Ізометрія евклідових просторів. Ортогональне доповнення

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

17 квітня 2023 року

Означення 1

Нехай L і L' — евклідові простори,

Означення 1

Нехай L і L' — евклідові простори, які є ізоморфними, як лінійні простори над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел

Означення 1

Нехай L і L' — евклідові простори, які є ізоморфними, як лінійні простори над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел Ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів L і L' над полем $\mathbb{R}$

Означення 1

Нехай L і L' — евклідові простори, які є ізоморфними, як лінійні простори над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел Ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів L і L' над полем $\mathbb{R}$ називається ізометрією

Означення 1

Нехай L і L' — евклідові простори, які є ізоморфними, як лінійні простори над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел Ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів L і L' над полем $\mathbb{R}$ називається ізометрією евклідових просторів L і L',

Означення 1

Нехай L і L' — евклідові простори, які є ізоморфними, як лінійні простори над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел Ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів L і L' над полем $\mathbb{R}$ називається ізометрією евклідових просторів L і L', якщо

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

Означення 1

Нехай L і L' — евклідові простори, які є ізоморфними, як лінійні простори над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел Ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів L і L' над полем $\mathbb{R}$ називається ізометрією евклідових просторів L і L', якщо

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

для будь-яких векторів x, $y \in L$.

Означення 1

Нехай L і L' — евклідові простори, які є ізоморфними, як лінійні простори над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел Ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів L і L' над полем $\mathbb{R}$ називається ізометрією евклідових просторів L і L', якщо

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

для будь-яких векторів x, $y \in L$.

Означення 2

Евклідів простір L називається ізометричним евклідовому простору L',

Означення 1

Нехай L і L' — евклідові простори, які є ізоморфними, як лінійні простори над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел Ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів L і L' над полем $\mathbb{R}$ називається ізометрією евклідових просторів L і L', якщо

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

для будь-яких векторів x, $y \in L$.

Означення 2

Евклідів простір L називається ізометричним евклідовому простору L', якщо існує ізометрія евклідових просторів L і L'.

Означення 1

Нехай L і L' — евклідові простори, які є ізоморфними, як лінійні простори над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел Ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів L і L' над полем $\mathbb{R}$ називається ізометрією евклідових просторів L і L', якщо

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

для будь-яких векторів x, $y \in L$.

Означення 2

Евклідів простір L називається ізометричним евклідовому простору L', якщо існує ізометрія евклідових просторів L і L'.

Теорема 1 (класифікаційна теорема)

Нехай L і L' — скінченновимірні евклідові простори.

Означення 1

Нехай L і L' — евклідові простори, які є ізоморфними, як лінійні простори над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел Ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів L і L' над полем $\mathbb{R}$ називається ізометрією евклідових просторів L і L', якщо

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

для будь-яких векторів x, $y \in L$.

Означення 2

Евклідів простір L називається ізометричним евклідовому простору L', якщо існує ізометрія евклідових просторів L і L'.

Теорема 1 (класифікаційна теорема)

Нехай L і L' — скінченновимірні евклідові простори. Евклідів простір L є ізометричним евклідовому простору L' тоді і тільки тоді, коли

Означення 1

Нехай L і L' — евклідові простори, які є ізоморфними, як лінійні простори над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел Ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів L і L' над полем $\mathbb{R}$ називається ізометрією евклідових просторів L і L', якщо

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

для будь-яких векторів x, $y \in L$.

Означення 2

Евклідів простір L називається ізометричним евклідовому простору L', якщо існує ізометрія евклідових просторів L і L'.

Теорема 1 (класифікаційна теорема)

Нехай L і L' — скінченновимірні евклідові простори. Евклідів простір L є ізометричним евклідовому простору L' тоді і тільки тоді, коли розмірність евклідового простору L дорівнює розмірності евклідового простору L'.

Означення 1

Нехай L і L' — евклідові простори, які є ізоморфними, як лінійні простори над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел Ізоморфізм $\varphi : L \to L'$ лінійних просторів L і L' над полем $\mathbb{R}$ називається ізометрією евклідових просторів L і L', якщо

$$\langle \varphi(x), \varphi(y) \rangle = \langle x, y \rangle$$

для будь-яких векторів x, $y \in L$.

Означення 2

Евклідів простір L називається ізометричним евклідовому простору L', якщо існує ізометрія евклідових просторів L і L'.

Теорема 1 (класифікаційна теорема)

Нехай L і L' — скінченновимірні евклідові простори. Евклідів простір L є ізометричним евклідовому простору L' тоді і тільки тоді, коли розмірність евклідового простору L дорівнює розмірності евклідового простору L'.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним).

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така, що кожному вектору x із L ставить у відповідність вектор x',

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така, що кожному вектору x із L ставить у відповідність вектор x', координатний рядок якого у базисі $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ евклідового простору L'

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така, що кожному вектору x із L ставить у відповідність вектор x', координатний рядок якого у базисі $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ евклідового простору L' співпадає з координатним рядком вектора x у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a_1', a_2', \ldots, a_n'$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така, що кожному вектору x із L ставить у відповідність вектор x', координатний рядок якого у базисі $a_1', a_2', \ldots, a_n'$ евклідового простору L' співпадає з координатним рядком вектора x у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L є ізоморфізмом лінійних просторів L і L'.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така, що кожному вектору x із L ставить у відповідність вектор x', координатний рядок якого у базисі $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ евклідового простору L' співпадає з координатним рядком вектора x у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L є ізоморфізмом лінійних просторів L і L'. Доведемо, що цей ізоморфізм є ізометрією.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така, що кожному вектору x із L ставить у відповідність вектор x', координатний рядок якого у базисі $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ евклідового простору L' співпадає з координатним рядком вектора x у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L є ізоморфізмом лінійних просторів L і L'. Доведемо, що цей ізоморфізм є ізометрією. Нехай b і c — будь-які вектори евклідового простору L,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така, що кожному вектору x із L ставить у відповідність вектор x', координатний рядок якого у базисі $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ евклідового простору L' співпадає з координатним рядком вектора x у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L є ізоморфізмом лінійних просторів L і L'. Доведемо, що цей ізоморфізм є ізометрією. Нехай b і c — будь-які вектори евклідового простору L, а $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така, що кожному вектору x із L ставить у відповідність вектор x', координатний рядок якого у базисі $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ евклідового простору L' співпадає з координатним рядком вектора x у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L є ізоморфізмом лінійних просторів L і L'. Доведемо, що цей ізоморфізм є ізометрією. Нехай b і c — будь-які вектори евклідового простору L, а $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ та $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така, що кожному вектору x із L ставить у відповідність вектор x', координатний рядок якого у базисі $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ евклідового простору L' співпадає з координатним рядком вектора x у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L є ізоморфізмом лінійних просторів L і L'. Доведемо, що цей ізоморфізм є ізометрією. Нехай b і c — будь-які вектори евклідового простору L, а $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ та $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — відповідно їх координатні рядки

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a_1', a_2', \ldots, a_n'$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така, що кожному вектору x із L ставить у відповідність вектор x', координатний рядок якого у базисі a_1', a_2', $\ldots$, a_n' евклідового простору L' співпадає з координатним рядком вектора x у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L є ізоморфізмом лінійних просторів L і L'. Доведемо, що цей ізоморфізм є ізометрією. Нехай b і c — будь-які вектори евклідового простору L, а $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ та $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — відповідно їх координатні рядки у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n евклідового простору L.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така, що кожному вектору x із L ставить у відповідність вектор x', координатний рядок якого у базисі $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ евклідового простору L' співпадає з координатним рядком вектора x у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L є ізоморфізмом лінійних просторів L і L'. Доведемо, що цей ізоморфізм є ізометрією. Нехай b і c — будь-які вектори евклідового простору L, а $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ та $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — відповідно їх координатні рядки у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Оскільки цей базис ортонормований,

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми. Якщо евклідів простір L є є ізометричним евклідовому простору L', то лінійний простір L є ізоморфним лінійному простору L' над полем $\mathbb{R}$. А тому $\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L'$. Навпаки нехай

$$\dim_{\mathbb{R}} L = \dim_{\mathbb{R}} L' = n$$

для деякого натурального числа n (доведення у випадку $n = 0$ є очевидним). За теоремою про існування ортонормованого базису у скінченновимірному лінійному просторі в евклідових просторах L і L' можна вибрати ортонормовані базиси відповідно $a_1, a_2, \ldots, a_n$ та $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Аналогічно доведенню класифікаційної теореми скінченновимірних лінійних просторів можна показати, що відповідність φ із L в L' така, що кожному вектору x із L ставить у відповідність вектор x', координатний рядок якого у базисі $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$ евклідового простору L' співпадає з координатним рядком вектора x у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L є ізоморфізмом лінійних просторів L і L'. Доведемо, що цей ізоморфізм є ізометрією. Нехай b і c — будь-які вектори евклідового простору L, а $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ та $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ — відповідно їх координатні рядки у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Оскільки цей базис ортонормований, то

$$\langle b, c \rangle = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \cdots + \beta_n\gamma_n.$$

Доведення.

Через те, що

$$\varphi(b) = \beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \cdots + \beta_n a'_n,$$

Доведення.

Через те, що

$$\varphi(b) = \beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \cdots + \beta_n a'_n,$$

$$\varphi(c) = \gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_n a'_n$$

Доведення.

Через те, що

$$\varphi(b) = \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \dots + \beta_n a_n',$$

$$\varphi(c) = \gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \dots + \gamma_n a_n'$$

і базис a_1', a_2', ..., a_n' евклідового простору L' теж є ортонормованим,

Доведення.

Через те, що

$$\varphi(b) = \beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \cdots + \beta_n a'_n,$$

$$\varphi(c) = \gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_n a'_n$$

і базис a'_1, a'_2, $\ldots$, a'_n евклідового простору L' теж є ортонормованим, то

$$\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \cdots + \beta_n\gamma_n.$$

Доведення.

Через те, що

$$\varphi(b) = \beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \cdots + \beta_n a'_n,$$

$$\varphi(c) = \gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_n a'_n$$

і базис a'_1, a'_2, ..., a'_n евклідового простору L' теж є ортонормованим, то

$$\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \beta_1 \gamma_1 + \beta_2 \gamma_2 + \cdots + \beta_n \gamma_n.$$

Отже,

$$\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, c \rangle$$

для довільних векторів b, c із L.

Доведення.

Через те, що

$$\varphi(b) = \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n',$$

$$\varphi(c) = \gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_n a_n'$$

і базис a_1', a_2', ..., a_n' евклідового простору L' теж є ортонормованим, то

$$\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \cdots + \beta_n\gamma_n.$$

Отже,

$$\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, c \rangle$$

для довільних векторів b, c із L. За означенням φ є ізометрією евклідових просторів L і L'.

Доведення.

Через те, що

$$\varphi(b) = \beta_1 a_1' + \beta_2 a_2' + \cdots + \beta_n a_n',$$

$$\varphi(c) = \gamma_1 a_1' + \gamma_2 a_2' + \cdots + \gamma_n a_n'$$

і базис a_1', a_2', ..., a_n' евклідового простору L' теж є ортонормованим, то

$$\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \cdots + \beta_n\gamma_n.$$

Отже,

$$\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, c \rangle$$

для довільних векторів b, c із L. За означенням φ є ізометрією евклідових просторів L і L'. Таким чином евклідів простір L ізометричний евклідовому простору L'.

Доведення.

Через те, що

$$\varphi(b) = \beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \cdots + \beta_n a'_n,$$

$$\varphi(c) = \gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_n a'_n$$

і базис a'_1, a'_2, ..., a'_n евклідового простору L' теж є ортонормованим, то

$$\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \cdots + \beta_n\gamma_n.$$

Отже,

$$\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, c \rangle$$

для довільних векторів b, c із L. За означенням φ є ізометрією евклідових просторів L і L'. Таким чином евклідів простір L ізометричний евклідовому простору L'. Теорема доведена. □

Наслідок 1

Будь-який скінченновимірний евклідів простір розмірності n

Доведення.

Через те, що

$$\varphi(b) = \beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \cdots + \beta_n a'_n,$$

$$\varphi(c) = \gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_n a'_n$$

і базис a'_1, a'_2, ..., a'_n евклідового простору L' теж є ортонормованим, то

$$\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \cdots + \beta_n\gamma_n.$$

Отже,

$$\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, c \rangle$$

для довільних векторів b, c із L. За означенням φ є ізометрією евклідових просторів L і L'. Таким чином евклідів простір L ізометричний евклідовому простору L'. Теорема доведена. □

Наслідок 1

Будь-який скінченновимірний евклідів простір розмірності n ізометричний n-вимірному евклідовому простору $\mathbb{R}^n$.

Доведення.

Через те, що

$$\varphi(b) = \beta_1 a'_1 + \beta_2 a'_2 + \cdots + \beta_n a'_n,$$

$$\varphi(c) = \gamma_1 a'_1 + \gamma_2 a'_2 + \cdots + \gamma_n a'_n$$

і базис a'_1, a'_2, ..., a'_n евклідового простору L' теж є ортонормованим, то

$$\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \cdots + \beta_n\gamma_n.$$

Отже,

$$\langle \varphi(b), \varphi(c) \rangle = \langle b, c \rangle$$

для довільних векторів b, c із L. За означенням φ є ізометрією евклідових просторів L і L'. Таким чином евклідів простір L ізометричний евклідовому простору L'. Теорема доведена. $\square$

Наслідок 1

Будь-який скінченновимірний евклідів простір розмірності n ізометричний n-вимірному евклідовому простору $\mathbb{R}^n$. Якщо $n \neq m$, то n-вимірний евклідів простір $\mathbb{R}^n$ не ізометричний m-вимірному евклідовому простору $\mathbb{R}^m$.

Означення 3

Нехай A — непорожня підмножина векторів евклідового простору L.

Означення 3

Нехай A — непорожня підмножина векторів евклідового простору L. Позначимо через $A^{\perp}$

Означення 3

Нехай A — непорожня підмножина векторів евклідового простору L. Позначимо через $A^{\perp}$ множину всіх таких векторів $x \in L$,

Означення 3

Нехай A — непорожня підмножина векторів евклідового простору L. Позначимо через $A^{\perp}$множину всіх таких векторів $x \in L$, що ортогональні до кожного вектора множини A.

Означення 3

Нехай A — непорожня підмножина векторів евклідового простору L. Позначимо через $A^{\perp}$множину всіх таких векторів $x \in L$, що ортогональні до кожного вектора множини A. Множина $A^{\perp}$ називається ортогональним доповненням множини A.

Означення 3

Нехай A — непорожня підмножина векторів евклідового простору L. Позначимо через $A^{\perp}$ множину всіх таких векторів $x \in L$, що ортогональні до кожного вектора множини A. Множина $A^{\perp}$ називається **ортогональним доповненням** множини A.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай A, B — підпростори евклідового простору L.

Означення 3

Нехай A — непорожня підмножина векторів евклідового простору L. Позначимо через $A^{\perp}$множину всіх таких векторів $x \in L$, що ортогональні до кожного вектора множини A. Множина $A^{\perp}$ називається ортогональним доповненням множини A.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай A, B — підпростори евклідового простору L. Тоді

1. ортогональне доповнення $A^{\perp}$ підпростору A є лінійним підпростором в L;

Означення 3

Нехай A — непорожня підмножина векторів евклідового простору L. Позначимо через $A^{\perp}$множину всіх таких векторів $x \in L$, що ортогональні до кожного вектора множини A. Множина $A^{\perp}$ називається ортогональним доповненням множини A.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай A, B — підпростори евклідового простору L. Тоді

1. ортогональне доповнення $A^{\perp}$ підпростору A є лінійним підпростором в L;
2. $(A^{\perp})^{\perp} = A$;

Означення 3

Нехай A — непорожня підмножина векторів евклідового простору L. Позначимо через $A^{\perp}$множину всіх таких векторів $x \in L$, що ортогональні до кожного вектора множини A. Множина $A^{\perp}$ називається ортогональним доповненням множини A.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай A, B — підпростори евклідового простору L. Тоді

1. ортогональне доповнення $A^{\perp}$ підпростору A є лінійним підпростором в L;
2. $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$;
3. $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$;

Означення 3

Нехай A — непорожня підмножина векторів евклідового простору L. Позначимо через $A^{\perp}$множину всіх таких векторів $x \in L$, що ортогональні до кожного вектора множини A. Множина $A^{\perp}$ називається ортогональним доповненням множини A.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай A, B — підпростори евклідового простору L. Тоді

1. ортогональне доповнення $A^{\perp}$ підпростору A є лінійним підпростором в L;
2. $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$;
3. $(A+B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$;
4. $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$;

Означення 3

Нехай A — непорожня підмножина векторів евклідового простору L. Позначимо через $A^{\perp}$множину всіх таких векторів $x \in L$, що ортогональні до кожного вектора множини A. Множина $A^{\perp}$ називається ортогональним доповненням множини A.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай A, B — підпростори евклідового простору L. Тоді

1. ортогональне доповнення $A^{\perp}$ підпростору A є лінійним підпростором в L;
2. $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$;
3. $(A+B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$;
4. $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$;
5. $\{\bar{0}\}^{\perp} = L$;

Означення 3

Нехай A — непорожня підмножина векторів евклідового простору L. Позначимо через $A^{\perp}$множину всіх таких векторів $x \in L$, що ортогональні до кожного вектора множини A. Множина $A^{\perp}$ називається ортогональним доповненням множини A.

Завдання для самостійної роботи.

Нехай A, B — підпростори евклідового простору L. Тоді

1. ортогональне доповнення $A^{\perp}$ підпростору A є лінійним підпростором в L;
2. $\left(A^{\perp}\right)^{\perp} = A$;
3. $(A + B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$;
4. $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$;
5. $\{\bar{0}\}^{\perp} = L$;
6. $L^{\perp} = \{\bar{0}\}$.

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A *— підпростір скінченновимірного евклідового простору* L.

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — *підпростір скінченновимірного евклідового простору* L*. Тоді евклідів простір* L *є прямою сумою підпростору* A *і ортогонального доповнення* $A^{\perp}$,

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A *— підпростір скінченновимірного евклідового простору* L*. Тоді евклідів простір* L *є прямою сумою підпростору* A *і ортогонального доповнення* $A^{\perp}$*, тобто* $L = A \oplus A^{\perp}$*.*

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L.

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$.

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$.

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp},$$

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^\perp$, тобто $L = A \oplus A^\perp$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^\perp = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^\perp = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^\perp, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^\perp.$$

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp}, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^{\perp}.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp}, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^{\perp}.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$.

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp}, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^{\perp}.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$.

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^\perp$, тобто $L = A \oplus A^\perp$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^\perp = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^\perp = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^\perp, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^\perp.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональний базис підпростору A.

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^\perp$, тобто $L = A \oplus A^\perp$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^\perp = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^\perp = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^\perp, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^\perp.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональний базис підпростору A. За доведеним раніше такий базис існує.

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp}, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^{\perp}.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональний базис підпростору A. За доведеним раніше такий базис існує. Оскільки $A \neq L$,

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp}, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^{\perp}.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональний базис підпростору A. За доведеним раніше такий базис існує. Оскільки $A \neq L$, то існує вектор $b \in L$,

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp}, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^{\perp}.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональний базис підпростору A. За доведеним раніше такий базис існує. Оскільки $A \neq L$, то існує вектор $b \in L$, що $b \notin A$.

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp}, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^{\perp}.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональний базис підпростору A. За доведеним раніше такий базис існує. Оскільки $A \neq L$, то існує вектор $b \in L$, що $b \notin A$. Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ є лінійно незалежною,

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^\perp$, тобто $L = A \oplus A^\perp$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^\perp = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^\perp = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^\perp, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^\perp.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональний базис підпростору A. За доведеним раніше такий базис існує. Оскільки $A \neq L$, то існує вектор $b \in L$, що $b \notin A$. Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ є лінійно незалежною, бо у протилежному випадку одержали б, що вектор b є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$.

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp}, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^{\perp}.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональний базис підпростору A. За доведеним раніше такий базис існує. Оскільки $A \neq L$, то існує вектор $b \in L$, що $b \notin A$. Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ є лінійно незалежною, бо у протилежному випадку одержали б, що вектор b є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Останнє суперечило б тому, що $b \notin A$.

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp}, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^{\perp}.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональний базис підпростору A. За доведеним раніше такий базис існує. Оскільки $A \neq L$, то існує вектор $b \in L$, що $b \notin A$. Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ є лінійно незалежною, бо у протилежному випадку одержали б, що вектор b є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Останнє суперечило б тому, що $b \notin A$.
Проортогоналізуємо систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ методом Ґрама-Шмідта.

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp}, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^{\perp}.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональний базис підпростору A. За доведеним раніше такий базис існує. Оскільки $A \neq L$, то існує вектор $b \in L$, що $b \notin A$. Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ є лінійно незалежною, бо у протилежному випадку одержали б, що вектор b є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Останнє суперечило б тому, що $b \notin A$. Проортогоналізуємо систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ методом Ґрама-Шмідта. Оскільки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональна система векторів,

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp}, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^{\perp}.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональний базис підпростору A. За доведеним раніше такий базис існує. Оскільки $A \neq L$, то існує вектор $b \in L$, що $b \notin A$. Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ є лінійно незалежною, бо у протилежному випадку одержали б, що вектор b є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Останнє суперечило б тому, що $b \notin A$. Проортогоналізуємо систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ методом Ґрама-Шмідта. Оскільки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональна система векторів, то у результаті ортогоналізації одержимо ортогональну систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, c$

Теорема 2 (про ортогональний розклад)

Нехай A — підпростір скінченновимірного евклідового простору L. Тоді евклідів простір L є прямою сумою підпростору A і ортогонального доповнення $A^{\perp}$, тобто $L = A \oplus A^{\perp}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідів простір розмірності n і A — підпростір L. Якщо $A = \{\bar{0}\}$, то $A^{\perp} = L$. Якщо ж $A = L$, то $A^{\perp} = \{\bar{0}\}$. Тому твердження теореми є очевидним у обох цих випадках:

$$L = \{\bar{0}\} \oplus L = \{\bar{0}\} \oplus \{\bar{0}\}^{\perp}, \qquad L = L \oplus \{\bar{0}\} = L \oplus L^{\perp}.$$

Нехай A — нетривіальний підпростір евклідового простору L і $\dim_{\mathbb{R}} A = k$. Тоді $k \in \mathbb{N}$ і $k < n$. Нехай $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональний базис підпростору A. За доведеним раніше такий базис існує. Оскільки $A \neq L$, то існує вектор $b \in L$, що $b \notin A$. Система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ є лінійно незалежною, бо у протилежному випадку одержали б, що вектор b є лінійною комбінацією системи векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Останнє суперечило б тому, що $b \notin A$. Проортогоналізуємо систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, b$ методом Ґрама-Шмідта. Оскільки $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — ортогональна система векторів, то у результаті ортогоналізації одержимо ортогональну систему векторів $a_1, a_2, \ldots, a_k, c$ де c — деякий вектор евклідового простору L, що не належить A.

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c.

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c \rangle =$$

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle$$

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \cdots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle$$

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \cdots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0$$

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, …, α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1 \langle a_1, c\rangle + \alpha_2 \langle a_2, c\rangle + \dots + \alpha_k \langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \cdots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

Це означає, що $c \in A^{\perp}$,

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \cdots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

Це означає, що $c \in A^{\perp}$, а тому $A^{\perp} \neq \{0\}$.

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \cdots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

Це означає, що $c \in A^{\perp}$, а тому $A^{\perp} \neq \{0\}$. Через те що $A^{\perp}$ є ненульовим підпростором евклідового простору L

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \cdots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

Це означає, що $c \in A^\perp$, а тому $A^\perp \neq \{0\}$. Через те що $A^\perp$ є ненульовим підпростором евклідового простору L у ньому існує ортогональний базис c_1, c_2, ..., c_l.

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \cdots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

Це означає, що $c \in A^{\perp}$, а тому $A^{\perp} \neq \{0\}$. Через те що $A^{\perp}$ є ненульовим підпростором евклідового простору L у ньому існує ортогональний базис c_1, c_2, ..., c_l. Покажемо, що система векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l$$

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \cdots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

Це означає, що $c \in A^\perp$, а тому $A^\perp \neq \{0\}$. Через те що $A^\perp$ є ненульовим підпростором евклідового простору L у ньому існує ортогональний базис c_1, c_2, ..., c_l. Покажемо, що система векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l \tag{1}$$

є базисом евклідового простору L.

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \cdots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

Це означає, що $c \in A^{\perp}$, а тому $A^{\perp} \neq \{0\}$. Через те що $A^{\perp}$ є ненульовим підпростором евклідового простору L у ньому існує ортогональний базис c_1, c_2, ..., c_l. Покажемо, що система векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l \qquad (1)$$

є базисом евклідового простору L. Очевидно це ортогональна,

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \cdots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

Це означає, що $c \in A^{\perp}$, а тому $A^{\perp} \neq \{0\}$. Через те що $A^{\perp}$ є ненульовим підпростором евклідового простору L у ньому існує ортогональний базис c_1, c_2, ..., c_l. Покажемо, що система векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l \tag{1}$$

є базисом евклідового простору L. Очевидно це ортогональна, а тому лінійно незалежна,

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \dots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

Це означає, що $c \in A^{\perp}$, а тому $A^{\perp} \neq \{0\}$. Через те що $A^{\perp}$ є ненульовим підпростором евклідового простору L у ньому існує ортогональний базис c_1, c_2, ..., c_l. Покажемо, що система векторів

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_l \tag{1}$$

є базисом евклідового простору L. Очевидно це ортогональна, а тому лінійно незалежна, система векторів.

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \dots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \dots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

Це означає, що $c \in A^{\perp}$, а тому $A^{\perp} \neq \{0\}$. Через те що $A^{\perp}$ є ненульовим підпростором евклідового простору L у ньому існує ортогональний базис c_1, c_2, ..., c_l. Покажемо, що система векторів

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_l \tag{1}$$

є базисом евклідового простору L. Очевидно це ортогональна, а тому лінійно незалежна, система векторів. Якщо деякий вектор d евклідового простору L не є лінійною комбінацією системи векторів (1),

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, $\ldots$, α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \cdots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

Це означає, що $c \in A^\perp$, а тому $A^\perp \neq \{0\}$. Через те що $A^\perp$ є ненульовим підпростором евклідового простору L у ньому існує ортогональний базис c_1, c_2, $\ldots$, c_l. Покажемо, що система векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l \qquad (1)$$

є базисом евклідового простору L. Очевидно це ортогональна, а тому лінійно незалежна, система векторів. Якщо деякий вектор d евклідового простору L не є лінійною комбінацією системи векторів (1), то система векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ d$$

Доведення.

Будь-який вектор a підпростору A є ортогональним вектору c. Бо

$$a = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, ..., α_k і

$$\langle a, c\rangle = \langle \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k, c\rangle =$$

$$= \alpha_1\langle a_1, c\rangle + \alpha_2\langle a_2, c\rangle + \cdots + \alpha_k\langle a_k, c\rangle = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 + \cdots + \alpha_k \cdot 0 = 0.$$

Це означає, що $c \in A^{\perp}$, а тому $A^{\perp} \neq \{0\}$. Через те що $A^{\perp}$ є ненульовим підпростором евклідового простору L у ньому існує ортогональний базис c_1, c_2, ..., c_l. Покажемо, що система векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l \tag{1}$$

є базисом евклідового простору L. Очевидно це ортогональна, а тому лінійно незалежна, система векторів. Якщо деякий вектор d евклідового простору L не є лінійною комбінацією системи векторів (1), то система векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ d \tag{2}$$

є лінійно незалежною.

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2),

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_l,\ e,$$

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L.

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \qquad (3)$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^{\perp}$,

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^{\perp}$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^{\perp}$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ підпростору A.

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^\perp$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ підпростору A. А з іншого $e \notin A^\perp$,

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^{\perp}$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ підпростору A. А з іншого $e \notin A^{\perp}$, бо підсистема $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e$ лінійно незалежної векторів (3)

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^\perp$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ підпростору A. А з іншого $e \notin A^\perp$, бо підсистема $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e$ лінійно незалежної векторів (3) є також лінійно незалежною системою векторів.

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^\perp$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ підпростору A. А з іншого $e \notin A^\perp$, бо підсистема $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e$ лінійно незалежної векторів (3) є також лінійно незалежною системою векторів. Через це вектор e не є лінійною комбінацією системи векторів $c_1,\ c_2,\ \ldots,$ $c_l,$

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^{\perp}$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису a_1, a_2, $\ldots$, a_k підпростору A. А з іншого $e \notin A^{\perp}$, бо підсистема c_1, c_2, $\ldots$, c_l, e лінійно незалежної векторів (3) є також лінійно незалежною системою векторів. Через це вектор e не є лінійною комбінацією системи векторів c_1, c_2, $\ldots$, c_l, яка є базисом $A^{\perp}$.

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^{\perp}$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ підпростору A. А з іншого $e \notin A^{\perp}$, бо підсистема $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e$ лінійно незалежної векторів (3) є також лінійно незалежною системою векторів. Через це вектор e не є лінійною комбінацією системи векторів $c_1,\ c_2,\ \ldots,$ c_l, яка є базисом $A^{\perp}$. Одержана суперечність доводить, що кожний вектор евклідового простору L є лінійною комбінацією системи векторів (1).

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^{\perp}$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису $a_1, a_2, \ldots, a_k$ підпростору A. А з іншого $e \notin A^{\perp}$, бо підсистема $c_1, c_2, \ldots, c_l, e$ лінійно незалежної векторів (3) є також лінійно незалежною системою векторів. Через це вектор e не є лінійною комбінацією системи векторів $c_1, c_2, \ldots, c_l$, яка є базисом $A^{\perp}$. Одержана суперечність доводить, що кожний вектор евклідового простору L є лінійною комбінацією системи векторів (1).
Насамкінець, кожен вектор x евклідового простору L однозначно розкладається за базисом (1).

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^{\perp}$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ підпростору A. А з іншого $e \notin A^{\perp}$, бо підсистема $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e$ лінійно незалежної векторів (3) є також лінійно незалежною системою векторів. Через це вектор e не є лінійною комбінацією системи векторів $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l$, яка є базисом $A^{\perp}$. Одержана суперечність доводить, що кожний вектор евклідового простору L є лінійною комбінацією системи векторів (1).

Насамкінець, кожен вектор x евклідового простору L однозначно розкладається за базисом (1). Якщо x — деякий довільний вектор евклідового простору L,

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^{\perp}$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ підпростору A. А з іншого $e \notin A^{\perp}$, бо підсистема $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e$ лінійно незалежної векторів (3) є також лінійно незалежною системою векторів. Через це вектор e не є лінійною комбінацією системи векторів $c_1,\ c_2,\ \ldots,$ c_l, яка є базисом $A^{\perp}$. Одержана суперечність доводить, що кожний вектор евклідового простору L є лінійною комбінацією системи векторів (1).
Насамкінець, кожен вектор x евклідового простору L однозначно розкладається за базисом (1). Якщо x — деякий довільний вектор евклідового простору L, то

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l,$$

для деяких дійсних чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k, \gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_l$.

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^{\perp}$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису a_1, a_2, $\ldots$, a_k підпростору A. А з іншого $e \notin A^{\perp}$, бо підсистема c_1, c_2, $\ldots$, c_l, e лінійно незалежної векторів (3) є також лінійно незалежною системою векторів. Через це вектор e не є лінійною комбінацією системи векторів c_1, c_2, $\ldots$, c_l, яка є базисом $A^{\perp}$. Одержана суперечність доводить, що кожний вектор евклідового простору L є лінійною комбінацією системи векторів (1).

Насамкінець, кожен вектор x евклідового простору L однозначно розкладається за базисом (1). Якщо x — деякий довільний вектор евклідового простору L, то

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l,$$

для деяких дійсних чисел α_1, α_2, $\ldots$, α_k, γ_1, γ_2, $\ldots \gamma_l$. Тому вектор x можна представити у вигляді суми елементів із A і $A^{\perp}$,

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^{\perp}$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ підпростору A. А з іншого $e \notin A^{\perp}$, бо підсистема $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e$ лінійно незалежної векторів (3) є також лінійно незалежною системою векторів. Через це вектор e не є лінійною комбінацією системи векторів $c_1,\ c_2,\ \ldots,$ c_l, яка є базисом $A^{\perp}$. Одержана суперечність доводить, що кожний вектор евклідового простору L є лінійною комбінацією системи векторів (1).
Насамкінець, кожен вектор x евклідового простору L однозначно розкладається за базисом (1). Якщо x — деякий довільний вектор евклідового простору L, то

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l,$$

для деяких дійсних чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots \gamma_l$. Тому вектор x можна представити у вигляді суми елементів із A і $A^{\perp}$, а саме

$$x = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k) + (\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l)$$

Доведення.

Знову ж таки, проортогоналізувавши систему векторів (2), одержимо ортогональну систему ненульових векторів

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k,\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e, \tag{3}$$

де e — деякий вектор евклідового простору L. З одного боку $e \in A^{\perp}$, бо вектор e є ортогональним до кожного вектора базису $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$ підпростору A. А з іншого $e \notin A^{\perp}$, бо підсистема $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_l,\ e$ лінійно незалежної векторів (3) є також лінійно незалежною системою векторів. Через це вектор e не є лінійною комбінацією системи векторів $c_1,\ c_2,\ \ldots,$ c_l, яка є базисом $A^{\perp}$. Одержана суперечність доводить, що кожний вектор евклідового простору L є лінійною комбінацією системи векторів (1).
Насамкінець, кожен вектор x евклідового простору L однозначно розкладається за базисом (1). Якщо x — деякий довільний вектор евклідового простору L, то

$$x = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k + \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l,$$

для деяких дійсних чисел $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_k,\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots \gamma_l$. Тому вектор x можна представити у вигляді суми елементів із A і $A^{\perp}$, а саме

$$x = (\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k) + (\gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l) = u + v,$$

Доведення.

де

$$u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k \in A, \quad v = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l \in A^{\perp}.$$

Отже,

$$L = A + A^{\perp}.$$

Доведення.

де

$$u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k \in A, \quad v = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l \in A^{\perp}.$$

Отже,

$$L = A + A^{\perp}.$$

Якщо вектор a належить перетину $A \cap A^{\perp}$,

Доведення.

де

$$u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k \in A, \quad v = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l \in A^\perp.$$

Отже,

$$L = A + A^\perp.$$

Якщо вектор a належить перетину $A \cap A^\perp$, то $\langle a, a \rangle = 0$,

Доведення.

де

$$u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k \in A, \quad v = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l \in A^{\perp}.$$

Отже,

$$L = A + A^{\perp}.$$

Якщо вектор a належить перетину $A \cap A^{\perp}$, то $\langle a, a \rangle = 0$, як наслідок $a = \bar{0}$.

Доведення.

де

$$u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_k a_k \in A, \quad v = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l \in A^{\perp}.$$

Отже,

$$L = A + A^{\perp}.$$

Якщо вектор a належить перетину $A \cap A^{\perp}$, то $\langle a, a \rangle = 0$, як наслідок $a = \bar{0}$. Тому $A \cap A^{\perp} = \{\bar{0}\}$ і

$$L = A \oplus A^{\perp}.$$

Доведення.

де

$$u = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k \in A, \quad v = \gamma_1 c_1 + \gamma_2 c_2 + \ldots + \gamma_l c_l \in A^{\perp}.$$

Отже,

$$L = A + A^{\perp}.$$

Якщо вектор a належить перетину $A \cap A^{\perp}$, то $\langle a, a \rangle = 0$, як наслідок $a = \bar{0}$. Тому $A \cap A^{\perp} = \{\bar{0}\}$ і

$$L = A \oplus A^{\perp}.$$

Теорему доведено. $\square$