 0 & 5 & & & & & \\ & & & & & & & & 2 & 1 & & & \\ & & & & & & & & 0 & 2 & & & \\ & & & & & & & & & & 5 & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Таблиця елементарних дільників матриці J виглядає так:

$$\begin{array}{ccc} \lambda - 1 & \lambda - 1 & \\ (\lambda - 2)^2 & (\lambda - 2)^2 & \lambda - 2 \end{array}$$

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Розглянемо матрицю нормальної форми Жордана

$$J=\begin{pmatrix}
5&1&0&&&&&&&&&&\\
0&5&1&&&&&&&&&&\\
0&0&5&&&&&&&&&&\\
&&&1&&&&&&&&&\\
&&&&2&1&&&&&&&\\
&&&&0&2&&&&&&&\\
&&&&&&5&1&&&&&\\
&&&&&&0&5&&&&&\\
&&&&&&&&2&1&&&\\
&&&&&&&&0&2&&&\\
&&&&&&&&&&5&&\\
&&&&&&&&&&&1&\\
&&&&&&&&&&&&2
\end{pmatrix}.$$

Таблиця елементарних дільників матриці J виглядає так:

$$\begin{array}{ccc}
\lambda-1 & \lambda-1 & \\
(\lambda-2)^2 & (\lambda-2)^2 & \lambda-2\\
(\lambda-5)^3 & (\lambda-5)^2 & \lambda-5
\end{array}$$

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Розглянемо матрицю нормальної форми Жордана

$$J = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 & & & & & & & & & & \\ 0 & 5 & 1 & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 5 & & & & & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & & & & & \\ & & & & 2 & 1 & & & & & & & \\ & & & & 0 & 2 & & & & & & & \\ & & & & & & 5 & 1 & & & & & \\ & & & & & & 0 & 5 & & & & & \\ & & & & & & & & 2 & 1 & & & \\ & & & & & & & & 0 & 2 & & & \\ & & & & & & & & & & 5 & & \\ & & & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & & & 2 \end{pmatrix}.$$

Таблиця елементарних дільників матриці J виглядає так:

$$\begin{matrix} \lambda - 1 & \lambda - 1 & 1 \\ (\lambda - 2)^2 & (\lambda - 2)^2 & \lambda - 2 \\ (\lambda - 5)^3 & (\lambda - 5)^2 & \lambda - 5 \end{matrix}$$

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Тому канонічним виглядом характеристичної матриці $J-\lambda E$ є матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & (\lambda-2)(\lambda-5) & & \\ & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^2 & \\ & & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^3 \end{pmatrix}.$$

Із вище проведених міркувань слідують також наступні теореми.

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Тому канонічним виглядом характеристичної матриці $J - \lambda E$ є матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & (\lambda-2)(\lambda-5) & & \\ & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^2 & \\ & & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^3 \end{pmatrix}.$$

Із вище проведених міркувань слідують також наступні теореми.

Теорема 2

Якщо деяка квадратна матриця A над деяким полем P подібна нормальній формі Жордана,

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Тому канонічним виглядом характеристичної матриці $J - \lambda E$ є матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & (\lambda-2)(\lambda-5) & & \\ & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^2 & \\ & & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^3 \end{pmatrix}.$$

Із вище проведених міркувань слідують також наступні теореми.

Теорема 2

Якщо деяка квадратна матриця A над деяким полем P подібна нормальній формі Жордана, то ця нормальна форма Жордана визначається матрицею A однозначно

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Тому канонічним виглядом характеристичної матриці $J - \lambda E$ є матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & (\lambda-2)(\lambda-5) & & \\ & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^2 & \\ & & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^3 \end{pmatrix}.$$

Із вище проведених міркувань слідують також наступні теореми.

Теорема 2

Якщо деяка квадратна матриця A над деяким полем P подібна нормальній формі Жордана, то ця нормальна форма Жордана визначається матрицею A однозначно з точністю до розміщення кліток Жордана на головній діагоналі.

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Тому канонічним виглядом характеристичної матриці $J-\lambda E$ є матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & (\lambda-2)(\lambda-5) & & \\ & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^2 & \\ & & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^3 \end{pmatrix}.$$

Із вище проведених міркувань слідують також наступні теореми.

Теорема 2

Якщо деяка квадратна матриця A над деяким полем P подібна нормальній формі Жордана, то ця нормальна форма Жордана визначається матрицею A однозначно з точністю до розміщення кліток Жордана на головній діагоналі.

Теорема 3

Нехай A — квадратна матриця над деяким полем P.

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Тому канонічним виглядом характеристичної матриці $J - \lambda E$ є матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & (\lambda-2)(\lambda-5) & & \\ & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^2 & \\ & & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^3 \end{pmatrix}.$$

Із вище проведених міркувань слідують також наступні теореми.

Теорема 2

Якщо деяка квадратна матриця A над деяким полем P подібна нормальній формі Жордана, то ця нормальна форма Жордана визначається матрицею A однозначно з точністю до розміщення кліток Жордана на головній діагоналі.

Теорема 3

Нехай A — квадратна матриця над деяким полем P. Матриця A подібна нормальній формі Жордана

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Тому канонічним виглядом характеристичної матриці $J - \lambda E$ є матриця

$$\begin{pmatrix} 1 &&&&&& \\ & 1 &&&&& \\ && \ddots &&&& \\ &&& 1 &&& \\ &&&& (\lambda-2)(\lambda-5) && \\ &&&&& (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^2 & \\ &&&&&& (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^3 \end{pmatrix}.$$

Із вище проведених міркувань слідують також наступні теореми.

Теорема 2

Якщо деяка квадратна матриця A над деяким полем P подібна нормальній формі Жордана, то ця нормальна форма Жордана визначається матрицею A однозначно з точністю до розміщення кліток Жордана на головній діагоналі.

Теорема 3

Нехай A — квадратна матриця над деяким полем P. Матриця A подібна нормальній формі Жордана тоді і тільки тоді,

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Тому канонічним виглядом характеристичної матриці $J-\lambda E$ є матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & (\lambda-2)(\lambda-5) & & \\ & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^2 & \\ & & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^3 \end{pmatrix}.$$

Із вище проведених міркувань слідують також наступні теореми.

Теорема 2

Якщо деяка квадратна матриця A над деяким полем P подібна нормальній формі Жордана, то ця нормальна форма Жордана визначається матрицею A однозначно з точністю до розміщення кліток Жордана на головній діагоналі.

Теорема 3

Нехай A — квадратна матриця над деяким полем P. Матриця A подібна нормальній формі Жордана тоді і тільки тоді, коли характеристичний многочлен матриці A

Приклад знаходження канонічного вигляду нормальної форми Жордана

Тому канонічним виглядом характеристичної матриці $J-\lambda E$ є матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & (\lambda-2)(\lambda-5) & & \\ & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^2 & \\ & & & & & & (\lambda-1)(\lambda-2)^2(\lambda-5)^3 \end{pmatrix}.$$

Із вище проведених міркувань слідують також наступні теореми.

Теорема 2

Якщо деяка квадратна матриця A над деяким полем P подібна нормальній формі Жордана, то ця нормальна форма Жордана визначається матрицею A однозначно з точністю до розміщення кліток Жордана на головній діагоналі.

Теорема 3

Нехай A — квадратна матриця над деяким полем P. Матриця A подібна нормальній формі Жордана тоді і тільки тоді, коли характеристичний многочлен матриці A розкладається на лінійні множники над полем P.

Теорема 4

Нехай A і B — квадратні матриці над деяким полем P, характеристичні многочлени яких

Теорема 4

Нехай A і B — квадратні матриці над деяким полем P, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем P.

Теорема 4

Нехай A *і* B *— квадратні матриці над деяким полем* P*, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем* P*. Матриця* B *подібна матриці* A

Теорема 4

Нехай A і B — квадратні матриці над деяким полем P, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді,

Теорема 4

Нехай A *і* B *— квадратні матриці над деяким полем* P*, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем* P*. Матриця* B *подібна матриці* A *тоді і тільки тоді, коли вони подібні одній і тій ж нормальній формі Жордана.*

Теорема 4

Нехай A і B — квадратні матриці над деяким полем P, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли вони подібні одній і тій ж нормальній формі Жордана.

Алгоритм знаходження нормальної форми Жордна матриці.

Теорема 4

Нехай A і B — квадратні матриці над деяким полем P, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли вони подібні одній і тій ж нормальній формі Жордана.

Алгоритм знаходження нормальної форми Жордна матриці.

Нехай A — квадратна матриця над полем P.

Теорема 4

Нехай A і B — квадратні матриці над деяким полем P, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли вони подібні одній і тій ж нормальній формі Жордана.

Алгоритм знаходження нормальної форми Жордна матриці.

Нехай A — квадратна матриця над полем P. Щоб знайти нормальну форму Жордана матриці A:

Теорема 4

Нехай A і B — квадратні матриці над деяким полем P, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли вони подібні одній і тій ж нормальній формі Жордана.

Алгоритм знаходження нормальної форми Жордна матриці.

Нехай A — квадратна матриця над полем P. Щоб знайти нормальну форму Жордана матриці A:

- знайдемо канонічний вигляд характеристичної λ-матриці $A - \lambda E$;

Теорема 4

Нехай A і B — квадратні матриці над деяким полем P, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли вони подібні одній і тій ж нормальній формі Жордана.

Алгоритм знаходження нормальної форми Жордна матриці.

Нехай A — квадратна матриця над полем P. Щоб знайти нормальну форму Жордана матриці A:

- знайдемо канонічний вигляд характеристичної λ-матриці $A - \lambda E$;
- нехай $e_1(\lambda), \ldots, e_q(\lambda)$

Теорема 4

Нехай A і B — квадратні матриці над деяким полем P, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли вони подібні одній і тій ж нормальній формі Жордана.

Алгоритм знаходження нормальної форми Жордна матриці.

Нехай A — квадратна матриця над полем P. Щоб знайти нормальну форму Жордана матриці A:

- знайдемо канонічний вигляд характеристичної λ-матриці $A - \lambda E$;
- нехай $e_1(\lambda), \ldots, e_q(\lambda)$ — всі відмінні від одиниці, інваріантні множники λ-матриці $A - \lambda E$.

Теорема 4

Нехай A і B — квадратні матриці над деяким полем P, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли вони подібні одній і тій ж нормальній формі Жордана.

Алгоритм знаходження нормальної форми Жордна матриці.

Нехай A — квадратна матриця над полем P. Щоб знайти нормальну форму Жордана матриці A:

- знайдемо канонічний вигляд характеристичної λ-матриці $A - \lambda E$;
- нехай $e_1(\lambda), \ldots, e_q(\lambda)$ — всі відмінні від одиниці, інваріантні множники λ-матриці $A - \lambda E$. Для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$

Теорема 4

Нехай A і B — квадратні матриці над деяким полем P, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли вони подібні одній і тій ж нормальній формі Жордана.

Алгоритм знаходження нормальної форми Жордна матриці.

Нехай A — квадратна матриця над полем P. Щоб знайти нормальну форму Жордана матриці A:

- знайдемо канонічний вигляд характеристичної λ-матриці $A - \lambda E$;
- нехай $e_1(\lambda), \ldots, e_q(\lambda)$ — всі відмінні від одиниці, інваріантні множники λ-матриці $A - \lambda E$. Для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$ розкладемо,

Теорема 4

Нехай A і B — квадратні матриці над деяким полем P, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли вони подібні одній і тій ж нормальній формі Жордана.

Алгоритм знаходження нормальної форми Жордна матриці.

Нехай A — квадратна матриця над полем P. Щоб знайти нормальну форму Жордана матриці A:

- знайдемо канонічний вигляд характеристичної λ-матриці $A - \lambda E$;
- нехай $e_1(\lambda), \dots, e_q(\lambda)$ — всі відмінні від одиниці, інваріантні множники λ-матриці $A - \lambda E$. Для кожного $i \in \{1, 2, \dots, q\}$ розкладемо, якщо це можливо, інваріантний множник $e_i(\lambda)$

Теорема 4

Нехай A і B — квадратні матриці над деяким полем P, характеристичні многочлени яких розкладаються на лінійні множники над полем P. Матриця B подібна матриці A тоді і тільки тоді, коли вони подібні одній і тій ж нормальній формі Жордана.

Алгоритм знаходження нормальної форми Жордна матриці.

Нехай A — квадратна матриця над полем P. Щоб знайти нормальну форму Жордана матриці A:

- знайдемо канонічний вигляд характеристичної λ-матриці $A - \lambda E$;
- нехай $e_1(\lambda), \ldots, e_q(\lambda)$ — всі відмінні від одиниці, інваріантні множники λ-матриці $A - \lambda E$. Для кожного $i \in \{1, 2, \ldots, q\}$ розкладемо, якщо це можливо, інваріантний множник $e_i(\lambda)$ у добуток лінійних многочленів

$$e_i(\lambda) = (\lambda - \alpha_{i1})^{n_{i1}} (\lambda - \alpha_{i2})^{n_{i2}} \cdots (\lambda - \alpha_{ir_i})^{n_{ir_i}};$$

- блочно-діагональна матриця, на діагоналі якої знаходяться клітки Жордана $J_{n_{11}}(\alpha_{11}), \ldots, J_{n_{1r_1}}(\alpha_{1r_1}), \ldots, J_{n_{qr_q}}(\alpha_{qr_q})$ є шуканою нормальною формою Жордана.