Симетричні матриці. Симетричні оператори

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

1 травня 2023 року

Означення 1

Матриця A порядку n

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається симетричною,

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається **симетричною**, якщо $A^T = A$.

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається симетричною, якщо $A^T = A$.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається симетричною, якщо $A^T = A$.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є симетричною матрицею,

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається симетричною, якщо $A^T = A$.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є симетричною матрицею, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається симетричною, якщо $A^T = A$.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є симетричною матрицею, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для будь-яких різних i та $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається симетричною, якщо $A^T = A$.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є симетричною матрицею, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для будь-яких різних i та $j \in \{1,$ 2, ..., $n\}$.

Приклади симетричних матриць.

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається **симетричною**, якщо $A^T = A$.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є симетричною матрицею, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для будь-яких різних i та $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Приклади симетричних матриць.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається **симетричною**, якщо $A^T = A$.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є симетричною матрицею, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для будь-яких різних i та $j \in \{1,$ 2, $\dots, n\}$.

Приклади симетричних матриць.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається **симетричною**, якщо $A^T = A$.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є симетричною матрицею, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для будь-яких різних i та $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Приклади симетричних матриць.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається **симетричною**, якщо $A^T = A$.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є симетричною матрицею, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для будь-яких різних i та $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Приклади симетричних матриць.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається **симетричною**, якщо $A^T = A$.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є симетричною матрицею, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для будь-яких різних i та $j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Приклади симетричних матриць.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається симетричною, якщо $A^T = A$.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є симетричною матрицею, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для будь-яких різних i та $j \in \{1,$ 2, . . . , $n\}$.

Приклади симетричних матриць.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається симетричною, якщо $A^T = A$.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є симетричною матрицею, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для будь-яких різних i та $j \in \{1,$ 2, . . . , $n\}$.

Приклади симетричних матриць.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Означення 1

Матриця A порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел називається симетричною, якщо $A^T = A$.

Тобто матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

є симетричною матрицею, якщо $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для будь-яких різних i та $j \in \{1,$ 2, $\dots, n\}$.

Приклади симетричних матриць.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 9 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 8 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею.

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число,

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел,

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A.

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A. Якщо A є симетричною матрицею,

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A. Якщо A є симетричною матрицею, то многочлен $f(\lambda)$ розкладається у добуток лінійних множників.

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A. Якщо A є симетричною матрицею, то многочлен $f(\lambda)$ розкладається у добуток лінійних множників. Або, що теж саме,

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A. Якщо A є симетричною матрицею, то многочлен $f(\lambda)$ розкладається у добуток лінійних множників. Або, що теж саме, всі комплексні корені многочлена $f(x)$,

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A. Якщо A є симетричною матрицею, то многочлен $f(\lambda)$ розкладається у добуток лінійних множників. Або, що теж саме, всі комплексні корені многочлена $f(x)$, розглядуваного над полем комплексних чисел,

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A. Якщо A є симетричною матрицею, то многочлен $f(\lambda)$ розкладається у добуток лінійних множників. Або, що теж саме, всі комплексні корені многочлена $f(x)$, розглядуваного над полем комплексних чисел, є дійсними числами.

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A. Якщо A є симетричною матрицею, то многочлен $f(\lambda)$ розкладається у добуток лінійних множників. Або, що теж саме, всі комплексні корені многочлена $f(x)$, розглядуваного над полем комплексних чисел, є дійсними числами.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A. Якщо A є симетричною матрицею, то многочлен $f(\lambda)$ розкладається у добуток лінійних множників. Або, що теж саме, всі комплексні корені многочлена $f(x)$, розглядуваного над полем комплексних чисел, є дійсними числами.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A. Якщо A є симетричною матрицею, то многочлен $f(\lambda)$ розкладається у добуток лінійних множників. Або, що теж саме, всі комплексні корені многочлена $f(x)$, розглядуваного над полем комплексних чисел, є дійсними числами.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$,

Теорема 1

Сума симетричних матриць порядку n є симетричною матрицею. Добуток будь-якого дійсного числа на симетричну матрицю є симетричною матрицею.

Теорема 2

Нехай n — деяке натуральне число, A — матриця порядку n над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел, а $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A. Якщо A є симетричною матрицею, то многочлен $f(\lambda)$ розкладається у добуток лінійних множників. Або, що теж саме, всі комплексні корені многочлена $f(x)$, розглядуваного над полем комплексних чисел, є дійсними числами.

Доведення.

Нехай виконуються умови теореми і

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

де $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, i, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, є симетричною матрицею.

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел.

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел.

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. За наслідком із основної теореми алгебри

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. За наслідком із основної теореми алгебри многочлен $f(\lambda)$ представляється у вигляду добутку старшого коефіцієнта $(-1)^n$

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. За наслідком із основної теореми алгебри многочлен $f(\lambda)$ представляється у вигляду добутку старшого коефіцієнта $(-1)^n$ та n лінійний множників вигляду $\lambda - \beta$,

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. За наслідком із основної теореми алгебри многочлен $f(\lambda)$ представляється у вигляду добутку старшого коефіцієнта $(-1)^n$ та n лінійний множників вигляду $\lambda - \beta$, де β — деяке комплексне число, яке є коренем многочлена $f(\lambda)$.

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. За наслідком із основної теореми алгебри многочлен $f(\lambda)$ представляється у вигляду добутку старшого коефіцієнта $(-1)^n$ та n лінійний множників вигляду $\lambda - \beta$, де β — деяке комплексне число, яке є коренем многочлена $f(\lambda)$.
Нехай β — деякий корінь характеристичного многочлена $f(\lambda)$.

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. За наслідком із основної теореми алгебри многочлен $f(\lambda)$ представляється у вигляду добутку старшого коефіцієнта $(-1)^n$ та n лінійний множників вигляду $\lambda - \beta$, де β — деяке комплексне число, яке є коренем многочлена $f(\lambda)$.

Нехай β — деякий корінь характеристичного многочлена $f(\lambda)$. Тоді

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\beta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\beta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\beta \end{vmatrix}$$

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. За наслідком із основної теореми алгебри многочлен $f(\lambda)$ представляється у вигляду добутку старшого коефіцієнта $(-1)^n$ та n лінійний множників вигляду $\lambda - \beta$, де β — деяке комплексне число, яке є коренем многочлена $f(\lambda)$.

Нехай β — деякий корінь характеристичного многочлена $f(\lambda)$. Тоді

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \beta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \beta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \beta \end{vmatrix} = f(\beta)$$

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. За наслідком із основної теореми алгебри многочлен $f(\lambda)$ представляється у вигляду добутку старшого коефіцієнта $(-1)^n$ та n лінійний множників вигляду $\lambda - \beta$, де β — деяке комплексне число, яке є коренем многочлена $f(\lambda)$.

Нехай β — деякий корінь характеристичного многочлена $f(\lambda)$. Тоді

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\beta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\beta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\beta \end{vmatrix} = f(\beta) = 0.$$

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. За наслідком із основної теореми алгебри многочлен $f(\lambda)$ представляється у вигляду добутку старшого коефіцієнта $(-1)^n$ та n лінійний множників вигляду $\lambda - \beta$, де β — деяке комплексне число, яке є коренем многочлена $f(\lambda)$.
Нехай β — деякий корінь характеристичного многочлена $f(\lambda)$. Тоді

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\beta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\beta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\beta \end{vmatrix} = f(\beta) = 0.$$

Це означає, що система лінійних однорідних рівнянь з матрицею

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. За наслідком із основної теореми алгебри многочлен $f(\lambda)$ представляється у вигляду добутку старшого коефіцієнта $(-1)^n$ та n лінійний множників вигляду $\lambda - \beta$, де β — деяке комплексне число, яке є коренем многочлена $f(\lambda)$.
Нехай β — деякий корінь характеристичного многочлена $f(\lambda)$. Тоді

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\beta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\beta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\beta \end{vmatrix} = f(\beta) = 0.$$

Це означає, що система лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\beta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\beta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\beta \end{pmatrix}$$

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. За наслідком із основної теореми алгебри многочлен $f(\lambda)$ представляється у вигляду добутку старшого коефіцієнта $(-1)^n$ та n лінійний множників вигляду $\lambda - \beta$, де β — деяке комплексне число, яке є коренем многочлена $f(\lambda)$.
Нехай β — деякий корінь характеристичного многочлена $f(\lambda)$. Тоді

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \beta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \beta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \beta \end{vmatrix} = f(\beta) = 0.$$

Це означає, що система лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - \beta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - \beta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - \beta \end{pmatrix}$$

має деякий ненульовий розв'язок $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$,

Доведення.

Характеристичний многочлен $f(\lambda)$ матриці A є многочленом над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел. Розглянемо многочлен $f(\lambda)$ над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел. За наслідком із основної теореми алгебри многочлен $f(\lambda)$ представляється у вигляду добутку старшого коефіцієнта $(-1)^n$ та n лінійний множників вигляду $\lambda - \beta$, де β — деяке комплексне число, яке є коренем многочлена $f(\lambda)$.

Нехай β — деякий корінь характеристичного многочлена $f(\lambda)$. Тоді

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-\beta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\beta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\beta \end{vmatrix} = f(\beta) = 0.$$

Це означає, що система лінійних однорідних рівнянь з матрицею

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11}-\beta & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22}-\beta & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}-\beta \end{pmatrix}$$

має деякий ненульовий розв'язок $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$, де $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \in \mathbb{C}$.

Доведення.

Тоді для довільного $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i\,i-1}\gamma_{i-1} + (\alpha_{ii} - \beta)\gamma_i + \alpha_{i\,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_n = 0.$$

Доведення.

Тоді для довільного $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i\,i-1}\gamma_{i-1} + (\alpha_{ii} - \beta)\gamma_i + \alpha_{i\,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_n = 0.$$

Звідси

$$\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n = \beta\gamma_1,$$

Доведення.

Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i\,i-1}\gamma_{i-1} + (\alpha_{ii} - \beta)\gamma_i + \alpha_{i\,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_n = 0.$$

Звідси

$$\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n = \beta\gamma_1,$$

$$\alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n = \beta\gamma_2,$$

Доведення.

Тоді для довільного $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i\,i-1}\gamma_{i-1} + (\alpha_{ii} - \beta)\gamma_i + \alpha_{i\,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_n = 0.$$

Звідси

$$\begin{gathered} \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n = \beta\gamma_1, \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n = \beta\gamma_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{nn}\gamma_n = \beta\gamma_n. \end{gathered} \tag{1}$$

Доведення.

Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i\,i-1}\gamma_{i-1} + (\alpha_{ii} - \beta)\gamma_i + \alpha_{i\,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_n = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned}
\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n &= \beta\gamma_1, \\
\alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n &= \beta\gamma_2, \\
\ldots\ldots\ldots \\
\alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{nn}\gamma_n &= \beta\gamma_n.
\end{aligned} \tag{1}$$

Помножимо першу з рівностей (1) на $\overline{\gamma_1}$,

Доведення.

Тоді для довільного $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i\,i-1}\gamma_{i-1} + (\alpha_{ii} - \beta)\gamma_i + \alpha_{i\,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_n = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n &= \beta\gamma_1, \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n &= \beta\gamma_2, \\ \cdots\cdots\cdot \\ \alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{nn}\gamma_n &= \beta\gamma_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Помножимо першу з рівностей (1) на $\overline{\gamma_1}$, другу на $\overline{\gamma_2}$

Доведення.

Тоді для довільного $i \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i\,i-1}\gamma_{i-1} + (\alpha_{ii} - \beta)\gamma_i + \alpha_{i\,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_n = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n &= \beta\gamma_1, \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n &= \beta\gamma_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{nn}\gamma_n &= \beta\gamma_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Помножимо першу з рівностей (1) на $\overline{\gamma_1}$, другу на $\overline{\gamma_2}$ і т. д.,

Доведення.

Тоді для довільного $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i\,i-1}\gamma_{i-1} + (\alpha_{ii} - \beta)\gamma_i + \alpha_{i\,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_n = 0.$$

Звідси

$$\begin{gathered}
\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n = \beta\gamma_1, \\
\alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n = \beta\gamma_2, \\
\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{nn}\gamma_n = \beta\gamma_n.
\end{gathered} \tag{1}$$

Помножимо першу з рівностей (1) на $\overline{\gamma_1}$, другу на $\overline{\gamma_2}$ і т. д., n-ву на $\overline{\gamma_n}$.

Доведення.

Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i\,i-1}\gamma_{i-1} + (\alpha_{ii} - \beta)\gamma_i + \alpha_{i\,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_n = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n &= \beta\gamma_1, \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n &= \beta\gamma_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{nn}\gamma_n &= \beta\gamma_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Помножимо першу з рівностей (1) на $\overline{\gamma_1}$, другу на $\overline{\gamma_2}$ і т. д., n-ву на $\overline{\gamma_n}$. Опісля додамо всі одержані рівності.

Доведення.

Тоді для довільного $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i\,i-1}\gamma_{i-1} + (\alpha_{ii} - \beta)\gamma_i + \alpha_{i\,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_n = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n &= \beta\gamma_1, \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n &= \beta\gamma_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{nn}\gamma_n &= \beta\gamma_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Помножимо першу з рівностей (1) на $\overline{\gamma_1}$, другу на $\overline{\gamma_2}$ і т. д., n-ву на $\overline{\gamma_n}$. Опісля додамо всі одержані рівності. Матимемо рівність

$$(\alpha_{11}\gamma_1\overline{\gamma_1} + \alpha_{12}\gamma_2\overline{\gamma_1} + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n\overline{\gamma_1}) +$$

Доведення.

Тоді для довільного $i \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i\,i-1}\gamma_{i-1} + (\alpha_{ii} - \beta)\gamma_i + \alpha_{i\,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_n = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n &= \beta\gamma_1, \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n &= \beta\gamma_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{nn}\gamma_n &= \beta\gamma_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Помножимо першу з рівностей (1) на $\overline{\gamma_1}$, другу на $\overline{\gamma_2}$ і т. д., n-ву на $\overline{\gamma_n}$. Опісля додамо всі одержані рівності. Матимемо рівність

$$(\alpha_{11}\gamma_1\overline{\gamma_1} + \alpha_{12}\gamma_2\overline{\gamma_1} + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n\overline{\gamma_1}) +$$
$$+(\alpha_{21}\gamma_1\overline{\gamma_2} + \alpha_{22}\gamma_2\overline{\gamma_2} + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n\overline{\gamma_2}) +$$

Доведення.

Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i\,i-1}\gamma_{i-1} + (\alpha_{ii} - \beta)\gamma_i + \alpha_{i\,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_n = 0.$$

Звідси

$$\begin{gathered}
\alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n = \beta\gamma_1, \\
\alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n = \beta\gamma_2, \\
\cdots\cdots\cdots \\
\alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{nn}\gamma_n = \beta\gamma_n.
\end{gathered} \tag{1}$$

Помножимо першу з рівностей (1) на $\overline{\gamma_1}$, другу на $\overline{\gamma_2}$ і т. д., n-ву на $\overline{\gamma_n}$. Опісля додамо всі одержані рівності. Матимемо рівність

$$\begin{gathered}
(\alpha_{11}\gamma_1\overline{\gamma_1} + \alpha_{12}\gamma_2\overline{\gamma_1} + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n\overline{\gamma_1}) + \\
+(\alpha_{21}\gamma_1\overline{\gamma_2} + \alpha_{22}\gamma_2\overline{\gamma_2} + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n\overline{\gamma_2}) + \\
\cdots\cdots\cdots \\
+(\alpha_{n1}\gamma_1\overline{\gamma_n} + \alpha_{n2}\gamma_2\overline{\gamma_n} + \cdots + \alpha_{nn}\gamma_n\overline{\gamma_n}) =
\end{gathered}$$

Доведення.

Тоді для довільного $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ справджується рівність

$$\alpha_{i1}\gamma_1 + \cdots + \alpha_{i\,i-1}\gamma_{i-1} + (\alpha_{ii} - \beta)\gamma_i + \alpha_{i\,i+1}\gamma_{i+1} + \cdots + \alpha_{in}\gamma_n = 0.$$

Звідси

$$\begin{aligned} \alpha_{11}\gamma_1 + \alpha_{12}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n &= \beta\gamma_1, \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \alpha_{22}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n &= \beta\gamma_2, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \alpha_{n1}\gamma_1 + \alpha_{n2}\gamma_2 + \cdots + \alpha_{nn}\gamma_n &= \beta\gamma_n. \end{aligned} \qquad (1)$$

Помножимо першу з рівностей (1) на $\overline{\gamma_1}$, другу на $\overline{\gamma_2}$ і т. д., n-ву на $\overline{\gamma_n}$. Опісля додамо всі одержані рівності. Матимемо рівність

$$\begin{gathered} (\alpha_{11}\gamma_1\overline{\gamma_1} + \alpha_{12}\gamma_2\overline{\gamma_1} + \cdots + \alpha_{1n}\gamma_n\overline{\gamma_1}) + \\ +(\alpha_{21}\gamma_1\overline{\gamma_2} + \alpha_{22}\gamma_2\overline{\gamma_2} + \cdots + \alpha_{2n}\gamma_n\overline{\gamma_2}) + \\ \cdots\cdots\cdots \\ +(\alpha_{n1}\gamma_1\overline{\gamma_n} + \alpha_{n2}\gamma_2\overline{\gamma_n} + \cdots + \alpha_{nn}\gamma_n\overline{\gamma_n}) = \\ = \beta\gamma_1\overline{\gamma_1} + \beta\gamma_2\overline{\gamma_2} + \cdots + \beta\gamma_n\overline{\gamma_n}. \end{gathered}$$

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i = \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i.$$

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i = \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом,

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i = \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж.

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i = \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} =$$

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i = \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}}$$

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i = \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\cdot\overline{\gamma_j}\cdot\overline{\overline{\gamma_i}}$$

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i=\beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\cdot\overline{\gamma_j}\cdot\overline{\overline{\gamma_i}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\gamma_j}\gamma_i$$

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i = \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\cdot\overline{\gamma_j}\cdot\overline{\overline{\gamma_i}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\gamma_j}\gamma_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_i\overline{\gamma_j}$$

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i = \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \qquad (2)$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\cdot\overline{\gamma_j}\cdot\overline{\overline{\gamma_i}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\gamma_j}\gamma_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_i\overline{\gamma_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\gamma_j\overline{\gamma_i}$$

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i=\beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\cdot\overline{\gamma_j}\cdot\overline{\overline{\gamma_i}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\gamma_j}\gamma_i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_i\overline{\gamma_j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\gamma_j\overline{\gamma_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}.$$

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i = \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\cdot\overline{\gamma_j}\cdot\overline{\overline{\gamma_i}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\gamma_j}\gamma_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_i\overline{\gamma_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\gamma_j\overline{\gamma_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}.$$

Права частина рівності (2)

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i=\beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\cdot\overline{\gamma_j}\cdot\overline{\overline{\gamma_i}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\gamma_j}\gamma_i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_i\overline{\gamma_j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\gamma_j\overline{\gamma_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}.$$

Права частина рівності (2) є добутком комплексного числа β

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i = \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \qquad (2)$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\cdot\overline{\gamma_j}\cdot\overline{\overline{\gamma_i}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\gamma_j}\gamma_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_i\overline{\gamma_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\gamma_j\overline{\gamma_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}.$$

Права частина рівності (2) є добутком комплексного числа β на ненульове дійсне число

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i$$

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i=\beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\cdot\overline{\gamma_j}\cdot\overline{\overline{\gamma_i}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\gamma_j}\gamma_i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_i\overline{\gamma_j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\gamma_j\overline{\gamma_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}.$$

Права частина рівності (2) є добутком комплексного числа β на ненульове дійсне число

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i=\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|^2.$$

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i=\beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\cdot\overline{\gamma_j}\cdot\overline{\overline{\gamma_i}}=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\gamma_j}\gamma_i=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_i\overline{\gamma_j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\gamma_j\overline{\gamma_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}.$$

Права частина рівності (2) є добутком комплексного числа β на ненульове дійсне число

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i=\sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|^2.$$

Це число не дорівнює нулю через те, що $(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)$ є ненульовим вектором.

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i = \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\cdot\overline{\gamma_j}\cdot\overline{\overline{\gamma_i}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\gamma_j}\gamma_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_i\overline{\gamma_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\gamma_j\overline{\gamma_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}.$$

Права частина рівності (2) є добутком комплексного числа β на ненульове дійсне число

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i = \sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|^2.$$

Це число не дорівнює нулю через те, що $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ є ненульовим вектором. Тому β є також дійсним числом.

Доведення.

Або у компактному вигляді

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\bar{\gamma}_i = \beta\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i. \tag{2}$$

Ліва частина рівності (2) є дійсним числом, оскільки комплексно спряжене до нього дорівнює йому ж. Дійсно,

$$\overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha_{ij}}\cdot\overline{\gamma_j}\cdot\overline{\overline{\gamma_i}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\overline{\gamma_j}\gamma_i = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_i\overline{\gamma_j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ji}\gamma_j\overline{\gamma_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\gamma_j\overline{\gamma_i}.$$

Права частина рівності (2) є добутком комплексного числа β на ненульове дійсне число

$$\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\bar{\gamma}_i = \sum_{i=1}^{n}|\gamma_i|^2.$$

Це число не дорівнює нулю через те, що $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ є ненульовим вектором. Тому β є також дійсним числом. Теорема доведена. $\square$

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L,

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю.

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю,

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю, то цей оператор є симетричним.

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю, то цей оператор є симетричним.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір,

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю, то цей оператор є симетричним.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір, а φ — лінійний оператор евклідового простору L.

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle \varphi(x), y \rangle = \langle x, \varphi(y) \rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю, то цей оператор є симетричним.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір, а φ — лінійний оператор евклідового простору L. Доведемо спочатку необхідність.

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю, то цей оператор є симетричним.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір, а φ — лінійний оператор евклідового простору L. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що φ є симетричним оператором L.

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю, то цей оператор є симетричним.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір, а φ — лінійний оператор евклідового простору L. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що φ є симетричним оператором L. Розглянемо довільний ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L.

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю, то цей оператор є симетричним.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір, а φ — лінійний оператор евклідового простору L. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що φ є симетричним оператором L. Розглянемо довільний ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця симетричного оператора φ у цьому базисі,

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю, то цей оператор є симетричним.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір, а φ — лінійний оператор евклідового простору L. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що φ є симетричним оператором L. Розглянемо довільний ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця симетричного оператора φ у цьому базисі, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle \varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю, то цей оператор є симетричним.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір, а φ — лінійний оператор евклідового простору L. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що φ є симетричним оператором L. Розглянемо довільний ортонормований базис a_1, a_2, $\dots$, a_n евклідового простору L. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця симетричного оператора φ у цьому базисі, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, i, $j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$. Тоді

$$\varphi(a_j) = \alpha_{1j}a_1 + \alpha_{2j}a_2 + \cdots + \alpha_{nj}a_n$$

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається симетричним оператором евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю, то цей оператор є симетричним.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір, а φ — лінійний оператор евклідового простору L. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що φ є симетричним оператором L. Розглянемо довільний ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця симетричного оператора φ у цьому базисі, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тоді

$$\varphi(a_j) = \alpha_{1j}a_1 + \alpha_{2j}a_2 + \cdots + \alpha_{nj}a_n = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \alpha_{ij}a_i$$

Означення 2

Лінійний оператор φ евклідового простору L називається **симетричним оператором** евклідового простору L, якщо для будь-яких векторів x і y із L справджується рівність $\langle\varphi(x), y\rangle = \langle x, \varphi(y)\rangle$.

Теорема 3

Симетричний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у будь-якому ортонормованому базисі евклідового простору L має симетричну матрицю. Навпаки, якщо лінійний оператор φ скінченновимірного евклідового простору L у деякому ортонормованому базисі цього простору має симетричну матрицю, то цей оператор є симетричним.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір, а φ — лінійний оператор евклідового простору L. Доведемо спочатку необхідність. Припустимо, що φ є симетричним оператором L. Розглянемо довільний ортонормований базис $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ евклідового простору L. Нехай $A = \|\alpha_{ij}\|$ — матриця симетричного оператора φ у цьому базисі, $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Тоді

$$\varphi(a_j) = \alpha_{1j}a_1 + \alpha_{2j}a_2 + \cdots + \alpha_{nj}a_n = \sum\nolimits_{i=1}^{n} \alpha_{ij}a_i$$

для кожного $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle =$$

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle$$

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle$$

Доведення.

Для довільних різних i, $j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj}$$

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji},$$

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \tag{3}$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle =$$

Доведення.

Для довільних різних i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \qquad (3)$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle$$

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \qquad (3)$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle$$

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \tag{3}$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik}$$

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \qquad (3)$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}.$$

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \quad (3)$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \quad (4)$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L,

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \quad (3)$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \quad (4)$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні.

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle\varphi(a_i), a_j\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki}\delta_{kj} = \alpha_{ji}, \tag{3}$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j)\rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj}\delta_{ik} = \alpha_{ij}. \tag{4}$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей,

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \tag{3}$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \tag{4}$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \tag{5}$$

для будь-яких різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \tag{3}$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \tag{4}$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \tag{5}$$

для будь-яких різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$. Це означає, що матриця A симетричного оператора φ

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \tag{3}$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \tag{4}$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \tag{5}$$

для будь-яких різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Це означає, що матриця A симетричного оператора φ у ортонормованому базисі $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ евклідового простору L

Доведення.

Для довільних різних $i,\, j \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \tag{3}$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \tag{4}$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \tag{5}$$

для будь-яких різних $i,\, j \in \{1,\, 2,\, \ldots,\, n\}$. Це означає, що матриця A симетричного оператора φ у ортонормованому базисі $a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_n$ евклідового простору L є симетричною матрицею.

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \quad (3)$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \quad (4)$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (5)$$

для будь-яких різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Це означає, що матриця A симетричного оператора φ у ортонормованому базисі $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ евклідового простору L є симетричною матрицею.

Доведемо тепер достатність.

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \qquad (3)$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \qquad (4)$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \qquad (5)$$

для будь-яких різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$. Це означає, що матриця A симетричного оператора φ у ортонормованому базисі $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ евклідового простору L є симетричною матрицею.

Доведемо тепер достатність. Нехай знайдеться деякий ортонормований базис $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ евклідового простору L,

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \quad (3)$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \quad (4)$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (5)$$

для будь-яких різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Це означає, що матриця A симетричного оператора φ у ортонормованому базисі $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ евклідового простору L є симетричною матрицею.

Доведемо тепер достатність. Нехай знайдеться деякий ортонормований базис $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ евклідового простору L, у якому матриця A лінійного оператора φ

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \quad (3)$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \quad (4)$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (5)$$

для будь-яких різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$. Це означає, що матриця A симетричного оператора φ у ортонормованому базисі $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ евклідового простору L є симетричною матрицею.

Доведемо тепер достатність. Нехай знайдеться деякий ортонормований базис $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ евклідового простору L, у якому матриця A лінійного оператора φ є симетричною матрицею.

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \qquad (3)$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \qquad (4)$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \qquad (5)$$

для будь-яких різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$. Це означає, що матриця A симетричного оператора φ у ортонормованому базисі $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ евклідового простору L є симетричною матрицею.

Доведемо тепер достатність. Нехай знайдеться деякий ортонормований базис $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$ евклідового простору L, у якому матриця A лінійного оператора φ є симетричною матрицею. Тобто справджується рівність (5) для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$.

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j\rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \tag{3}$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j)\rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \tag{4}$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \tag{5}$$

для будь-яких різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Це означає, що матриця A симетричного оператора φ у ортонормованому базисі $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ евклідового простору L є симетричною матрицею.

Доведемо тепер достатність. Нехай знайдеться деякий ортонормований базис $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ евклідового простору L, у якому матриця A лінійного оператора φ є симетричною матрицею. Тобто справджується рівність (5) для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Тоді навпаки із рівності правих частин рівностей (3) і (4)

Доведення.

Для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \qquad (3)$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \qquad (4)$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \qquad (5)$$

для будь-яких різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Це означає, що матриця A симетричного оператора φ у ортонормованому базисі $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ евклідового простору L є симетричною матрицею.
Доведемо тепер достатність. Нехай знайдеться деякий ортонормований базис $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ евклідового простору L, у якому матриця A лінійного оператора φ є симетричною матрицею. Тобто справджується рівність (5) для довільних різних $i,\ j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Тоді навпаки із рівності правих частин рівностей (3) і (4) слідує рівність їх лівих частин.

Доведення.

Для довільних різних i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \quad (3)$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \quad (4)$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (5)$$

для будь-яких різних i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Це означає, що матриця A симетричного оператора φ у ортонормованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L є симетричною матрицею.
Доведемо тепер достатність. Нехай знайдеться деякий ортонормований базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L, у якому матриця A лінійного оператора φ є симетричною матрицею. Тобто справджується рівність (5) для довільних різних i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Тоді навпаки із рівності правих частин рівностей (3) і (4) слідує рівність їх лівих частин. Тобто $\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \langle a_i, \varphi(a_j) \rangle$

Доведення.

Для довільних різних i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$ обчислимо скалярні добутки:

$$\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \Big\langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} a_k, a_j \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \langle a_k, a_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ki} \delta_{kj} = \alpha_{ji}, \quad (3)$$

$$\langle a_i, \varphi(a_j) \rangle = \Big\langle a_i, \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} a_k \Big\rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \langle a_i, a_k \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{kj} \delta_{ik} = \alpha_{ij}. \quad (4)$$

Оскільки φ симетричний оператор евклідового простору L, то ліві частини обох рівностей (3) і (4) рівні. Тому рівними є і праві частини обох цих рівностей, тобто

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \quad (5)$$

для будь-яких різних i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Це означає, що матриця A симетричного оператора φ у ортонормованому базисі $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ евклідового простору L є симетричною матрицею.

Доведемо тепер достатність. Нехай знайдеться деякий ортонормований базис $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ евклідового простору L, у якому матриця A лінійного оператора φ є симетричною матрицею. Тобто справджується рівність (5) для довільних різних i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$. Тоді навпаки із рівності правих частин рівностей (3) і (4) слідує рівність їх лівих частин. Тобто $\langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \langle a_i, \varphi(a_j) \rangle$ для довільних різних i, $j \in \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\}$.

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L.

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n$$

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n$$

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j.$$

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j.$$

Тоді справджуються наступні рівності

$$\langle \varphi(b), c \rangle =$$

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$ евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j.$$

Тоді справджуються наступні рівності

$$\langle \varphi(b), c \rangle = \Big\langle \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i \Big), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle$$

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j.$$

Тоді справджуються наступні рівності

$$\langle \varphi(b), c \rangle = \Big\langle \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i \Big), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle$$

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j.$$

Тоді справджуються наступні рівності

$$\langle \varphi(b), c\rangle = \Big\langle \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\Big), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle \varphi(a_i), a_j\rangle$$

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \dots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_n a_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j.$$

Тоді справджуються наступні рівності

$$\langle \varphi(b), c\rangle = \Big\langle \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\Big), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle \varphi(a_i), a_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle a_i, \varphi(a_j)\rangle$$

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j.$$

Тоді справджуються наступні рівності

$$\langle \varphi(b), c \rangle = \Big\langle \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i \Big), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle a_i, \varphi(a_j) \rangle =$$

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j.$$

Тоді справджуються наступні рівності

$$\langle \varphi(b), c \rangle = \Big\langle \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i \Big), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle a_i, \varphi(a_j) \rangle =$$

$$= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i, \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \varphi(a_j) \Big\rangle$$

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j.$$

Тоді справджуються наступні рівності

$$\langle \varphi(b), c\rangle = \Big\langle \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i\Big), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle \varphi(a_i), a_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle a_i, \varphi(a_j)\rangle =$$

$$= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i, \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \varphi(a_j)\Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i, \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j\Big)\Big\rangle$$

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j.$$

Тоді справджуються наступні рівності

$$\langle \varphi(b), c \rangle = \Big\langle \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i \Big), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle a_i, \varphi(a_j) \rangle =$$

$$= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i, \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \varphi(a_j) \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i, \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big) \Big\rangle = \langle b, \varphi(c) \rangle.$$

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j.$$

Тоді справджуються наступні рівності

$$\langle \varphi(b), c \rangle = \Big\langle \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i \Big), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle a_i, \varphi(a_j) \rangle =$$

$$= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i, \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \varphi(a_j) \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i, \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big) \Big\rangle = \langle b, \varphi(c) \rangle.$$

Це означає, що φ є симетричним оператором.

Доведення.

Розглянемо довільні вектори b, c евклідового простору L. Розкладемо їх за ортонормованим базисом a_1, a_2, ..., a_n евклідового простору L:

$$b = \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 + \cdots + \beta_n a_n = \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i,$$

$$c = \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_n a_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j.$$

Тоді справджуються наступні рівності

$$\langle \varphi(b), c \rangle = \Big\langle \varphi\Big(\sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i \Big), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i \varphi(a_i), \sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big\rangle =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle \varphi(a_i), a_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_i \gamma_j \langle a_i, \varphi(a_j) \rangle =$$

$$= \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i, \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \varphi(a_j) \Big\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^{n} \beta_i a_i, \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j a_j \Big) \Big\rangle = \langle b, \varphi(c) \rangle.$$

Це означає, що φ є симетричним оператором. Теорема доведена. $\square$

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L.

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n цього простору,

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$.

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n.

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n. За попередньою теоремою A є симетричною матрицею.

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\dots$, a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі a_1, a_2, $\dots$, a_n. За попередньою теоремою A є симетричною матрицею. Нехай $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A,

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\dots$, a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі a_1, a_2, $\dots$, a_n. За попередньою теоремою A є симетричною матрицею. Нехай $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A, а отже, і симетричного оператора φ.

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n. За попередньою теоремою A є симетричною матрицею. Нехай $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A, а отже, і симетричного оператора φ. $f(\lambda)$ є многочленом натурального степеня n і за теоремою про характеристичний многочлен симетричної матриці розкладається у добуток лінійних множників.

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\dots$, a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі a_1, a_2, $\dots$, a_n. За попередньою теоремою A є симетричною матрицею. Нехай $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A, а отже, і симетричного оператора φ. $f(\lambda)$ є многочленом натурального степеня n і за теоремою про характеристичний многочлен симетричної матриці розкладається у добуток лінійних множників. А як наслідок це означає, що має корінь,

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n. За попередньою теоремою A є симетричною матрицею. Нехай $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A, а отже, і симетричного оператора φ. $f(\lambda)$ є многочленом натурального степеня n і за теоремою про характеристичний многочлен симетричної матриці розкладається у добуток лінійних множників. А як наслідок це означає, що має корінь, який є власним значенням симетричного оператора φ.

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n. За попередньою теоремою A є симетричною матрицею. Нехай $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A, а отже, і симетричного оператора φ. $f(\lambda)$ є многочленом натурального степеня n і за теоремою про характеристичний многочлен симетричної матриці розкладається у добуток лінійних множників. А як наслідок це означає, що має корінь, який є власним значенням симетричного оператора φ. Теорема доведена. □

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, ..., a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі a_1, a_2, ..., a_n. За попередньою теоремою A є симетричною матрицею. Нехай $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A, а отже, і симетричного оператора φ. $f(\lambda)$ є многочленом натурального степеня n і за теоремою про характеристичний многочлен симетричної матриці розкладається у добуток лінійних множників. А як наслідок це означає, що має корінь, який є власним значенням симетричного оператора φ. Теорема доведена. □

Теорема 5 (основна теорема про симетричні оператори)

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n. За попередньою теоремою A є симетричною матрицею. Нехай $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A, а отже, і симетричного оператора φ. $f(\lambda)$ є многочленом натурального степеня n і за теоремою про характеристичний многочлен симетричної матриці розкладається у добуток лінійних множників. А як наслідок це означає, що має корінь, який є власним значенням симетричного оператора φ. Теорема доведена. $\square$

Теорема 5 (основна теорема про симетричні оператори)

Лінійний оператор φ ненульового скінченновимірного евклідового простору L

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\dots$, a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі a_1, a_2, $\dots$, a_n. За попередньою теоремою A є симетричною матрицею. Нехай $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A, а отже, і симетричного оператора φ. $f(\lambda)$ є многочленом натурального степеня n і за теоремою про характеристичний многочлен симетричної матриці розкладається у добуток лінійних множників. А як наслідок це означає, що має корінь, який є власним значенням симетричного оператора φ. Теорема доведена. $\square$

Теорема 5 (основна теорема про симетричні оператори)

Лінійний оператор φ *ненульового скінченновимірного евклідового простору* L *є симетричним оператором*

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n. За попередньою теоремою A є симетричною матрицею. Нехай $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A, а отже, і симетричного оператора φ. $f(\lambda)$ є многочленом натурального степеня n і за теоремою про характеристичний многочлен симетричної матриці розкладається у добуток лінійних множників. А як наслідок це означає, що має корінь, який є власним значенням симетричного оператора φ. Теорема доведена. $\square$

Теорема 5 (основна теорема про симетричні оператори)

Лінійний оператор φ ненульового скінченновимірного евклідового простору L є симетричним оператором тоді і тільки тоді, коли в просторі L існує ортонормований базис,

Теорема 4

Симетричний оператор ненульового скінченновимірного евклідового простору має принаймні одне власне значення.

Доведення.

Нехай φ є симетричним оператором ненульового скінченновимірного евклідового простору L. Розглянемо будь-який ортонормований базис a_1, a_2, $\ldots$, a_n цього простору, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Нехай A — матриця симетричного оператор φ у базисі a_1, a_2, $\ldots$, a_n. За попередньою теоремою A є симетричною матрицею. Нехай $f(\lambda)$ — характеристичний многочлен матриці A, а отже, і симетричного оператора φ. $f(\lambda)$ є многочленом натурального степеня n і за теоремою про характеристичний многочлен симетричної матриці розкладається у добуток лінійних множників. А як наслідок це означає, що має корінь, який є власним значенням симетричного оператора φ. Теорема доведена. $\square$

Теорема 5 (основна теорема про симетричні оператори)

Лінійний оператор φ ненульового скінченновимірного евклідового простору L є симетричним оператором тоді і тільки тоді, коли в просторі L існує ортонормований базис, що складається з власних векторів оператора φ.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n,

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$,

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.
Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати).

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.
Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.
Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.
Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.
Припустимо, що у випадку, коли $n < m$

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.

Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис,

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.

Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.

Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.

Розглянемо випадок, коли $n = m$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.

Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.

Розглянемо випадок, коли $n = m$. За теоремою 4 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1,

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.

Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.

Розглянемо випадок, коли $n = m$. За теоремою 4 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1, а отже, і власний вектор a,

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.

Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.

Розглянемо випадок, коли $n = m$. За теоремою 4 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1, а отже, і власний вектор a, що йому належить.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.

Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.

Розглянемо випадок, коли $n = m$. За теоремою 4 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1, а отже, і власний вектор a, що йому належить. Розглянемо вектор $a_1 = \frac{1}{\|a\|}a$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.

Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.

Розглянемо випадок, коли $n = m$. За теоремою 4 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1, а отже, і власний вектор a, що йому належить. Розглянемо вектор $a_1 = \frac{1}{\|a\|}a$. Він є власним вектором з нормою 1.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.
Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.
Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.
Розглянемо випадок, коли $n = m$. За теоремою 4 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1, а отже, і власний вектор a, що йому належить. Розглянемо вектор $a_1 = \frac{1}{\|a\|}a$. Він є власним вектором з нормою 1. Доповнимо вектор a_1 до ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_m$ евклідового простору L.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.
Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.
Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.
Розглянемо випадок, коли $n = m$. За теоремою 4 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1, а отже, і власний вектор a, що йому належить. Розглянемо вектор $a_1 = \frac{1}{\|a\|} a$. Він є власним вектором з нормою 1. Доповнимо вектор a_1 до ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_m$ евклідового простору L. Покажемо, що система векторів $a_2, a_3, \ldots, a_m$ є базисом ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ до вектора a_1.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.
Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.
Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.
Розглянемо випадок, коли $n = m$. За теоремою 4 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1, а отже, і власний вектор a, що йому належить. Розглянемо вектор $a_1 = \frac{1}{\|a\|}a$. Він є власним вектором з нормою 1. Доповнимо вектор a_1 до ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_m$ евклідового простору L. Покажемо, що система векторів $a_2, a_3, \ldots, a_m$ є базисом ортогонального доповнення $\{a_1\}^{\perp}$ до вектора a_1. Дійсно, оскільки система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ є ортонормованим базисом L,

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.

Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.

Розглянемо випадок, коли $n = m$. За теоремою 4 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1, а отже, і власний вектор a, що йому належить. Розглянемо вектор $a_1 = \frac{1}{\|a\|}a$. Він є власним вектором з нормою 1. Доповнимо вектор a_1 до ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_m$ евклідового простору L. Покажемо, що система векторів $a_2, a_3, \ldots, a_m$ є базисом ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ до вектора a_1. Дійсно, оскільки система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ є ортонормованим базисом L, то $\langle a_j, a_1 \rangle = 0$

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.
Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.
Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.
Розглянемо випадок, коли $n = m$. За теоремою 4 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1, а отже, і власний вектор a, що йому належить. Розглянемо вектор $a_1 = \frac{1}{\|a\|}a$. Він є власним вектором з нормою 1. Доповнимо вектор a_1 до ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_m$ евклідового простору L. Покажемо, що система векторів $a_2, a_3, \ldots, a_m$ є базисом ортогонального доповнення $\{a_1\}^{\perp}$ до вектора a_1. Дійсно, оскільки система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ є ортонормованим базисом L, то $\langle a_j, a_1 \rangle = 0$ для довільного $j \in \{2, 3, \ldots, m\}$,

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.

Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.

Розглянемо випадок, коли $n = m$. За теоремою 4 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1, а отже, і власний вектор a, що йому належить. Розглянемо вектор $a_1 = \frac{1}{\|a\|}a$. Він є власним вектором з нормою 1. Доповнимо вектор a_1 до ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_m$ евклідового простору L. Покажемо, що система векторів $a_2, a_3, \ldots, a_m$ є базисом ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ до вектора a_1. Дійсно, оскільки система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ є ортонормованим базисом L, то $\langle a_j, a_1 \rangle = 0$ для довільного $j \in \{2, 3, \ldots, m\}$, а тому $a_j \in \{a_1\}^\perp$.

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.
Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.
Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.
Розглянемо випадок, коли $n = m$. За теоремою 4 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1, а отже, і власний вектор a, що йому належить. Розглянемо вектор $a_1 = \frac{1}{\|a\|}a$. Він є власним вектором з нормою 1. Доповнимо вектор a_1 до ортонормованого базису a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. Покажемо, що система векторів a_2, a_3, ..., a_m є базисом ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ до вектора a_1. Дійсно, оскільки система векторів a_1, a_2, ..., a_m є ортонормованим базисом L, то $\langle a_j, a_1 \rangle = 0$ для довільного $j \in \{2, 3, \ldots, m\}$, а тому $a_j \in \{a_1\}^\perp$.
До того ж система векторів a_2, a_3, ..., a_m є лінійно незалежною системою векторів

Доведення.

Нехай L — скінченновимірний евклідовий простір розмірності n, де $n \in \mathbb{N}$, φ — лінійний оператор евклідового простору L. Необхідність доведемо методом математичної індукції за розмірністю n евклідового простору L.

Нехай $n = 1$. Нехай a — вектор евклідового простору L з нормою 1 (такий існує, бо будь-який ненульовий вектор можна пронормувати). Тоді a є ортонормованим базисом евклідового простору L і $\varphi(a) = \alpha a$ для деякого $\alpha \in \mathbb{R}$. Отже, a є власним вектором.

Припустимо, що у випадку, коли $n < m$ для деякого фіксованого натурального числа m будь-який евклідовий простір розмірності n має ортонормований базис, що складається з власних векторів будь-якого симетричного оператора евклідового простору L.

Розглянемо випадок, коли $n = m$. За теоремою 4 симетричний оператор φ має деяке власне значення α_1, а отже, і власний вектор a, що йому належить. Розглянемо вектор $a_1 = \frac{1}{\|a\|} a$. Він є власним вектором з нормою 1. Доповнимо вектор a_1 до ортонормованого базису $a_1, a_2, \ldots, a_m$ евклідового простору L. Покажемо, що система векторів $a_2, a_3, \ldots, a_m$ є базисом ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ до вектора a_1. Дійсно, оскільки система векторів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ є ортонормованим базисом L, то $\langle a_j, a_1 \rangle = 0$ для довільного $j \in \{2, 3, \ldots, m\}$, а тому $a_j \in \{a_1\}^\perp$.

До того ж система векторів $a_2, a_3, \ldots, a_m$ є лінійно незалежною системою векторів за теоремою про ортогональну систему ненульових векторів.

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^{\perp}$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L.

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$,

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^{\perp}$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle =$$

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle$$

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, …, γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, …, a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$
$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle$$

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$,

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^{\perp}$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m.

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \dots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m - 1$,

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m - 1.$$

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \dots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m - 1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ,

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m-1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ, бо образ $\varphi(b)$ довільного вектора $b \in \{a_1\}^\perp$

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m - 1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ, бо образ $\varphi(b)$ довільного вектора $b \in \{a_1\}^\perp$ ортогональний до вектора a_1.

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m - 1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ, бо образ $\varphi(b)$ довільного вектора $b \in \{a_1\}^\perp$ ортогональний до вектора a_1. Дійсно

$$\langle\varphi(b), a_1\rangle =$$

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m-1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ, бо образ $\varphi(b)$ довільного вектора $b \in \{a_1\}^\perp$ ортогональний до вектора a_1. Дійсно

$$\langle \varphi(b), a_1\rangle = \langle b, \varphi(a_1)\rangle$$

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$
$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m - 1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m - 1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ, бо образ $\varphi(b)$ довільного вектора $b \in \{a_1\}^\perp$ ортогональний до вектора a_1. Дійсно

$$\langle \varphi(b), a_1\rangle = \langle b, \varphi(a_1)\rangle = \langle b, \alpha_1 a_1\rangle$$

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m - 1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ, бо образ $\varphi(b)$ довільного вектора $b \in \{a_1\}^\perp$ ортогональний до вектора a_1. Дійсно

$$\langle \varphi(b), a_1\rangle = \langle b, \varphi(a_1)\rangle = \langle b, \alpha_1 a_1\rangle = \alpha_1\langle b, a_1\rangle =$$

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m-1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ, бо образ $\varphi(b)$ довільного вектора $b \in \{a_1\}^\perp$ ортогональний до вектора a_1. Дійсно

$$\langle \varphi(b), a_1\rangle = \langle b, \varphi(a_1)\rangle = \langle b, \alpha_1 a_1\rangle = \alpha_1\langle b, a_1\rangle = \alpha_1 \cdot 0$$

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m-1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ, бо образ $\varphi(b)$ довільного вектора $b \in \{a_1\}^\perp$ ортогональний до вектора a_1. Дійсно

$$\langle\varphi(b), a_1\rangle = \langle b, \varphi(a_1)\rangle = \langle b, \alpha_1 a_1\rangle = \alpha_1\langle b, a_1\rangle = \alpha_1 \cdot 0 = 0.$$

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \dots + \gamma_m a_m\rangle =$$
$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \dots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m - 1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ, бо образ $\varphi(b)$ довільного вектора $b \in \{a_1\}^\perp$ ортогональний до вектора a_1. Дійсно

$$\langle \varphi(b), a_1\rangle = \langle b, \varphi(a_1)\rangle = \langle b, \alpha_1 a_1\rangle = \alpha_1\langle b, a_1\rangle = \alpha_1 \cdot 0 = 0.$$

За припущенням індукції у ортогональному доповненні $\{a_1\}^\perp$ існує ортонормований базис a_2', a_3', ..., a_m'

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$
$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m-1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ, бо образ $\varphi(b)$ довільного вектора $b \in \{a_1\}^\perp$ ортогональний до вектора a_1. Дійсно

$$\langle\varphi(b), a_1\rangle = \langle b, \varphi(a_1)\rangle = \langle b, \alpha_1 a_1\rangle = \alpha_1\langle b, a_1\rangle = \alpha_1 \cdot 0 = 0.$$

За припущенням індукції у ортогональному доповненні $\{a_1\}^\perp$ існує ортонормований базис a_2', a_3', ..., a_m', що складається з власних векторів оператора φ.

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m - 1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ, бо образ $\varphi(b)$ довільного вектора $b \in \{a_1\}^\perp$ ортогональний до вектора a_1. Дійсно

$$\langle\varphi(b), a_1\rangle = \langle b, \varphi(a_1)\rangle = \langle b, \alpha_1 a_1\rangle = \alpha_1\langle b, a_1\rangle = \alpha_1 \cdot 0 = 0.$$

За припущенням індукції у ортогональному доповненні $\{a_1\}^\perp$ існує ортонормований базис a'_2, a'_3, ..., a'_m, що складається з власних векторів оператора φ. Тоді система векторів a_1, a'_2, a'_3, ..., a'_m є ортонормованим базисом евклідового простору L,

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$

$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m-1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ, бо образ $\varphi(b)$ довільного вектора $b \in \{a_1\}^\perp$ ортогональний до вектора a_1. Дійсно

$$\langle\varphi(b), a_1\rangle = \langle b, \varphi(a_1)\rangle = \langle b, \alpha_1 a_1\rangle = \alpha_1\langle b, a_1\rangle = \alpha_1 \cdot 0 = 0.$$

За припущенням індукції у ортогональному доповненні $\{a_1\}^\perp$ існує ортонормований базис a_2', a_3', ..., a_m', що складається з власних векторів оператора φ. Тоді система векторів a_1, a_2', a_3', ..., a_m' є ортонормованим базисом евклідового простору L, що складається з власних векторів оператора φ.

Доведення.

Далі, нехай деякий вектор c евклідового простору L належить ортогональному доповненню $\{a_1\}^\perp$ і γ_1, γ_2, ..., γ_m є його координати у базисі a_1, a_2, ..., a_m евклідового простору L. З одного боку $\langle a_1, c\rangle = 0$, а з іншого

$$\langle a_1, c\rangle = \langle a_1, \gamma_1 a_1 + \gamma_2 a_2 + \cdots + \gamma_m a_m\rangle =$$
$$= \gamma_1\langle a_1, a_1\rangle + \gamma_2\langle a_1, a_2\rangle + \cdots + \gamma_m\langle a_1, a_m\rangle = \gamma_1.$$

Тому $\gamma_1 = 0$, тобто вектор c є лінійною комбінацією системи векторів a_2, a_3, ..., a_m. Таким чином, розмірність ортогонального доповнення $\{a_1\}^\perp$ дорівнює $m-1$, тобто

$$\dim_{\mathbb{R}}\{a_1\}^\perp = m-1.$$

Ортогональне доповнення $\{a_1\}^\perp$ є інваріантним підпростором відносно симетричного оператора φ, бо образ $\varphi(b)$ довільного вектора $b \in \{a_1\}^\perp$ ортогональний до вектора a_1. Дійсно

$$\langle \varphi(b), a_1\rangle = \langle b, \varphi(a_1)\rangle = \langle b, \alpha_1 a_1\rangle = \alpha_1\langle b, a_1\rangle = \alpha_1 \cdot 0 = 0.$$

За припущенням індукції у ортогональному доповненні $\{a_1\}^\perp$ існує ортонормований базис a_2', a_3', ..., a_m', що складається з власних векторів оператора φ. Тоді система векторів a_1, a_2', a_3', ..., a_m' є ортонормованим базисом евклідового простору L, що складається з власних векторів оператора φ. Теорема доведена.

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця.

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею;*

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею.*

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^T AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^T AQ$ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n у деякому ортонормованому базисі a_1, a_2, ..., a_n цього простору

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n у деякому ортонормованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цього простору (наприклад, за L можна взяти $\mathbb{R}^n$,

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n у деякому ортонормованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цього простору (наприклад, за L можна взяти $\mathbb{R}^n$, а за базис — канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$).

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n у деякому ортонормованому базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ цього простору (наприклад, за L можна взяти $\mathbb{R}^n$, а за базис — канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$).За основною теоремою про симетричні оператори існує ортонормований базис $b_1, b_2, \dots, b_n$,

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^T AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^T AQ$ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n у деякому ортонормованому базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$ цього простору (наприклад, за L можна взяти $\mathbb{R}^n$, а за базис — канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$).За основною теоремою про симетричні оператори існує ортонормований базис $b_1, b_2, \dots, b_n$, який складається з власних векторів

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що Q^TAQ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що Q^TAQ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n у деякому ортонормованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цього простору (наприклад, за L можна взяти $\mathbb{R}^n$, а за базис — канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$).За основною теоремою про симетричні оператори існує ортонормований базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$, який складається з власних векторів симетричного оператора φ.

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n у деякому ортонормованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цього простору (наприклад, за L можна взяти $\mathbb{R}^n$, а за базис — канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$).За основною теоремою про симетричні оператори існує ортонормований базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$, який складається з власних векторів симетричного оператора φ. Матриця B оператора φ

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n у деякому ортонормованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цього простору (наприклад, за L можна взяти $\mathbb{R}^n$, а за базис — канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$).За основною теоремою про симетричні оператори існує ортонормований базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$, який складається з власних векторів симетричного оператора φ. Матриця B оператора φ у цьому базисі є діагональною матрицею

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n у деякому ортонормованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цього простору (наприклад, за L можна взяти $\mathbb{R}^n$, а за базис — канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$).За основною теоремою про симетричні оператори існує ортонормований базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$, який складається з власних векторів симетричного оператора φ. Матриця B оператора φ у цьому базисі є діагональною матрицею і $B = Q^{-1}AQ$,

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n у деякому ортонормованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цього простору (наприклад, за L можна взяти $\mathbb{R}^n$, а за базис — канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$).За основною теоремою про симетричні оператори існує ортонормований базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$, який складається з власних векторів симетричного оператора φ. Матриця B оператора φ у цьому базисі є діагональною матрицею і $B = Q^{-1}AQ$, де Q — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n у деякому ортонормованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цього простору (наприклад, за L можна взяти $\mathbb{R}^n$, а за базис — канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$).За основною теоремою про симетричні оператори існує ортонормований базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$, який складається з власних векторів симетричного оператора φ. Матриця B оператора φ у цьому базисі є діагональною матрицею і $B = Q^{-1}AQ$, де Q — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Оскільки обидва базиси є ортонормованими,

Наслідок 1

Нехай A — дійсна симетрична матриця. Тоді, що

- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує оборона дійсна матриця Q така, що $Q^{-1}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує невироджена дійсна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею;*
- *існує ортогональна матриця Q така, що $Q^{T}AQ$ є діагональною матрицею.*

Доведення.

Кожну симетричну дійсну матрицю A порядку n можна розглядати, як матрицю деякого симетричного оператора φ евклідового простору L розмірності n у деякому ортонормованому базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$ цього простору (наприклад, за L можна взяти $\mathbb{R}^n$, а за базис — канонічний базис простору $\mathbb{R}^n$).За основною теоремою про симетричні оператори існує ортонормований базис $b_1, b_2, \ldots, b_n$, який складається з власних векторів симетричного оператора φ. Матриця B оператора φ у цьому базисі є діагональною матрицею і $B = Q^{-1}AQ$, де Q — матриця переходу від базису $a_1, a_2, \ldots, a_n$ до базису $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Оскільки обидва базиси є ортонормованими, то Q є ортогональною матрицею. □

Теорема 6 (про полярний розклад лінійного оператора)

Будь-який лінійний оператор скінченновимірного евклідового простору L

Теорема 6 (про полярний розклад лінійного оператора)

Будь-який лінійний оператор скінченновимірного евклідового простору L можна представити у вигляді добутку деякого симетричного

Теорема 6 (про полярний розклад лінійного оператора)

Будь-який лінійний оператор скінченновимірного евклідового простору L *можна представити у вигляді добутку деякого симетричного і деякого ортогонального операторів цього простору.*

Теорема 6 (про полярний розклад лінійного оператора)

Будь-який лінійний оператор скінченновимірного евклідового простору L можна представити у вигляді добутку деякого симетричного і деякого ортогонального операторів цього простору.

Наслідок 2

Будь-яку дійсну квадратну матрицю можна представити у вигляді добутку деякої симетричної та деякої ортогональної матриць.

Теорема 6 (про полярний розклад лінійного оператора)

Будь-який лінійний оператор скінченновимірного евклідового простору L можна представити у вигляді добутку деякого симетричного і деякого ортогонального операторів цього простору.

Наслідок 2

Будь-яку дійсну квадратну матрицю можна представити у вигляді добутку деякої симетричної та деякої ортогональної матриць.

Завдання для самостійної роботи.

Довести теорему про полярний розклад лінійного оператора та наслідок з цієї теореми.