Квадратичні форми

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

8 травня 2023 року

Означення 1

Нехай P — деяке поле,

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P.

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$ (або ще інколи кажуть функція двох аргументів x, $y \in L$,

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$ (або ще інколи кажуть функція двох аргументів x, $y \in L$, яка приймає значення $\sigma(x, y)$ у полі P),

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$ (або ще інколи кажуть функція двох аргументів x, $y \in L$, яка приймає значення $\sigma(x, y)$ у полі P), яке задовольняє наступним умовам лінійності по кожному аргументу:

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$ (або ще інколи кажуть функція двох аргументів x, $y \in L$, яка приймає значення $\sigma(x, y)$ у полі P), яке задовольняє наступним умовам лінійності по кожному аргументу:

$$\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y),$$

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$ (або ще іноді кажуть функція двох аргументів x, $y \in L$, яка приймає значення $\sigma(x, y)$ у полі P), яке задовольняє наступним умовам лінійності по кожному аргументу:

$$\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y),$$

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$ (або ще інколи кажуть функція двох аргументів x, $y \in L$, яка приймає значення $\sigma(x, y)$ у полі P), яке задовольняє наступним умовам лінійності по кожному аргументу:

$$\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, y_1 + y_2) = \sigma(x, y_1) + \sigma(x, y_2),$$

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$ (або ще інколи кажуть функція двох аргументів x, $y \in L$, яка приймає значення $\sigma(x, y)$ у полі P), яке задовольняє наступним умовам лінійності по кожному аргументу:

$$\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, y_1 + y_2) = \sigma(x, y_1) + \sigma(x, y_2),$$

$$\sigma(x, \alpha y) = \alpha\sigma(x, y)$$

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$ (або ще інколи кажуть функція двох аргументів x, $y \in L$, яка приймає значення $\sigma(x, y)$ у полі P), яке задовольняє наступним умовам лінійності по кожному аргументу:

$$\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, y_1 + y_2) = \sigma(x, y_1) + \sigma(x, y_2),$$

$$\sigma(x, \alpha y) = \alpha\sigma(x, y)$$

для довільних векторів x_1, x_2, x, y_1, y_2, $y \in L$

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$ (або ще інколи кажуть функція двох аргументів x, $y \in L$, яка приймає значення $\sigma(x, y)$ у полі P), яке задовольняє наступним умовам лінійності по кожному аргументу:

$$\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, y_1 + y_2) = \sigma(x, y_1) + \sigma(x, y_2),$$

$$\sigma(x, \alpha y) = \alpha\sigma(x, y)$$

для довільних векторів x_1, x_2, x, y_1, y_2, $y \in L$ та довільного елемента $\alpha \in P$.

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$ (або ще інколи кажуть функція двох аргументів x, $y \in L$, яка приймає значення $\sigma(x, y)$ у полі P), яке задовольняє наступним умовам лінійності по кожному аргументу:

$$\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, y_1 + y_2) = \sigma(x, y_1) + \sigma(x, y_2),$$

$$\sigma(x, \alpha y) = \alpha\sigma(x, y)$$

для довільних векторів x_1, x_2, x, y_1, y_2, $y \in L$ та довільного елемента $\alpha \in P$.

Приклад білінійної форми.

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$ (або ще інколи кажуть функція двох аргументів x, $y \in L$, яка приймає значення $\sigma(x, y)$ у полі P), яке задовольняє наступним умовам лінійності по кожному аргументу:

$$\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, y_1 + y_2) = \sigma(x, y_1) + \sigma(x, y_2),$$

$$\sigma(x, \alpha y) = \alpha\sigma(x, y)$$

для довільних векторів x_1, x_2, x, y_1, y_2, $y \in L$ та довільного елемента $\alpha \in P$.

Приклад білінійної форми.

Нехай L — евклідовий простір.

Означення 1

Нехай P — деяке поле, L — лінійний простір над полем P. Білінійною формою на лінійному просторі L називається відображення $\sigma : L \times L \to P$ (або ще інколи кажуть функція двох аргументів x, $y \in L$, яка приймає значення $\sigma(x, y)$ у полі P), яке задовольняє наступним умовам лінійності по кожному аргументу:

$$\sigma(x_1 + x_2, y) = \sigma(x_1, y) + \sigma(x_2, y),$$

$$\sigma(\alpha x, y) = \alpha\sigma(x, y),$$

$$\sigma(x, y_1 + y_2) = \sigma(x, y_1) + \sigma(x, y_2),$$

$$\sigma(x, \alpha y) = \alpha\sigma(x, y)$$

для довільних векторів x_1, x_2, x, y_1, y_2, $y \in L$ та довільного елемента $\alpha \in P$.

Приклад білінійної форми.

Нехай L — евклідовий простір. Скалярний добуток заданий на L є білінійною формою.

Означення 2

Білінійна форма σ

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається симетричною,

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається симетричною, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **симетричною**, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **симетричною**, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **симетричною**, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається симетричною, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається кососиметричною,

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається симетричною, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається кососиметричною, якщо $\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається симетричною, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається кососиметричною, якщо $\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **симетричною**, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **кососиметричною**, якщо $\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Твердження 1

Нехай P — поле,

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається симетричною, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається кососиметричною, якщо $\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Твердження 1

Нехай P — поле, характеристика якого не дорівнює 2

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **симетричною**, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **кососиметричною**, якщо $\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Твердження 1

Нехай P — поле, характеристика якого не дорівнює 2 (тобто $1 + 1 \neq 0$).

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **симетричною**, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **кососиметричною**, якщо $\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Твердження 1

Нехай P — поле, характеристика якого не дорівнює 2 (тобто $1+1 \neq 0$). Тоді будь-яка білінійна форма на лінійному просторі L над полем P

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **симетричною**, якщо $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **кососиметричною**, якщо $\sigma(x,y) = -\sigma(y,x)$ для довільних x, $y \in L$.

Твердження 1

Нехай P — поле, характеристика якого не дорівнює 2 (тобто $1+1 \neq 0$). Тоді будь-яка білінійна форма на лінійному просторі L над полем P є сумою деякої симетричної

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається симетричною, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається кососиметричною, якщо $\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Твердження 1

Нехай P — поле, характеристика якого не дорівнює 2 (тобто $1+1 \neq 0$). Тоді будь-яка білінійна форма на лінійному просторі L над полем P є сумою деякої симетричної та деякої кососиметричної

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **симетричною**, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **кососиметричною**, якщо $\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Твердження 1

Нехай P — поле, характеристика якого не дорівнює 2 (тобто $1+1 \neq 0$). Тоді будь-яка білінійна форма на лінійному просторі L над полем P є сумою деякої симетричної та деякої кососиметричної білінійних форм на просторі L.

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається симетричною, якщо $\sigma(x, y) = \sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається кососиметричною, якщо $\sigma(x, y) = -\sigma(y, x)$ для довільних x, $y \in L$.

Твердження 1

Нехай P — поле, характеристика якого не дорівнює 2 (тобто $1 + 1 \neq 0$). Тоді будь-яка білінійна форма на лінійному просторі L над полем P є сумою деякої симетричної та деякої кососиметричної білінійних форм на просторі L.

Доведення.

Доведення леми одразу слідує із наступної рівності для будь-яких векторів x, $y \in L$

Означення 2

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається симетричною, якщо $\sigma(x,y) = \sigma(y,x)$ для довільних x, $y \in L$.

Означення 3

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається кососиметричною, якщо $\sigma(x,y) = -\sigma(y,x)$ для довільних x, $y \in L$.

Твердження 1

Нехай P — поле, характеристика якого не дорівнює 2 (тобто $1+1 \neq 0$). Тоді будь-яка білінійна форма на лінійному просторі L над полем P є сумою деякої симетричної та деякої кососиметричної білінійних форм на просторі L.

Доведення.

Доведення леми одразу слідує із наступної рівності для будь-яких векторів x, $y \in L$

$$\sigma(x,y) = \frac{1}{2}[\sigma(x,y) + \sigma(y,x)] + \frac{1}{2}[\sigma(x,y) - \sigma(y,x)].$$

$\square$

Означення 4

Білінійна форма σ

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається невиродженою,

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **невиродженою**, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **невиродженою**, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається невиродженою, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **невиродженою**, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **невиродженою**, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **невиродженою**, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L.

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **невиродженою**, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L. Виберемо у просторі L базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$,

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **невиродженою**, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L. Виберемо у просторі L базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$.

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається невиродженою, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L. Виберемо у просторі L базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Позначимо $\alpha_{ij} = \sigma(a_i, a_j)$,

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається невиродженою, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L. Виберемо у просторі L базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Позначимо $\alpha_{ij} = \sigma(a_i, a_j)$, де $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається невиродженою, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L. Виберемо у просторі L базис a_1, a_2, ..., a_n, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Позначимо $\alpha_{ij} = \sigma(a_i, a_j)$, де $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Вектори x та y простору L розкладемо за вибраним базисом

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається невиродженою, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L. Виберемо у просторі L базис a_1, a_2, ..., a_n, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Позначимо $\alpha_{ij} = \sigma(a_i, a_j)$, де $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Вектори x та y простору L розкладемо за вибраним базисом

$$x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n,$$

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **невиродженою**, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L. Виберемо у просторі L базис a_1, a_2, ..., a_n, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Позначимо $\alpha_{ij} = \sigma(a_i, a_j)$, де $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Вектори x та y простору L розкладемо за вибраним базисом

$$x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n, \qquad y = y_1 a_1 + \cdots + y_n a_n,$$

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **невиродженою**, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L. Виберемо у просторі L базис a_1, a_2, ..., a_n, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Позначимо $\alpha_{ij} = \sigma(a_i, a_j)$, де $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Вектори x та y простору L розкладемо за вибраним базисом

$$x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n, \qquad y = y_1 a_1 + \cdots + y_n a_n,$$

де x_1, ..., x_n, y_1, ..., $y_n \in P$.

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається невиродженою, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L. Виберемо у просторі L базис a_1, a_2, ..., a_n, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Позначимо $\alpha_{ij} = \sigma(a_i, a_j)$, де $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Вектори x та y простору L розкладемо за вибраним базисом

$$x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n, \qquad y = y_1 a_1 + \cdots + y_n a_n,$$

де x_1, ..., x_n, y_1, ..., $y_n \in P$.
Тоді

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j,$$

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **невиродженою**, якщо із рівності $\sigma(x, a) = 0$ для всіх $x \in L$ випливає, що $a = 0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L. Виберемо у просторі L базис $a_1, a_2, \ldots, a_n$, де $n = \dim_{\mathbb{R}} L$. Позначимо $\alpha_{ij} = \sigma(a_i, a_j)$, де $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Вектори x та y простору L розкладемо за вибраним базисом

$$x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n, \qquad y = y_1 a_1 + \cdots + y_n a_n,$$

де $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in P$.
Тоді

$$\sigma(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j,$$

або в матричному вигляді $\sigma(x, y) = X^T A Y$,

Означення 4

Білінійна форма σ на лінійному просторі L над полем P називається **невиродженою**, якщо із рівності $\sigma(x,a)=0$ для всіх $x\in L$ випливає, що $a=0$.

Нехай всюди надалі L — скінченновимірний лінійний простір над полем і σ — білінійна форма на L. Виберемо у просторі L базис a_1, a_2, ..., a_n, де $n=\dim_{\mathbb{R}}L$. Позначимо $\alpha_{ij}=\sigma(a_i,a_j)$, де $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$. Вектори x та y простору L розкладемо за вибраним базисом

$$x=x_1a_1+\cdots+x_na_n,\qquad y=y_1a_1+\cdots+y_na_n,$$

де x_1, ..., x_n, y_1, ..., $y_n\in P$.

Тоді

$$\sigma(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_iy_j,$$

або в матричному вигляді $\sigma(x,y)=X^TAY$, де X, Y — координатні стовпці векторів x і y,

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \ldots & \alpha_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{n1} & \ldots & \alpha_{nn}\end{pmatrix}.$$

Означення 5

Матриця A називається матрицею білінійної форми σ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Якщо білінійна форма σ є симетричною,

Означення 5

Матриця A називається матрицею білінійної форми σ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця,

Означення 5

Матриця A називається матрицею білінійної форми σ у базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця, тобто $A^T = A$;

Означення 5

Матриця A називається матрицею білінійної форми σ у базисі $a_1, a_2, \dots,$ a_n.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця, тобто $A^T = A$; якщо ж σ є кососиметричною білінійною формою,

Означення 5

Матриця A називається матрицею білінійної форми σ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця, тобто $A^T = A$; якщо ж σ є кососиметричною білінійною формою, то A — кососиметрична матриця, тобто

Означення 5

Матриця A називається матрицею білінійної форми σ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця, тобто $A^T = A$; якщо ж σ є кососиметричною білінійною формою, то A — кососиметрична матриця, тобто $A^T = -A$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Нехай у лінійному просторі L

Означення 5

Матриця A називається **матрицею білінійної форми σ у базисі** $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця, тобто $A^T = A$; якщо ж σ є кососиметричною білінійною формою, то A — кососиметрична матриця, тобто $A^T = -A$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Нехай у лінійному просторі L вибрано інший базис $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$.

Означення 5

Матриця A називається матрицею білінійної форми σ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця, тобто $A^T = A$; якщо ж σ є кососиметричною білінійною формою, то A — кососиметрична матриця, тобто $A^T = -A$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Нехай у лінійному просторі L вибрано інший базис $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Показати, що матриця A' білінійної форми σ у новому базисі

Означення 5

Матриця A називається матрицею білінійної форми σ у базисі $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця, тобто $A^T = A$; якщо ж σ є кососиметричною білінійною формою, то A — кососиметрична матриця, тобто $A^T = -A$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Нехай у лінійному просторі L вибрано інший базис $a'_1, a'_2, \dots, a'_n$. Показати, що матриця A' білінійної форми σ у новому базисі пов'язана з матрицею A

Означення 5

Матриця A називається матрицею білінійної форми σ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця, тобто $A^T = A$; якщо ж σ є кососиметричною білінійною формою, то A — кососиметрична матриця, тобто $A^T = -A$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Нехай у лінійному просторі L вибрано інший базис $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Показати, що матриця A' білінійної форми σ у новому базисі пов'язана з матрицею A рівністю $A' = S^T AS$,

Означення 5

Матриця A називається матрицею білінійної форми σ у базисі a_1, a_2, ..., a_n.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця, тобто $A^T = A$; якщо ж σ є кососиметричною білінійною формою, то A — кососиметрична матриця, тобто $A^T = -A$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Нехай у лінійному просторі L вибрано інший базис a'_1, a'_2, ..., a'_n. Показати, що матриця A' білінійної форми σ у новому базисі пов'язана з матрицею A рівністю $A' = S^T AS$, де S — матриця переходу від базису a_1, ..., a_n

Означення 5

Матриця A називається матрицею білінійної форми σ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця, тобто $A^T = A$; якщо ж σ є кососиметричною білінійною формою, то A — кососиметрична матриця, тобто $A^T = -A$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Нехай у лінійному просторі L вибрано інший базис $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Показати, що матриця A' білінійної форми σ у новому базисі пов'язана з матрицею A рівністю $A' = S^T AS$, де S — матриця переходу від базису $a_1, \ldots, a_n$ до базису $a'_1, \ldots, a'_n$.

Означення 5

Матриця A називається **матрицею білінійної форми σ у базисі** $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця, тобто $A^T = A$; якщо ж σ є кососиметричною білінійною формою, то A — кососиметрична матриця, тобто $A^T = -A$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Нехай у лінійному просторі L вибрано інший базис $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Показати, що матриця A' білінійної форми σ у новому базисі пов'язана з матрицею A рівністю $A' = S^T AS$, де S — матриця переходу від базису $a_1, \ldots, a_n$ до базису $a'_1, \ldots, a'_n$.
2. Показати, що білінійна форма σ є невиродженою

Означення 5

Матриця A називається матрицею білінійної форми σ у базисі $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця, тобто $A^T = A$; якщо ж σ є кососиметричною білінійною формою, то A — кососиметрична матриця, тобто $A^T = -A$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Нехай у лінійному просторі L вибрано інший базис $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Показати, що матриця A' білінійної форми σ у новому базисі пов'язана з матрицею A рівністю $A' = S^T AS$, де S — матриця переходу від базису $a_1, \ldots, a_n$ до базису $a'_1, \ldots, a'_n$.
2. Показати, що білінійна форма σ є невиродженою тоді і тільки тоді,

Означення 5

Матриця A називається **матрицею білінійної форми σ у базисі** $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Якщо білінійна форма σ є симетричною, то A — симетрична матриця, тобто $A^T = A$; якщо ж σ є кососиметричною білінійною формою, то A — кососиметрична матриця, тобто $A^T = -A$.

Завдання для самостійної роботи.

1. Нехай у лінійному просторі L вибрано інший базис $a'_1, a'_2, \ldots, a'_n$. Показати, що матриця A' білінійної форми σ у новому базисі пов'язана з матрицею A рівністю $A' = S^T AS$, де S — матриця переходу від базису $a_1, \ldots, a_n$ до базису $a'_1, \ldots, a'_n$.
2. Показати, що білінійна форма σ є невиродженою тоді і тільки тоді, коли матриця A цієї форми є невиродженою.

Означення 6

Нехай L — лінійний простір над полем P.

Означення 6

Нехай L — лінійний простір над полем P. Відображення $k : L \to P$ називається квадратичною формою

Означення 6

Нехай L — лінійний простір над полем P. Відображення $k : L \to P$ називається квадратичною формою (функцією) на L,

Означення 6

Нехай L — лінійний простір над полем P. Відображення $k : L \to P$ називається квадратичною формою (функцією) на L, якщо існує білінійна форма σ

Означення 6

Нехай L — лінійний простір над полем P. Відображення $k : L \to P$ називається квадратичною формою (функцією) на L, якщо існує білінійна форма σ на L

Означення 6

Нехай L — лінійний простір над полем P. Відображення $k : L \to P$ називається квадратичною формою (функцією) на L, якщо існує білінійна форма σ на L така, що

$$k(x) = \sigma(x, x)$$

для будь-якого вектора x із L.

Означення 6

Нехай L — лінійний простір над полем P. Відображення $k : L \to P$ називається квадратичною формою (функцією) на L, якщо існує білінійна форма σ на L така, що

$$k(x) = \sigma(x, x)$$

для будь-якого вектора x із L.

Сформулюємо еквівалентні цьому означення квадратичної форми.

Означення 6

Нехай L — лінійний простір над полем P. Відображення $k : L \to P$ називається квадратичною формою (функцією) на L, якщо існує білінійна форма σ на L така, що

$$k(x) = \sigma(x, x)$$

для будь-якого вектора x із L.

Сформулюємо еквівалентні цьому означення квадратичної форми.

Означення 7

Квадратичною формою над полем P від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$

Означення 6

Нехай L — лінійний простір над полем P. Відображення $k : L \to P$ називається квадратичною формою (функцією) на L, якщо існує білінійна форма σ на L така, що

$$k(x) = \sigma(x, x)$$

для будь-якого вектора x із L.

Сформулюємо еквівалентні цьому означення квадратичної форми.

Означення 7

Квадратичною формою над полем P від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається однорідний многочлен степеня 2

Означення 6

Нехай L — лінійний простір над полем P. Відображення $k : L \to P$ називається квадратичною формою (функцією) на L, якщо існує білінійна форма σ на L така, що

$$k(x) = \sigma(x, x)$$

для будь-якого вектора x із L.

Сформулюємо еквівалентні цьому означення квадратичної форми.

Означення 7

Квадратичною формою над полем P від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ називається однорідний многочлен степеня 2 над полем P від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле,

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P.

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і x_1, x_2, ..., x_n — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і x_1, x_2, ..., x_n — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \cdots + \alpha_{ij} x_i x_j + \cdots + \alpha_{nn} x_n^2$$

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \cdots + \alpha_{ij} x_i x_j + \cdots + \alpha_{nn} x_n^2 \qquad (1)$$

називається квадратичною формою над полем P

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \cdots + \alpha_{ij} x_i x_j + \cdots + \alpha_{nn} x_n^2 \qquad (1)$$

називається квадратичною формою над полем P від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами α_{ij}.

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і x_1, x_2, ..., x_n — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \cdots + \alpha_{ij} x_i x_j + \cdots + \alpha_{nn} x_n^2 \qquad (1)$$

називається квадратичною формою над полем P від n змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij}.

Позначимо квадратичну форму (1) через f.

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і $x_1, x_2, \dots, x_n$ — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \cdots + \alpha_{ij} x_i x_j + \cdots + \alpha_{nn} x_n^2 \qquad (1)$$

називається квадратичною формою над полем P від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ з коефіцієнтами α_{ij}.

Позначимо квадратичну форму (1) через f. Вважатимемо, що у квадратичні формі f знак $+$ «задовольняє комутативній властивості»,

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і x_1, x_2, ..., x_n — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \cdots + \alpha_{ij} x_i x_j + \cdots + \alpha_{nn} x_n^2 \qquad (1)$$

називається квадратичною формою над полем P від n змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij}.

Позначимо квадратичну форму (1) через f. Вважатимемо, що у квадратичні формі f знак $+$ «задовольняє комутативній властивості», тобто «доданки» вигляду $\alpha_{ij} x_i x_j$

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і x_1, x_2, ..., x_n — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \cdots + \alpha_{ij} x_i x_j + \cdots + \alpha_{nn} x_n^2 \qquad (1)$$

називається квадратичною формою над полем P від n змінних x_1, x_2, ..., x_n з коефіцієнтами α_{ij}.

Позначимо квадратичну форму (1) через f. Вважатимемо, що у квадратичні формі f знак $+$ «задовольняє комутативній властивості», тобто «доданки» вигляду $\alpha_{ij} x_i x_j$ можна міняти місцями у записі квадратичної форми f.

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \cdots + \alpha_{ij} x_i x_j + \cdots + \alpha_{nn} x_n^2 \qquad (1)$$

називається квадратичною формою над полем P від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами α_{ij}.

Позначимо квадратичну форму (1) через f. Вважатимемо, що у квадратичні формі f знак $+$ «задовольняє комутативній властивості», тобто «доданки» вигляду $\alpha_{ij} x_i x_j$ можна міняти місцями у записі квадратичної форми f. Ці доданки будемо також називати членами квадратичної форми.

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \cdots + \alpha_{ij} x_i x_j + \cdots + \alpha_{nn} x_n^2 \qquad (1)$$

називається квадратичною формою над полем P від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами α_{ij}.

Позначимо квадратичну форму (1) через f. Вважатимемо, що у квадратичні формі f знак $+$ «задовольняє комутативній властивості», тобто «доданки» вигляду $\alpha_{ij} x_i x_j$ можна міняти місцями у записі квадратичної форми f. Ці доданки будемо також називати членами квадратичної форми. Окрім цього, домовимося у випадку різних індексів i та j замість виразу

$$\alpha_{ij} x_i x_j + \alpha_{ji} x_j x_i$$

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і x_1, x_2, $\ldots$, x_n — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \cdots + \alpha_{ij} x_i x_j + \cdots + \alpha_{nn} x_n^2 \qquad (1)$$

називається квадратичною формою над полем P від n змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n з коефіцієнтами α_{ij}.

Позначимо квадратичну форму (1) через f. Вважатимемо, що у квадратичні формі f знак $+$ «задовольняє комутативній властивості», тобто «доданки» вигляду $\alpha_{ij} x_i x_j$ можна міняти місцями у записі квадратичної форми f. Ці доданки будемо також називати членами квадратичної форми. Окрім цього, домовимося у випадку різних індексів i та j замість виразу

$$\alpha_{ij} x_i x_j + \alpha_{ji} x_j x_i$$

інколи писати $2a_{ij} x_i x_j$

Означення 8

Нехай P — деяке довільне поле, n — певне натуральне число і $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — впорядкований набір якихось n змінних (невідомих) з поля P. Далі, нехай дано n^2 елементів α_{ij} поля P таких, що $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Алгебраїчний вираз вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + \cdots + \alpha_{ij} x_i x_j + \cdots + \alpha_{nn} x_n^2 \qquad (1)$$

називається квадратичною формою над полем P від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ з коефіцієнтами α_{ij}.

Позначимо квадратичну форму (1) через f. Вважатимемо, що у квадратичні формі f знак $+$ «задовольняє комутативній властивості», тобто «доданки» вигляду $\alpha_{ij} x_i x_j$ можна міняти місцями у записі квадратичної форми f. Ці доданки будемо також називати членами квадратичної форми. Окрім цього, домовимося у випадку різних індексів i та j замість виразу

$$\alpha_{ij} x_i x_j + \alpha_{ji} x_j x_i$$

інколи писати $2a_{ij} x_i x_j$ і навпаки.

Означення 9

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

Означення 9

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із усіх коефіцієнтів α_{ij} квадратичної форми f

Означення 9

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із усіх коефіцієнтів α_{ij} квадратичної форми f називається матрицею квадратичної форми f.

Означення 9

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із усіх коефіцієнтів α_{ij} квадратичної форми f називається матрицею квадратичної форми f.

Оскільки $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$

Означення 9

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із усіх коефіцієнтів α_{ij} квадратичної форми f називається матрицею квадратичної форми f.

Оскільки $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів i, $j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

Означення 9

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із усіх коефіцієнтів α_{ij} квадратичної форми f називається матрицею квадратичної форми f.

Оскільки $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то матриця A є симетричною матрицею.

Означення 9

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із усіх коефіцієнтів α_{ij} квадратичної форми f називається матрицею квадратичної форми f.

Оскільки $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то матриця A є симетричною матрицею.

Означення 10

Рангом квадратичної форми f

Означення 9

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із усіх коефіцієнтів α_{ij} квадратичної форми f називається матрицею квадратичної форми f.

Оскільки $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то матриця A є симетричною матрицею.

Означення 10

Рангом квадратичної форми f називається ранг матриці A цієї квадратичної форми.

Означення 9

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із усіх коефіцієнтів α_{ij} квадратичної форми f називається **матрицею квадратичної форми** f.

Оскільки $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то матриця A є симетричною матрицею.

Означення 10

Рангом квадратичної форми f називається ранг матриці A цієї квадратичної форми.

Позначатимемо ранг квадратичної форми f через $\operatorname{rank} f$.

Означення 9

Матриця

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із усіх коефіцієнтів α_{ij} квадратичної форми f називається матрицею квадратичної форми f.

Оскільки $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ для довільних індексів $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, то матриця A є симетричною матрицею.

Означення 10

Рангом квадратичної форми f називається ранг матриці A цієї квадратичної форми.

Позначатимемо ранг квадратичної форми f через $\operatorname{rank} f$. Отже,

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} A.$$

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3$$

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$

$$g = a^2 + 2ab + b^2$$

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$g = a^2 + 2ab + b^2 = g(a, b),$$

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$

$$g = a^2 + 2ab + b^2 = g(a, b),$$

$$h = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$g = a^2 + 2ab + b^2 = g(a, b),$$
$$h = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = h(y_1, y_2, y_3)$$

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$g = a^2 + 2ab + b^2 = g(a, b),$$
$$h = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = h(y_1, y_2, y_3)$$

є прикладами квадратичних форм відповідно від змінних x_1, x_2, x_3; a, b та y_1, y_2, y_3.

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$g = a^2 + 2ab + b^2 = g(a, b),$$
$$h = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = h(y_1, y_2, y_3)$$

є прикладами квадратичних форм відповідно від змінних x_1, x_2, x_3; a, b та y_1, y_2, y_3. Матриці

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix},$$

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$g = a^2 + 2ab + b^2 = g(a, b),$$
$$h = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = h(y_1, y_2, y_3)$$

є прикладами квадратичних форм відповідно від змінних x_1, x_2, x_3; a, b та y_1, y_2, y_3. Матриці

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$g = a^2 + 2ab + b^2 = g(a, b),$$
$$h = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = h(y_1, y_2, y_3)$$

є прикладами квадратичних форм відповідно від змінних x_1, x_2, x_3; a, b та y_1, y_2, y_3. Матриці

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$g = a^2 + 2ab + b^2 = g(a, b),$$
$$h = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = h(y_1, y_2, y_3)$$

є прикладами квадратичних форм відповідно від змінних x_1, x_2, x_3; a, b та y_1, y_2, y_3. Матриці

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є відповідно матрицями квадратичних форм f, g і h.

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$g = a^2 + 2ab + b^2 = g(a, b),$$
$$h = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = h(y_1, y_2, y_3)$$

є прикладами квадратичних форм відповідно від змінних x_1, x_2, x_3; a, b та y_1, y_2, y_3. Матриці

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є відповідно матрицями квадратичних форм f, g і h. Нескладно переконатися, що

$$\operatorname{rank} f = 3,$$

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$g = a^2 + 2ab + b^2 = g(a, b),$$
$$h = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = h(y_1, y_2, y_3)$$

є прикладами квадратичних форм відповідно від змінних x_1, x_2, x_3; a, b та y_1, y_2, y_3. Матриці

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є відповідно матрицями квадратичних форм f, g і h. Нескладно переконатися, що

$$\operatorname{rank} f = 3, \qquad \operatorname{rank} g = 1,$$

Приклади квадратичних форм.

$$f = 2x_1^2 - 5x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_2x_3 = f(x_1, x_2, x_3),$$
$$g = a^2 + 2ab + b^2 = g(a, b),$$
$$h = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = h(y_1, y_2, y_3)$$

є прикладами квадратичних форм відповідно від змінних x_1, x_2, x_3; a, b та y_1, y_2, y_3. Матриці

$$F = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{2} & 2 \\ -\frac{5}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

є відповідно матрицями квадратичних форм f, g і h. Нескладно переконатися, що

$$\operatorname{rank} f = 3, \qquad \operatorname{rank} g = 1, \qquad \operatorname{rank} h = 3.$$

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\ldots x_n$:

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\ldots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\ldots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею.

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\ldots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею. Формально помножимо матрицю A на стовпець X, вважаючи невідомі x_1, x_2, $\ldots$, x_n елементами поля P:

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\ldots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею. Формально помножимо матрицю A на стовпець X, вважаючи невідомі x_1, x_2, ..., x_n елементами поля P:

$$A \cdot X =$$

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\dots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею. Формально помножимо матрицю A на стовпець X, вважаючи невідомі x_1, x_2, $\dots$, x_n елементами поля P:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\dots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею. Формально помножимо матрицю A на стовпець X, вважаючи невідомі x_1, x_2, $\dots$, x_n елементами поля P:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{l} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\ldots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею. Формально помножимо матрицю A на стовпець X, вважаючи невідомі x_1, x_2, $\ldots$, x_n елементами поля P:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\ \\ \\ \\ \end{array} \right.$$

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\dots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею. Формально помножимо матрицю A на стовпець X, вважаючи невідомі x_1, x_2, $\dots$, x_n елементами поля P:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\ldots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею. Формально помножимо матрицю A на стовпець X, вважаючи невідомі x_1, x_2, $\ldots$, x_n елементами поля P:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

Далі, помножимо рядок $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$,

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\dots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею. Формально помножимо матрицю A на стовпець X, вважаючи невідомі x_1, x_2, $\dots$, x_n елементами поля P:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

Далі, помножимо рядок $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$, одержаний транспонуванням стовпця X,

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\ldots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею. Формально помножимо матрицю A на стовпець X, вважаючи невідомі x_1, x_2, $\ldots$, x_n елементами поля P:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

Далі, помножимо рядок $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$, одержаний транспонуванням стовпця X, на результат добутку $A \cdot X$:

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\dots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею. Формально помножимо матрицю A на стовпець X, вважаючи невідомі x_1, x_2, $\dots$, x_n елементами поля P:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

Далі, помножимо рядок $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}$, одержаний транспонуванням стовпця X, на результат добутку $A \cdot X$:

$$X^T \cdot A \cdot X =$$

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\ldots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею. Формально помножимо матрицю A на стовпець X, вважаючи невідомі x_1, x_2, $\ldots$, x_n елементами поля P:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

Далі, помножимо рядок $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$, одержаний транспонуванням стовпця X, на результат добутку $A \cdot X$:

$$X^T \cdot A \cdot X = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j$$

Розглянемо стовпець X, складений з невідомих x_1, x_2, $\ldots x_n$:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Підкреслимо, що X є $n \times 1$-матрицею. Формально помножимо матрицю A на стовпець X, вважаючи невідомі x_1, x_2, $\ldots$, x_n елементами поля P:

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{1j} x_j \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{nj} x_j \end{pmatrix}.$$

Далі, помножимо рядок $X^T = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \end{pmatrix}$, одержаний транспонуванням стовпця X, на результат добутку $A \cdot X$:

$$X^T \cdot A \cdot X = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j. \tag{2}$$

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f.

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, x_2,. . . , x_n над полем P

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, x_2,. . . , x_n над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P.

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, x_2,..., x_n над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P. І коли це буде необхідно будемо підкреслювати, що квадратична форма g

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, $x_2, \ldots$, x_n над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P. І коли це буде необхідно будемо підкреслювати, що квадратична форма g вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j$$

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, $x_2, \dots$, x_n над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P. І коли це буде необхідно будемо підкреслювати, що квадратична форма g вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j$$

є квадратичною формою із змінними y_1, y_2, $\dots$, y_n.

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, x_2, ..., x_n над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P. І коли це буде необхідно будемо підкреслювати, що квадратична форма g вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j$$

є квадратичною формою із змінними y_1, y_2, ..., y_n. У цьому випадку замість g писатимемо $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, x_2,..., x_n над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P. І коли це буде необхідно будемо підкреслювати, що квадратична форма g вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j$$

є квадратичною формою із змінними y_1, y_2, ..., y_n. У цьому випадку замість g писатимемо $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Означення 11

Лінійним перетворенням змінних x_1, x_2,..., x_n

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, $x_2, \ldots$, x_n над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P. І коли це буде необхідно будемо підкреслювати, що квадратична форма g вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j$$

є квадратичною формою із змінними y_1, y_2, $\ldots$, y_n. У цьому випадку замість g писатимемо $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Означення 11

Лінійним перетворенням змінних x_1, $x_2, \ldots$, x_n над полем P

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, x_2,..., x_n над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P. І коли це буде необхідно будемо підкреслювати, що квадратична форма g вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j$$

є квадратичною формою із змінними y_1, y_2, ..., y_n. У цьому випадку замість g писатимемо $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Означення 11

Лінійним перетворенням змінних x_1, x_2,..., x_n над полем P у нові змінні y_1, y_2, ..., y_n

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, x_2,..., x_n над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P. І коли це буде необхідно будемо підкреслювати, що квадратична форма g вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j$$

є квадратичною формою із змінними y_1, y_2, ..., y_n. У цьому випадку замість g писатимемо $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Означення 11

Лінійним перетворенням змінних x_1, x_2,..., x_n над полем P у нові змінні y_1, y_2, ..., y_n над цим же полем

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, x_2, ..., x_n над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P. І коли це буде необхідно будемо підкреслювати, що квадратична форма g вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j$$

є квадратичною формою із змінними y_1, y_2, ..., y_n. У цьому випадку замість g писатимемо $g(y_1, y_2, \dots, y_n)$.

Означення 11

Лінійним перетворенням змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P у нові змінні y_1, y_2, ..., y_n над цим же полем називається такий перехід до нових змінних, коли старі змінні виражаються через нові лінійно з деякими коефіцієнтами із поля P,

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, $x_2, \ldots$, x_n над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P. І коли це буде необхідно будемо підкреслювати, що квадратична форма g вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j$$

є квадратичною формою із змінними y_1, y_2, $\ldots$, y_n. У цьому випадку замість g писатимемо $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Означення 11

Лінійним перетворенням змінних x_1, $x_2, \ldots$, x_n над полем P у нові змінні y_1, y_2, $\ldots$, y_n над цим же полем називається такий перехід до нових змінних, коли старі змінні виражаються через нові лінійно з деякими коефіцієнтами із поля P, тобто упорядкована сукупніть рівностей вигляду:

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме X^TAX, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, $x_2, \ldots$, x_n над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P. І коли це буде необхідно будемо підкреслювати, що квадратична форма g вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j$$

є квадратичною формою із змінними y_1, y_2, $\ldots$, y_n. У цьому випадку замість g писатимемо $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Означення 11

Лінійним перетворенням змінних x_1, $x_2, \ldots$, x_n над полем P у нові змінні y_1, y_2, $\ldots$, y_n над цим же полем називається такий перехід до нових змінних, коли старі змінні виражаються через нові лінійно з деякими коефіцієнтами із поля P, тобто упорядкована сукупніть рівностей вигляду:

$$x_1 = \tau_{11}y_1 + \tau_{12}y_2 + \cdots + \tau_{1n}y_n,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n = \tau_{n1}y_1 + \tau_{n2}y_2 + \cdots + \tau_{nn}y_n,$$

Права частина рівності (2) є квадратичною формою f, а тому ліву частину цієї рівності, а саме $X^T AX$, називають матричним записом квадратичної форми f. Поряд із змінними x_1, $x_2, \ldots$, x_n над полем P ми будемо розглядати й інші системи змінних над полем P. І коли це буде необхідно будемо підкреслювати, що квадратична форма g вигляду

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} y_i y_j$$

є квадратичною формою із змінними y_1, y_2, $\ldots$, y_n. У цьому випадку замість g писатимемо $g(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Означення 11

Лінійним перетворенням змінних x_1, $x_2, \ldots$, x_n над полем P у нові змінні y_1, y_2, $\ldots$, y_n над цим же полем називається такий перехід до нових змінних, коли старі змінні виражаються через нові лінійно з деякими коефіцієнтами із поля P, тобто упорядкована сукупніть рівностей вигляду:

$$\begin{aligned} x_1 &= \tau_{11} y_1 + \tau_{12} y_2 + \cdots + \tau_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \tau_{n1} y_1 + \tau_{n2} y_2 + \cdots + \tau_{nn} y_n, \end{aligned} \qquad (3)$$

де $\tau_{ij} \in P$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$.

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних.

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних. Лінійне перетворення змінних (3)

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних. Лінійне перетворення змінних (3) можна записати у вигляді матричної рівності $X = QY$,

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних. Лінійне перетворення змінних (3) можна записати у вигляді матричної рівності $X = QY$, де Y — стовпець змінних y_1, y_2, $\dots y_n$.

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних. Лінійне перетворення змінних (3) можна записати у вигляді матричної рівності $X = QY$, де Y — стовпець змінних y_1, y_2, $\dots y_n$.

Лінійне перетворення змінних називається невиродженим перетворенням,

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних. Лінійне перетворення змінних (3) можна записати у вигляді матричної рівності $X = QY$, де Y — стовпець змінних y_1, y_2, $\dots y_n$.

Лінійне перетворення змінних називається невиродженим перетворенням, якщо матриця цього перетворення є невиродженою.

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних. Лінійне перетворення змінних (3) можна записати у вигляді матричної рівності $X = QY$, де Y — стовпець змінних y_1, y_2, $\dots y_n$.

Лінійне перетворення змінних називається невиродженим перетворенням, якщо матриця цього перетворення є невиродженою. Якщо $X = QY$ — невироджене лінійне перетворення змінних X в змінні Y,

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних. Лінійне перетворення змінних (3) можна записати у вигляді матричної рівності $X = QY$, де Y — стовпець змінних y_1, y_2, $\dots y_n$.

Лінійне перетворення змінних називається невиродженим перетворенням, якщо матриця цього перетворення є невиродженою. Якщо $X = QY$ — невироджене лінійне перетворення змінних X в змінні Y, то $Y = Q^{-1}X$

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних. Лінійне перетворення змінних (3) можна записати у вигляді матричної рівності $X = QY$, де Y — стовпець змінних y_1, y_2, $\dots y_n$.

Лінійне перетворення змінних називається невиродженим перетворенням, якщо матриця цього перетворення є невиродженою. Якщо $X = QY$ — невироджене лінійне перетворення змінних X в змінні Y, то $Y = Q^{-1}X$ є оберненим лінійним перетворенням змінних Y в X.

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних. Лінійне перетворення змінних (3) можна записати у вигляді матричної рівності $X = QY$, де Y — стовпець змінних y_1, y_2, $\dots y_n$.

Лінійне перетворення змінних називається невиродженим перетворенням, якщо матриця цього перетворення є невиродженою. Якщо $X = QY$ — невироджене лінійне перетворення змінних X в змінні Y, то $Y = Q^{-1}X$ є оберненим лінійним перетворенням змінних Y в X. Це перетворення дає можливість у випадку необхідності перейти від нових змінних до початкових змінних.

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних. Лінійне перетворення змінних (3) можна записати у вигляді матричної рівності $X = QY$, де Y — стовпець змінних y_1, y_2, $\dots y_n$.

Лінійне перетворення змінних називається невиродженим перетворенням, якщо матриця цього перетворення є невиродженою. Якщо $X = QY$ — невироджене лінійне перетворення змінних X в змінні Y, то $Y = Q^{-1}X$ є оберненим лінійним перетворенням змінних Y в X. Це перетворення дає можливість у випадку необхідності перейти від нових змінних до початкових змінних.

Означення 12

Послідовне виконання лінійних перетворень $X = Q_1Y$

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних. Лінійне перетворення змінних (3) можна записати у вигляді матричної рівності $X = QY$, де Y — стовпець змінних y_1, y_2, $\dots y_n$.

Лінійне перетворення змінних називається невиродженим перетворенням, якщо матриця цього перетворення є невиродженою. Якщо $X = QY$ — невироджене лінійне перетворення змінних X в змінні Y, то $Y = Q^{-1}X$ є оберненим лінійним перетворенням змінних Y в X. Це перетворення дає можливість у випадку необхідності перейти від нових змінних до початкових змінних.

Означення 12

Послідовне виконання лінійних перетворень $X = Q_1Y$ і $Y = Q_2Z$

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних. Лінійне перетворення змінних (3) можна записати у вигляді матричної рівності $X = QY$, де Y — стовпець змінних y_1, y_2, $\dots y_n$.

Лінійне перетворення змінних називається невиродженим перетворенням, якщо матриця цього перетворення є невиродженою. Якщо $X = QY$ — невироджене лінійне перетворення змінних X в змінні Y, то $Y = Q^{-1}X$ є оберненим лінійним перетворенням змінних Y в X. Це перетворення дає можливість у випадку необхідності перейти від нових змінних до початкових змінних.

Означення 12

Послідовне виконання лінійних перетворень $X = Q_1Y$ і $Y = Q_2Z$ (Z — стовпець змінних z_1, z_2 $\dots$, z_n над полем P)

Матриця

$$Q = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \dots & \tau_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{n1} & \tau_{n2} & \dots & \tau_{nn} \end{pmatrix},$$

складена із коефіцієнтів цього перетворення, називається матрицею лінійного перетворення змінних. Лінійне перетворення змінних (3) можна записати у вигляді матричної рівності $X = QY$, де Y — стовпець змінних y_1, y_2, $\dots y_n$.

Лінійне перетворення змінних називається невиродженим перетворенням, якщо матриця цього перетворення є невиродженою. Якщо $X = QY$ — невироджене лінійне перетворення змінних X в змінні Y, то $Y = Q^{-1}X$ є оберненим лінійним перетворенням змінних Y в X. Це перетворення дає можливість у випадку необхідності перейти від нових змінних до початкових змінних.

Означення 12

Послідовне виконання лінійних перетворень $X = Q_1Y$ і $Y = Q_2Z$ (Z — стовпець змінних z_1, z_2 $\dots$, z_n над полем P) називається добутком цих перетворень.

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1 Q_2)Z$.

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1 Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням.

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1 Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням. Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \ldots, x_n)$

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1 Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням. Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \ldots, x_n)$ лінійне перетворення невідомих (3)

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1 Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням. Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \ldots, x_n)$ лінійне перетворення невідомих (3) — це означає підставити в алгебраїчний вираз

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1 Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням. Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \ldots, x_n)$ лінійне перетворення невідомих (3) — це означає підставити в алгебраїчний вираз

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

замість змінних x_1, ..., x_n їх вирази через нові змінні

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1 Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням. Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \ldots, x_n)$ лінійне перетворення невідомих (3) — це означає підставити в алгебраїчний вираз

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

замість змінних x_1, ..., x_n їх вирази через нові змінні і виконати відповідні спрощення.

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1 Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням. Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \ldots, x_n)$ лінійне перетворення невідомих (3) — це означає підставити в алгебраїчний вираз

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

замість змінних x_1, ..., x_n їх вирази через нові змінні і виконати відповідні спрощення. Результат цих спрощень показує наступна теорема.

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1 Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням. Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \ldots, x_n)$ лінійне перетворення невідомих (3) — це означає підставити в алгебраїчний вираз

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

замість змінних x_1, ..., x_n їх вирази через нові змінні і виконати відповідні спрощення. Результат цих спрощень показує наступна теорема.

Теорема 1 (закон зміни квадратичної форми.)

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1 Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням. Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \dots, x_n)$ лінійне перетворення невідомих (3) — це означає підставити в алгебраїчний вираз

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

замість змінних x_1, ..., x_n їх вирази через нові змінні і виконати відповідні спрощення. Результат цих спрощень показує наступна теорема.

Теорема 1 (закон зміни квадратичної форми.)

Якщо в даній квадратичній формі з матрицею A

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням. Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \ldots, x_n)$ лінійне перетворення невідомих (3) — це означає підставити в алгебраїчний вираз

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

замість змінних x_1, ..., x_n їх вирази через нові змінні і виконати відповідні спрощення. Результат цих спрощень показує наступна теорема.

Теорема 1 (закон зміни квадратичної форми.)

Якщо в даній квадратичній формі з матрицею A виконати лінійне перетворення змінних з матрицею Q,

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням. Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \ldots, x_n)$ лінійне перетворення невідомих (3) — це означає підставити в алгебраїчний вираз

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

замість змінних x_1, ..., x_n їх вирази через нові змінні і виконати відповідні спрощення. Результат цих спрощень показує наступна теорема.

Теорема 1 (закон зміни квадратичної форми.)

Якщо в даній квадратичній формі з матрицею A виконати лінійне перетворення змінних з матрицею Q, то у результаті ми одержимо квадратичну форму

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1 Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням. Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \ldots, x_n)$ лінійне перетворення невідомих (3) — це означає підставити в алгебраїчний вираз

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

замість змінних x_1, ..., x_n їх вирази через нові змінні і виконати відповідні спрощення. Результат цих спрощень показує наступна теорема.

Теорема 1 (закон зміни квадратичної форми.)

Якщо в даній квадратичній формі з матрицею A виконати лінійне перетворення змінних з матрицею Q, то у результаті ми одержимо квадратичну форму від нових змінних,

Очевидно, добуток лінійних перетворень також є лінійним перетворенням змінних, а його матриця дорівнює добутку матриць перемножуваних перетворень: $X = (Q_1Q_2)Z$. Оскільки добуток невироджених матриць є невиродженою матрицею, то добуток невироджених лінійних перетворень є невиродженим лінійним перетворенням. Виконати в даній квадратичній формі $f(x_1, \ldots, x_n)$ лінійне перетворення невідомих (3) — це означає підставити в алгебраїчний вираз

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

замість змінних $x_1, \ldots, x_n$ їх вирази через нові змінні і виконати відповідні спрощення. Результат цих спрощень показує наступна теорема.

Теорема 1 (закон зміни квадратичної форми.)

Якщо в даній квадратичній формі з матрицею A виконати лінійне перетворення змінних з матрицею Q, то у результаті ми одержимо квадратичну форму від нових змінних, причому матрицею цієї квадратичної форми є добуток $Q^T AQ$.

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми.

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX,$$

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n.

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, ..., x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$,

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, ..., x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, ..., y_n:

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, $\ldots$, y_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$$

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, $\ldots$, y_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (QY)^T A(QY)$$

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, ..., x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, ..., y_n:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (QY)^T A(QY) = Y^T Q^T AQY$$

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, ..., x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, ..., y_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (QY)^T A(QY) = Y^T Q^T AQY$$

або теж саме, що

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Y^T BY,$$

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, $\ldots$, y_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (QY)^T A(QY) = Y^T Q^T AQY$$

або теж саме, що

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Y^T BY,$$

де $B = Q^T AQ$.

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, ..., x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, ..., y_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (QY)^T A(QY) = Y^T Q^T AQY$$

або теж саме, що

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Y^T BY,$$

де $B = Q^T AQ$. Матриця B є симетричною матрицею,

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, $\dots$, x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, $\dots$, y_n:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (QY)^T A(QY) = Y^T Q^T AQY$$

або теж саме, що

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Y^T BY,$$

де $B = Q^T AQ$. Матриця B є симетричною матрицею, бо

$$B^T =$$

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T A X,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, $\ldots$, y_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (QY)^T A(QY) = Y^T Q^T A Q Y$$

або теж саме, що

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Y^T B Y,$$

де $B = Q^T A Q$. Матриця B є симетричною матрицею, бо

$$B^T = (Q^T A Q)^T$$

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, ..., x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, ..., y_n:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (QY)^T A (QY) = Y^T Q^T A Q Y$$

або теж саме, що

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Y^T B Y,$$

де $B = Q^T A Q$. Матриця B є симетричною матрицею, бо

$$B^T = (Q^T A Q)^T = Q^T A^T \left(Q^T\right)^T$$

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, $\dots$, x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, $\dots$, y_n:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (QY)^T A(QY) = Y^T Q^T AQY$$

або теж саме, що

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Y^T BY,$$

де $B = Q^T AQ$. Матриця B є симетричною матрицею, бо

$$B^T = (Q^T AQ)^T = Q^T A^T \left(Q^T\right)^T = Q^T AQ$$

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, ..., x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, ..., y_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (QY)^T A(QY) = Y^T Q^T AQY$$

або теж саме, що

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Y^T BY,$$

де $B = Q^T AQ$. Матриця B є симетричною матрицею, бо

$$B^T = (Q^T AQ)^T = Q^T A^T \left(Q^T\right)^T = Q^T AQ = B.$$

Це означає, що у результаті лінійного перетворення змінних з матрицею Q

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, ..., x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, ..., y_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (QY)^T A(QY) = Y^T Q^T AQY$$

або теж саме, що

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Y^T BY,$$

де $B = Q^T AQ$. Матриця B є симетричною матрицею, бо

$$B^T = (Q^T AQ)^T = Q^T A^T \left(Q^T\right)^T = Q^T AQ = B.$$

Це означає, що у результаті лінійного перетворення змінних з матрицею Q у квадратичній формі $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, $\dots$, x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, $\dots$, y_n:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (QY)^T A(QY) = Y^T Q^T AQY$$

або теж саме, що

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = Y^T BY,$$

де $B = Q^T AQ$. Матриця B є симетричною матрицею, бо

$$B^T = (Q^T AQ)^T = Q^T A^T \left(Q^T\right)^T = Q^T AQ = B.$$

Це означає, що у результаті лінійного перетворення змінних з матрицею Q у квадратичній формі $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ми одержали квадратичну форму

$$g(y_1, y_2, \dots, y_n) = Y^T BY$$

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, ..., x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, ..., y_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (QY)^T A(QY) = Y^T Q^T AQY$$

або теж саме, що

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Y^T BY,$$

де $B = Q^T AQ$. Матриця B є симетричною матрицею, бо

$$B^T = (Q^T AQ)^T = Q^T A^T \left(Q^T\right)^T = Q^T AQ = B.$$

Це означає, що у результаті лінійного перетворення змінних з матрицею Q у квадратичній формі $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ми одержали квадратичну форму

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = Y^T BY$$

з матрицею B, що дорівнює $Q^T AQ$.

Доведення.

Нехай $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — деяка квадратична форма над полем P і A — матриця цієї квадратичної форми. Тоді

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = X^T AX,$$

де X — стовпець змінних x_1, x_2, ..., x_n. Виконаємо невироджене лінійне перетворення змінних $X = QY$, де Y — стовпець нових змінних y_1, y_2, ..., y_n:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (QY)^T A(QY) = Y^T Q^T AQY$$

або теж саме, що

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Y^T BY,$$

де $B = Q^T AQ$. Матриця B є симетричною матрицею, бо

$$B^T = (Q^T AQ)^T = Q^T A^T \left(Q^T\right)^T = Q^T AQ = B.$$

Це означає, що у результаті лінійного перетворення змінних з матрицею Q у квадратичній формі $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ми одержали квадратичну форму

$$g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = Y^T BY$$

з матрицею B, що дорівнює $Q^T AQ$. Теорема доведена. □

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 13

Будемо говорити, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 13

Будемо говорити, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від змінних x_1, x_2, …, x_n над полем P еквівалентна

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 13

Будемо говорити, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P еквівалентна квадратичній формі $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від тих же змінних,

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 13

Будемо говорити, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n над полем P **еквівалентна** квадратичній формі $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від тих же змінних, якщо існує таке невироджене лінійне перетворення змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 13

Будемо говорити, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P еквівалентна квадратичній формі $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ від тих же змінних, якщо існує таке невироджене лінійне перетворення змінних x_1, x_2, ..., x_n у змінні y_1, y_2, ..., y_n,

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 13

Будемо говорити, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від змінних x_1, x_2, …, x_n над полем P **еквівалентна** квадратичній формі $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від тих же змінних, якщо існує таке невироджене лінійне перетворення змінних x_1, x_2, …, x_n у змінні y_1, y_2, …, y_n, що $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 13

Будемо говорити, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P еквівалентна квадратичній формі $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від тих же змінних, якщо існує таке невироджене лінійне перетворення змінних x_1, x_2, ..., x_n у змінні y_1, y_2, ..., y_n, що $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Еквівалентність квадратичних форм f і g позначатимемо значком $\sim$.

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 13

Будемо говорити, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n над полем P еквівалентна квадратичній формі $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від тих же змінних, якщо існує таке невироджене лінійне перетворення змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n у змінні y_1, y_2, $\ldots$, y_n, що $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Еквівалентність квадратичних форм f і g позначатимемо значком $\sim$.
Очевидним є наступне твердження.

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 13

Будемо говорити, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n над полем P еквівалентна квадратичній формі $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від тих же змінних, якщо існує таке невироджене лінійне перетворення змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n у змінні y_1, y_2, $\ldots$, y_n, що $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Еквівалентність квадратичних форм f і g позначатимемо значком $\sim$. Очевидним є наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай A і B — симетричні матриці порядку n над полем P.

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 13

Будемо говорити, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від змінних x_1, x_2, …, x_n над полем P еквівалентна квадратичній формі $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від тих же змінних, якщо існує таке невироджене лінійне перетворення змінних x_1, x_2, …, x_n у змінні y_1, y_2, …, y_n, що $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Еквівалентність квадратичних форм f і g позначатимемо значком $\sim$. Очевидним є наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай A і B — симетричні матриці порядку n над полем P. Квадратична форма з матрицею A еквівалентна квадратичній формі з матрицею B

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 13

Будемо говорити, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від змінних x_1, x_2, …, x_n над полем P **еквівалентна** квадратичній формі $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від тих же змінних, якщо існує таке невироджене лінійне перетворення змінних x_1, x_2, …, x_n у змінні y_1, y_2, …, y_n, що $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Еквівалентність квадратичних форм f і g позначатимемо значком $\sim$. Очевидним є наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай A і B — симетричні матриці порядку n над полем P. Квадратична форма з матрицею A еквівалентна квадратичній формі з матрицею B тоді і тільки тоді, коли існує така невироджена матриця S

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 13

Будемо говорити, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P **еквівалентна** квадратичній формі $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від тих же змінних, якщо існує таке невироджене лінійне перетворення змінних x_1, x_2, ..., x_n у змінні y_1, y_2, ..., y_n, що $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Еквівалентність квадратичних форм f і g позначатимемо значком $\sim$. Очевидним є наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай A і B — симетричні матриці порядку n над полем P. Квадратична форма з матрицею A еквівалентна квадратичній формі з матрицею B тоді і тільки тоді, коли існує така невироджена матриця S над полем P,

Сформульований вище закон зміни квадратичної форми дозволяє ввести наступне відношення між квадратичними формами.

Означення 13

Будемо говорити, що квадратична форма $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n над полем P еквівалентна квадратичній формі $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ від тих же змінних, якщо існує таке невироджене лінійне перетворення змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n у змінні y_1, y_2, $\ldots$, y_n, що $g(y_1, y_2, \ldots, y_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Еквівалентність квадратичних форм f і g позначатимемо значком $\sim$. Очевидним є наступне твердження.

Наслідок 1

Нехай A і B — симетричні матриці порядку n над полем P. Квадратична форма з матрицею A еквівалентна квадратичній формі з матрицею B тоді і тільки тоді, коли існує така невироджена матриця S над полем P, що $B = S^T AS$.

Завдання для самостійної роботи.

Відношення еквівалентності квадратичних форм задовольняє наступним властивостям:

Завдання для самостійної роботи.

Відношення еквівалентності квадратичних форм задовольняє наступним властивостям:

1. будь-яка квадратична форма f еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);

Завдання для самостійної роботи.

Відношення еквівалентності квадратичних форм задовольняє наступним властивостям:

1. будь-яка квадратична форма f еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);
2. якщо квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g, то g еквівалентна f (симетрична властивість);

Завдання для самостійної роботи.

Відношення еквівалентності квадратичних форм задовольняє наступним властивостям:

1. будь-яка квадратична форма f еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);
2. якщо квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g, то g еквівалентна f (симетрична властивість);
3. якщо квадратична форма f еквівалентна квадратичні формі g, яка в свою чергу еквівалентна квадратичні формі h, то квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі h (транзитивна влатисвість).

Завдання для самостійної роботи.

Відношення еквівалентності квадратичних форм задовольняє наступним властивостям:

1. будь-яка квадратична форма f еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);
2. якщо квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g, то g еквівалентна f (симетрична властивість);
3. якщо квадратична форма f еквівалентна квадратичні формі g, яка в свою чергу еквівалентна квадратичні формі h, то квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі h (транзитивна влатисвість).

Завдання для самостійної роботи.

Відношення еквівалентності квадратичних форм задовольняє наступним властивостям:

1. будь-яка квадратична форма f еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);
2. якщо квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g, то g еквівалентна f (симетрична властивість);
3. якщо квадратична форма f еквівалентна квадратичні формі g, яка в свою чергу еквівалентна квадратичні формі h, то квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі h (транзитивна влатисвість).

У наступній теоремі сформульовано необхідну умову еквівалентності квадратичних форм.

Завдання для самостійної роботи.

Відношення еквівалентності квадратичних форм задовольняє наступним властивостям:

1. будь-яка квадратична форма f еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);
2. якщо квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g, то g еквівалентна f (симетрична властивість);
3. якщо квадратична форма f еквівалентна квадратичні формі g, яка в свою чергу еквівалентна квадратичні формі h, то квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі h (транзитивна влатисвість).

У наступній теоремі сформульовано необхідну умову еквівалентності квадратичних форм.

Теорема 2 (про інваріантність рангу.)

Завдання для самостійної роботи.

Відношення еквівалентності квадратичних форм задовольняє наступним властивостям:

1. будь-яка квадратична форма f еквівалентна сама собі (рефлексивна властивість);
2. якщо квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g, то g еквівалентна f (симетрична властивість);
3. якщо квадратична форма f еквівалентна квадратичні формі g, яка в свою чергу еквівалентна квадратичні формі h, то квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі h (транзитивна влатисвість).

У наступній теоремі сформульовано необхідну умову еквівалентності квадратичних форм.

Теорема 2 (про інваріантність рангу.)

Еквівалентні квадратичні форми мають однакові ранги.

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних x_1, x_2, ..., x_n відповідно з матрицями A і B.
pause Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g.

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних x_1, x_2, ..., x_n відповідно з матрицями A і B.
pause Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Тоді за наслідком 1 існує невироджена матриця Q така,

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних x_1, x_2, ..., x_n відповідно з матрицями A і B.
pause Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Тоді за наслідком 1 існує невироджена матриця Q така, що $B = Q^T AQ$.

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно з матрицями A і B.

pause Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Тоді за наслідком 1 існує невироджена матриця Q така, що $B = Q^T AQ$.

Добре відомо, що ранг добутку двох матриць порядку n

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних x_1, x_2, ..., x_n відповідно з матрицями A і B.

pause Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Тоді за наслідком 1 існує невироджена матриця Q така, що $B = Q^T AQ$.

Добре відомо, що ранг добутку двох матриць порядку n співпадає з рангом одного із множників,

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних x_1, x_2, ..., x_n відповідно з матрицями A і B.
pause Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Тоді за наслідком 1 існує невироджена матриця Q така, що $B = Q^T AQ$.
Добре відомо, що ранг добутку двох матриць порядку n співпадає з рангом одного із множників, у разі якщо інший множник є невиродженою матрицею.

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних x_1, x_2, ..., x_n відповідно з матрицями A і B.

pause Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Тоді за наслідком 1 існує невироджена матриця Q така, що $B = Q^T AQ$.

Добре відомо, що ранг добутку двох матриць порядку n співпадає з рангом одного із множників, у разі якщо інший множник є невиродженою матрицею. Тому

$$\mathrm{rank} f =$$

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно з матрицями A і B.

pause Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Тоді за наслідком 1 існує невироджена матриця Q така, що $B = Q^T AQ$.

Добре відомо, що ранг добутку двох матриць порядку n співпадає з рангом одного із множників, у разі якщо інший множник є невиродженою матрицею. Тому

$$\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} A$$

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$ відповідно з матрицями A і B.

pause Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Тоді за наслідком 1 існує невироджена матриця Q така, що $B = Q^T AQ$.

Добре відомо, що ранг добутку двох матриць порядку n співпадає з рангом одного із множників, у разі якщо інший множник є невиродженою матрицею. Тому

$$\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} A = \mathrm{rank}(AQ)$$

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних x_1, x_2, ..., x_n відповідно з матрицями A і B.
pause Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Тоді за наслідком 1 існує невироджена матриця Q така, що $B = Q^T AQ$.
Добре відомо, що ранг добутку двох матриць порядку n співпадає з рангом одного із множників, у разі якщо інший множник є невиродженою матрицею. Тому

$$\text{rank} f = \text{rank} A = \text{rank}(AQ) = \text{rank}(Q^T(AQ))$$

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно з матрицями A і B.

pause Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Тоді за наслідком 1 існує невироджена матриця Q така, що $B = Q^T AQ$.

Добре відомо, що ранг добутку двох матриць порядку n співпадає з рангом одного із множників, у разі якщо інший множник є невиродженою матрицею. Тому

$$\text{rank} f = \text{rank} A = \text{rank}(AQ) = \text{rank}(Q^T (AQ)) = \text{rank} B$$

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ відповідно з матрицями A і B.
pause Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Тоді за наслідком 1 існує невироджена матриця Q така, що $B = Q^T AQ$.
Добре відомо, що ранг добутку двох матриць порядку n співпадає з рангом одного із множників, у разі якщо інший множник є невиродженою матрицею. Тому

$$\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} A = \mathrm{rank}(AQ) = \mathrm{rank}(Q^T(AQ)) = \mathrm{rank} B = \mathrm{rank} g.$$

Доведення.

Нехай f і g — квадратичні форми над полем P від змінних x_1, x_2, ..., x_n відповідно з матрицями A і B.

pause Припустимо, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Тоді за наслідком 1 існує невироджена матриця Q така, що $B = Q^T AQ$.

Добре відомо, що ранг добутку двох матриць порядку n співпадає з рангом одного із множників, у разі якщо інший множник є невиродженою матрицею. Тому

$$\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} A = \mathrm{rank}(AQ) = \mathrm{rank}(Q^T(AQ)) = \mathrm{rank} B = \mathrm{rank} g.$$

Теорема доведена. □

Рефлексивна, симетрична і транзитивна властивості відношення еквівалентності квадратичних форм означають, що множина всіх квадратичних форм від n змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P

Рефлексивна, симетрична і транзитивна властивості відношення еквівалентності квадратичних форм означають, що множина всіх квадратичних форм від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем P розбивається на класи еквівалентних квадратичних форм.

Рефлексивна, симетрична і транзитивна властивості відношення еквівалентності квадратичних форм означають, що множина всіх квадратичних форм від n змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P розбивається на класи еквівалентних квадратичних форм. Клас еквівалентних квадратичних форм складається із всіх квадратичних форм, Рефлексивна, симетрична і транзитивна властивості відношення еквівалентності квадратичних форм означають, що множина всіх квадратичних форм від n змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P розбивається на класи еквівалентних квадратичних форм. Клас еквівалентних квадратичних форм складається із всіх квадратичних форм, які попарно еквівалентні.

Рефлексивна, симетрична і транзитивна властивості відношення еквівалентності квадратичних форм означають, що множина всіх квадратичних форм від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем P розбивається на класи еквівалентних квадратичних форм. Клас еквівалентних квадратичних форм складається із всіх квадратичних форм, які попарно еквівалентні. Різні класи еквівалентних квадратичних форм не перетинаються.

Рефлексивна, симетрична і транзитивна властивості відношення еквівалентності квадратичних форм означають, що множина всіх квадратичних форм від n змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P розбивається на класи еквівалентних квадратичних форм. Клас еквівалентних квадратичних форм складається із всіх квадратичних форм, які попарно еквівалентні. Різні класи еквівалентних квадратичних форм не перетинаються. Провести класифікацію квадратичних форм це означає вибрати із кожного класу по одній квадратичній формі, Рефлексивна, симетрична і транзитивна властивості відношення еквівалентності квадратичних форм означають, що множина всіх квадратичних форм від n змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P розбивається на класи еквівалентних квадратичних форм. Клас еквівалентних квадратичних форм складається із всіх квадратичних форм, які попарно еквівалентні. Різні класи еквівалентних квадратичних форм не перетинаються. Провести класифікацію квадратичних форм це означає вибрати із кожного класу по одній квадратичній формі, які мали б найпростіший вигляд і по яких можна було б встановити прості критерії розпізнавання на еквівалентність квадратичних форм.

Рефлексивна, симетрична і транзитивна властивості відношення еквівалентності квадратичних форм означають, що множина всіх квадратичних форм від n змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P розбивається на класи еквівалентних квадратичних форм. Клас еквівалентних квадратичних форм складається із всіх квадратичних форм, які попарно еквівалентні. Різні класи еквівалентних квадратичних форм не перетинаються. Провести класифікацію квадратичних форм це означає вибрати із кожного класу по одній квадратичній формі, які мали б найпростіший вигляд і по яких можна було б встановити прості критерії розпізнавання на еквівалентність квадратичних форм. Найпростішою є квадратична форма вигляду

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2, \tag{4}$$

Рефлексивна, симетрична і транзитивна властивості відношення еквівалентності квадратичних форм означають, що множина всіх квадратичних форм від n змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P розбивається на класи еквівалентних квадратичних форм. Клас еквівалентних квадратичних форм складається із всіх квадратичних форм, які попарно еквівалентні. Різні класи еквівалентних квадратичних форм не перетинаються. Провести класифікацію квадратичних форм це означає вибрати із кожного класу по одній квадратичній формі, які мали б найпростіший вигляд і по яких можна було б встановити прості критерії розпізнавання на еквівалентність квадратичних форм. Найпростішою є квадратична форма вигляду

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2, \tag{4}$$

де α_1, ..., α_n деякі елементи поля P, Рефлексивна, симетрична і транзитивна властивості відношення еквівалентності квадратичних форм означають, що множина всіх квадратичних форм від n змінних x_1, x_2, . . . , x_n над полем P розбивається на класи еквівалентних квадратичних форм. Клас еквівалентних квадратичних форм складається із всіх квадратичних форм, які попарно еквівалентні. Різні класи еквівалентних квадратичних форм не перетинаються. Провести класифікацію квадратичних форм це означає вибрати із кожного класу по одній квадратичній формі, які мали б найпростіший вигляд і по яких можна було б встановити прості критерії розпізнавання на еквівалентність квадратичних форм. Найпростішою є квадратична форма вигляду

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2, \tag{4}$$

де α_1, . . . , α_n деякі елементи поля P, серед яких можуть бути і нульові елементи.

Рефлексивна, симетрична і транзитивна властивості відношення еквівалентності квадратичних форм означають, що множина всіх квадратичних форм від n змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P розбивається на класи еквівалентних квадратичних форм. Клас еквівалентних квадратичних форм складається із всіх квадратичних форм, які попарно еквівалентні. Різні класи еквівалентних квадратичних форм не перетинаються. Провести класифікацію квадратичних форм це означає вибрати із кожного класу по одній квадратичній формі, які мали б найпростіший вигляд і по яких можна було б встановити прості критерії розпізнавання на еквівалентність квадратичних форм. Найпростішою є квадратична форма вигляду

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2, \tag{4}$$

де α_1, ..., α_n деякі елементи поля P, серед яких можуть бути і нульові елементи.

Означення 14

Квадратична форма вигляду (4)

Рефлексивна, симетрична і транзитивна властивості відношення еквівалентності квадратичних форм означають, що множина всіх квадратичних форм від n змінних x_1, x_2, ..., x_n над полем P розбивається на класи еквівалентних квадратичних форм. Клас еквівалентних квадратичних форм складається із всіх квадратичних форм, які попарно еквівалентні. Різні класи еквівалентних квадратичних форм не перетинаються. Провести класифікацію квадратичних форм це означає вибрати із кожного класу по одній квадратичній формі, які мали б найпростіший вигляд і по яких можна було б встановити прості критерії розпізнавання на еквівалентність квадратичних форм. Найпростішою є квадратична форма вигляду

$$\alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2, \tag{4}$$

де α_1, ..., α_n деякі елементи поля P, серед яких можуть бути і нульові елементи.

Означення 14

Квадратична форма вигляду (4) називається квадратичною формою канонічного вигляду.

Матриця квадратичної форми (4) канонічного вигляду є діагональною матрицею

Матриця квадратичної форми (4) канонічного вигляду є діагональною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Матриця квадратичної форми (4) канонічного вигляду є діагональною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ранг квадратичної форми канонічного вигляду

Матриця квадратичної форми (4) канонічного вигляду є діагональною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ранг квадратичної форми канонічного вигляду дорівнює числу ненульових діагональних елементів матриці A,

Матриця квадратичної форми (4) канонічного вигляду є діагональною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ранг квадратичної форми канонічного вигляду дорівнює числу ненульових діагональних елементів матриці A, тобто дорівнює числу квадратів змінних квадратичної форми цього вигляду з ненульовими коефіцієнтами.

Матриця квадратичної форми (4) канонічного вигляду є діагональною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ранг квадратичної форми канонічного вигляду дорівнює числу ненульових діагональних елементів матриці A, тобто дорівнює числу квадратів змінних квадратичної форми цього вигляду з ненульовими коефіцієнтами.
Надалі поле, що є підмножиною поля комплексних чисел будемо називати числовим полем.

Матриця квадратичної форми (4) канонічного вигляду є діагональною матрицею

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Ранг квадратичної форми канонічного вигляду дорівнює числу ненульових діагональних елементів матриці A, тобто дорівнює числу квадратів змінних квадратичної форми цього вигляду з ненульовими коефіцієнтами.

Надалі поле, що є підмножиною поля комплексних чисел будемо називати числовим полем.

Теорема 3 (основна теорема про квадратичні форми.)

Будь-яка квадратична форма над числовим полем P еквівалентна квадратичній формі канонічного вигляду.

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних.

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.

Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм,

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n=1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.

Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм, число змінних яких менше за деяке фіксоване натуральне число k.

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.
Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм, число змінних яких менше за деяке фіксоване натуральне число k.
Розглянемо квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} x_i x_j$$

над полем P від k змінних $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.
Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм, число змінних яких менше за деяке фіксоване натуральне число k.
Розглянемо квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} x_i x_j$$

над полем P від k змінних $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Якщо всі коефіцієнти квадратичної форми f дорівнюють 0,

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.

Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм, число змінних яких менше за деяке фіксоване натуральне число k.

Розглянемо квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} x_i x_j$$

над полем P від k змінних $x_1, x_2, \dots, x_k$. Якщо всі коефіцієнти квадратичної форми f дорівнюють 0, то f є квадратичною формою канонічного вигляду.

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.
Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм, число змінних яких менше за деяке фіксоване натуральне число k.
Розглянемо квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} x_i x_j$$

над полем P від k змінних $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Якщо всі коефіцієнти квадратичної форми f дорівнюють 0, то f є квадратичною формою канонічного вигляду. У випадку, коли хоча б один з коефіцієнтів квадратичної форми відмінний від 0 розглянемо два випадки.

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.
Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм, число змінних яких менше за деяке фіксоване натуральне число k.
Розглянемо квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} x_i x_j$$

над полем P від k змінних $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Якщо всі коефіцієнти квадратичної форми f дорівнюють 0, то f є квадратичною формою канонічного вигляду.
У випадку, коли хоча б один з коефіцієнтів квадратичної форми відмінний від 0 розглянемо два випадки.
У першому випадку припустимо,

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.
Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм, число змінних яких менше за деяке фіксоване натуральне число k.
Розглянемо квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} x_i x_j$$

над полем P від k змінних x_1, x_2, $\dots$, x_k. Якщо всі коефіцієнти квадратичної форми f дорівнюють 0, то f є квадратичною формою канонічного вигляду.
У випадку, коли хоча б один з коефіцієнтів квадратичної форми відмінний від 0 розглянемо два випадки.
У першому випадку припустимо, що хоча б один із коефіцієнтів α_{11}, α_{22}, $\dots$, α_{kk},

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.
Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм, число змінних яких менше за деяке фіксоване натуральне число k.
Розглянемо квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} x_i x_j$$

над полем P від k змінних x_1, x_2, ..., x_k. Якщо всі коефіцієнти квадратичної форми f дорівнюють 0, то f є квадратичною формою канонічного вигляду.
У випадку, коли хоча б один з коефіцієнтів квадратичної форми відмінний від 0 розглянемо два випадки.
У першому випадку припустимо, що хоча б один із коефіцієнтів α_{11}, α_{22}, ..., α_{kk}, що знаходяться біля квадратів змінних,

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.
Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм, число змінних яких менше за деяке фіксоване натуральне число k.
Розглянемо квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} x_i x_j$$

над полем P від k змінних x_1, x_2, ..., x_k. Якщо всі коефіцієнти квадратичної форми f дорівнюють 0, то f є квадратичною формою канонічного вигляду.
У випадку, коли хоча б один з коефіцієнтів квадратичної форми відмінний від 0 розглянемо два випадки.
У першому випадку припустимо, що хоча б один із коефіцієнтів α_{11}, α_{22}, ..., α_{kk}, що знаходяться біля квадратів змінних, відмінний від 0.

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.
Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм, число змінних яких менше за деяке фіксоване натуральне число k.
Розглянемо квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} x_i x_j$$

над полем P від k змінних $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Якщо всі коефіцієнти квадратичної форми f дорівнюють 0, то f є квадратичною формою канонічного вигляду.
У випадку, коли хоча б один з коефіцієнтів квадратичної форми відмінний від 0 розглянемо два випадки.
У першому випадку припустимо, що хоча б один із коефіцієнтів α_{11}, α_{22}, $\ldots$, α_{kk}, що знаходяться біля квадратів змінних, відмінний від 0. Нехай, наприклад, $\alpha_{11} \neq 0$.

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.

Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм, число змінних яких менше за деяке фіксоване натуральне число k.

Розглянемо квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} x_i x_j$$

над полем P від k змінних $x_1, x_2, \ldots, x_k$. Якщо всі коефіцієнти квадратичної форми f дорівнюють 0, то f є квадратичною формою канонічного вигляду. У випадку, коли хоча б один з коефіцієнтів квадратичної форми відмінний від 0 розглянемо два випадки.

У першому випадку припустимо, що хоча б один із коефіцієнтів α_{11}, α_{22}, $\ldots$, α_{kk}, що знаходяться біля квадратів змінних, відмінний від 0. Нехай, наприклад, $\alpha_{11} \neq 0$. Тоді алгебраїчний вираз

$$f - \frac{1}{a_{11}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1k}x_k)^2 \qquad (5)$$

Доведення.

Доведення теореми поведемо методом математичної індукції за числом n змінних. Очевидно у випадку $n = 1$ довільна квадратична форма від однієї змінної x має вигляд αx^2, який є канонічним виглядом.

Припустимо, що ця теорема справджується для всіх квадратичних форм, число змінних яких менше за деяке фіксоване натуральне число k.

Розглянемо квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{k} \alpha_{ij} x_i x_j$$

над полем P від k змінних x_1, x_2, ..., x_k. Якщо всі коефіцієнти квадратичної форми f дорівнюють 0, то f є квадратичною формою канонічного вигляду. У випадку, коли хоча б один з коефіцієнтів квадратичної форми відмінний від 0 розглянемо два випадки.

У першому випадку припустимо, що хоча б один із коефіцієнтів α_{11}, α_{22}, ..., α_{kk}, що знаходяться біля квадратів змінних, відмінний від 0. Нехай, наприклад, $\alpha_{11} \neq 0$. Тоді алгебраїчний вираз

$$f - \frac{1}{a_{11}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1k}x_k)^2 \qquad (5)$$

є квадратичною формою, яку можна трактувати як квадратичну форму лише від змінних x_2, ..., x_k.

Доведення.

Позначимо цю квадратичну форму через g

Доведення.

Позначимо цю квадратичну форму через g і нехай

$$g = \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

Доведення.

Позначимо цю квадратичну форму через g і нехай

$$g = \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

для деяких коефіцієнтів β_{ij} із поля P.

Доведення.

Позначимо цю квадратичну форму через g і нехай

$$g = \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

для деяких коефіцієнтів β_{ij} із поля P. Якщо ж $\alpha_{ii} \neq 0$,

Доведення.

Позначимо цю квадратичну форму через g і нехай

$$g = \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

для деяких коефіцієнтів β_{ij} із поля P. Якщо ж $\alpha_{ii} \neq 0$, де $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$, то розглядаючи аналогічний (5) алгебраїчний вираз

Доведення.

Позначимо цю квадратичну форму через g і нехай

$$g = \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

для деяких коефіцієнтів β_{ij} із поля P. Якщо ж $\alpha_{ii} \neq 0$, де $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$, то розглядаючи аналогічний (5) алгебраїчний вираз

$$f - \frac{1}{\alpha_{ii}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1k}x_k)^2,$$

Доведення.

Позначимо цю квадратичну форму через g і нехай

$$g = \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

для деяких коефіцієнтів β_{ij} із поля P. Якщо ж $\alpha_{ii} \neq 0$, де $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$, то розглядаючи аналогічний (5) алгебраїчний вираз

$$f - \frac{1}{\alpha_{ii}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1k}x_k)^2,$$

ми одержимо квадратичну форму лише від змінних $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_k$

Доведення.

Позначимо цю квадратичну форму через g і нехай

$$g = \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

для деяких коефіцієнтів β_{ij} із поля P. Якщо ж $\alpha_{ii} \neq 0$, де $i \in \{2, 3, \ldots, k\}$, то розглядаючи аналогічний (5) алгебраїчний вираз

$$f - \frac{1}{\alpha_{ii}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1k}x_k)^2,$$

ми одержимо квадратичну форму лише від змінних $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots x_k$ і проводимо подальші міркування аналогічно, як у випадку $\alpha_{11} \neq 0$.

Доведення.

Позначимо цю квадратичну форму через g і нехай

$$g = \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

для деяких коефіцієнтів β_{ij} із поля P. Якщо ж $\alpha_{ii} \neq 0$, де $i \in \{2, 3, \dots, k\}$, то розглядаючи аналогічний (5) алгебраїчний вираз

$$f - \frac{1}{\alpha_{ii}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1k}x_k)^2,$$

ми одержимо квадратичну форму лише від змінних $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_k$ і проводимо подальші міркування аналогічно, як у випадку $\alpha_{11} \neq 0$. Далі, із (5) слідує, що

$$f = \frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1k}x_k)^2 + g.$$

Доведення.

Позначимо цю квадратичну форму через g і нехай

$$g = \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j \tag{6}$$

для деяких коефіцієнтів β_{ij} із поля P. Якщо ж $\alpha_{ii} \neq 0$, де $i \in \{2, 3, \dots, k\}$, то розглядаючи аналогічний (5) алгебраїчний вираз

$$f - \frac{1}{\alpha_{ii}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1k}x_k)^2,$$

ми одержимо квадратичну форму лише від змінних $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots x_k$ і проводимо подальші міркування аналогічно, як у випадку $\alpha_{11} \neq 0$. Далі, із (5) слідує, що

$$f = \frac{1}{\alpha_{11}}(\alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1k}x_k)^2 + g.$$

Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \cdots + \alpha_{1k}x_k, \\ y_2 &= x_2, \\ &\cdots\cdots \\ y_k &= x_k. \end{aligned} \tag{7}$$

Доведення.

Детермінант матриці

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1k} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

цього перетворення

Доведення.

Детермінант матриці

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1k} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

цього перетворення дорівнює a_{11}.

Доведення.

Детермінант матриці

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1k} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

цього перетворення дорівнює a_{11}. Тому лінійне перетворення змінних (7) є невиродженим.

Доведення.

Детермінант матриці

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1k} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

цього перетворення дорівнює a_{11}. Тому лінійне перетворення змінних (7) є невиродженим. Виконаємо обернене до (7) лінійне перетворення змінних у квадратичній формі f,

Доведення.

Детермінант матриці

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1k} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

цього перетворення дорівнює a_{11}. Тому лінійне перетворення змінних (7) є невиродженим. Виконаємо обернене до (7) лінійне перетворення змінних у квадратичній формі f, тобто лінійне перетворення

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}} y_1 - \frac{\alpha_{12}}{a_{11}} y_2 - \dots - \frac{\alpha_{1k}}{a_{11}} y_k, \\ x_2 &= y_2, \\ &\dots\dots \\ x_k &= y_k. \end{aligned}$$

Доведення.

Детермінант матриці

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1k} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

цього перетворення дорівнює a_{11}. Тому лінійне перетворення змінних (7) є невиродженим. Виконаємо обернене до (7) лінійне перетворення змінних у квадратичній формі f, тобто лінійне перетворення

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{a_{11}}y_1 - \tfrac{\alpha_{12}}{a_{11}}y_2 - \dots - \tfrac{\alpha_{1k}}{a_{11}}y_k, \\ x_2 &= y_2, \\ &\dots\dots \\ x_k &= y_k. \end{aligned}$$

У результаті ми одержимо квадратичну форму

$$\frac{1}{\alpha_{11}}y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij}y_iy_j$$

Доведення.

Детермінант матриці

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \dots & \alpha_{1k} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

цього перетворення дорівнює a_{11}. Тому лінійне перетворення змінних (7) є невиродженим. Виконаємо обернене до (7) лінійне перетворення змінних у квадратичній формі f, тобто лінійне перетворення

$$\begin{aligned} &x_1 = \tfrac{1}{a_{11}} y_1 - \tfrac{\alpha_{12}}{a_{11}} y_2 - \dots - \tfrac{\alpha_{1k}}{a_{11}} y_k, \\ &x_2 = y_2, \\ &\;\ldots\ldots \\ &x_k = y_k. \end{aligned}$$

У результаті ми одержимо квадратичну форму

$$\tfrac{1}{\alpha_{11}} y_1^2 + \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} y_i y_j$$

(див. позначення (6)).

Доведення.

Це означає, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі

$$h = \frac{1}{\alpha_{11}} x_1^2 + \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j.$$

Доведення.

Це означає, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі

$$h = \frac{1}{\alpha_{11}} x_1^2 + \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j.$$

За припущенням індукції існує невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_2 &= \tau_{22} z_2 + \cdots + \tau_{2n} z_k, \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k &= \tau_{k2} z_2 + \cdots + \tau_{kk} z_k \end{aligned}$$

для деяких $\tau_{ij} \in P$, за допомогою якого із квадратичної форми g

Доведення.

Це означає, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі

$$h = \frac{1}{\alpha_{11}} x_1^2 + \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j.$$

За припущенням індукції існує невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_2 &= \tau_{22} z_2 + \cdots + \tau_{2n} z_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k &= \tau_{k2} z_2 + \cdots + \tau_{kk} z_k \end{aligned}$$

для деяких $\tau_{ij} \in P$, за допомогою якого із квадратичної форми g можна одержати квадратичну форму канонічного вигляду

$$\gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \cdots + \gamma_k z_k^2,$$

Доведення.

Це означає, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі

$$h = \frac{1}{\alpha_{11}} x_1^2 + \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j.$$

За припущенням індукції існує невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_2 &= \tau_{22} z_2 + \cdots + \tau_{2n} z_k, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_k &= \tau_{k2} z_2 + \cdots + \tau_{kk} z_k \end{aligned}$$

для деяких $\tau_{ij} \in P$, за допомогою якого із квадратичної форми g можна одержати квадратичну форму канонічного вигляду

$$\gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \cdots + \gamma_k z_k^2,$$

де $\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_k \in P$.

Доведення.

Це означає, що квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі

$$h = \frac{1}{\alpha_{11}} x_1^2 + \sum_{i,j=2}^{k} \beta_{ij} x_i x_j.$$

За припущенням індукції існує невироджене лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_2 &= \tau_{22} z_2 + \cdots + \tau_{2n} z_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k &= \tau_{k2} z_2 + \cdots + \tau_{kk} z_k \end{aligned}$$

для деяких $\tau_{ij} \in P$, за допомогою якого із квадратичної форми g можна одержати квадратичну форму канонічного вигляду

$$\gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \cdots + \gamma_k z_k^2,$$

де $\gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_k \in P$. Тепер розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$\begin{aligned} x_1 &= z_1, \\ x_2 &= \tau_{22} z_2 + \cdots + \tau_{2n} z_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k &= \tau_{k2} z_2 + \cdots + \tau_{kk} z_k, \end{aligned}$$

яке, очевидно, є невиродженим лінійним перетворенням невідомих.

Доведення.

Виконаємо це лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h.

Доведення.

Виконаємо це лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h. Ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$\frac{1}{a_{11}}z_1^2 + \gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \cdots + \gamma_k z_k^2,$$

Доведення.

Виконаємо це лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h. Ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$\frac{1}{a_{11}} z_1^2 + \gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \cdots + \gamma_k z_k^2,$$

що завершує доведення теореми у цьому випадку.

Доведення.

Виконаємо це лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h. Ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$\frac{1}{a_{11}}z_1^2 + \gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \cdots + \gamma_k z_k^2,$$

що завершує доведення теореми у цьому випадку.
Насамкінець розглянемо випадок, коли

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{kk} = 0,$$

Доведення.

Виконаємо це лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h. Ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$\frac{1}{a_{11}}z_1^2 + \gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \cdots + \gamma_k z_k^2,$$

що завершує доведення теореми у цьому випадку.
Насамкінець розглянемо випадок, коли

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{kk} = 0,$$

тобто коли всі коефіцієнти біля квадратів невідомих квадратичної форми f дорівнюють 0.

Доведення.

Виконаємо це лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h. Ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$\frac{1}{a_{11}} z_1^2 + \gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \cdots + \gamma_k z_k^2,$$

що завершує доведення теореми у цьому випадку.
Насамкінець розглянемо випадок, коли

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{kk} = 0,$$

тобто коли всі коефіцієнти біля квадратів невідомих квадратичної форми f дорівнюють 0. Тоді знайдуться такі різні індекси q та $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$,

Доведення.

Виконаємо це лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h. Ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$\frac{1}{a_{11}} z_1^2 + \gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \cdots + \gamma_k z_k^2,$$

що завершує доведення теореми у цьому випадку.
Насамкінець розглянемо випадок, коли

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{kk} = 0,$$

тобто коли всі коефіцієнти біля квадратів невідомих квадратичної форми f дорівнюють 0. Тоді знайдуться такі різні індекси q та $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$, що $\alpha_{qr} \neq 0$.

Доведення.

Виконаємо це лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h. Ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$\frac{1}{a_{11}} z_1^2 + \gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \cdots + \gamma_k z_k^2,$$

що завершує доведення теореми у цьому випадку.
Насамкінець розглянемо випадок, коли

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{kk} = 0,$$

тобто коли всі коефіцієнти біля квадратів невідомих квадратичної форми f дорівнюють 0. Тоді знайдуться такі різні індекси q та $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$, що $\alpha_{qr} \neq 0$. Не зменшуючи загальності доведення теореми вважатимемо, що $\alpha_{12} \neq 0$.

Доведення.

Виконаємо це лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h. Ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$\frac{1}{a_{11}}z_1^2 + \gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \cdots + \gamma_k z_k^2,$$

що завершує доведення теореми у цьому випадку.
Насамкінець розглянемо випадок, коли

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{kk} = 0,$$

тобто коли всі коефіцієнти біля квадратів невідомих квадратичної форми f дорівнюють 0. Тоді знайдуться такі різні індекси q та $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$, що $\alpha_{qr} \neq 0$. Не зменшуючи загальності доведення теореми вважатимемо, що $\alpha_{12} \neq 0$.
Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_1 + u_2, \quad x_3 = u_3, \quad \ldots, \quad x_k = u_k.$$

Доведення.

Виконаємо це лінійне перетворення змінних у квадратичній формі h. Ми одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$\frac{1}{a_{11}}z_1^2 + \gamma_2 z_2^2 + \gamma_3 z_3^2 + \cdots + \gamma_k z_k^2,$$

що завершує доведення теореми у цьому випадку.
Насамкінець розглянемо випадок, коли

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \ldots = \alpha_{kk} = 0,$$

тобто коли всі коефіцієнти біля квадратів невідомих квадратичної форми f дорівнюють 0. Тоді знайдуться такі різні індекси q та $r \in \{1, 2, \ldots, k\}$, що $\alpha_{qr} \neq 0$. Не зменшуючи загальності доведення теореми вважатимемо, що $\alpha_{12} \neq 0$.
Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_1 + u_2, \quad x_3 = u_3, \quad \ldots, \quad x_k = u_k.$$

Доведення.

Воно є невиродженим, оскільки має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

Доведення.

Воно є невиродженим, оскільки має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

детермінант якої дорівнює $1 \neq 0$.

Доведення.

Воно є невиродженим, оскільки має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

детермінант якої дорівнює $1 \neq 0$. У результаті цього перетворення член $2a_{12}x_1x_2$ квадратичної форми f

Доведення.

Воно є невиродженим, оскільки має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

детермінант якої дорівнює $1 \neq 0$. У результаті цього перетворення член $2a_{12}x_1x_2$ квадратичної форми f набуде вигляду

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}u_1(u_1 + x_2) = 2a_{12}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2.$$

Доведення.

Воно є невиродженим, оскільки має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

детермінант якої дорівнює $1 \neq 0$. У результаті цього перетворення член $2a_{12}x_1x_2$ квадратичної форми f набуде вигляду

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}u_1(u_1 + x_2) = 2a_{12}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2.$$

Це означає, що у одержаній після перетворення змінних квадратичній формі з'явиться член з ненульовим коефіцієнтом з квадратом невідомого.

Доведення.

Воно є невиродженим, оскільки має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix},$$

детермінант якої дорівнює $1 \neq 0$. У результаті цього перетворення член $2a_{12}x_1x_2$ квадратичної форми f набуде вигляду

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}u_1(u_1 + x_2) = 2a_{12}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2.$$

Це означає, що у одержаній після перетворення змінних квадратичній формі з'явиться член з ненульовим коефіцієнтом з квадратом невідомого. Цей член «не скоротиться» після спрощення ні з одним з інших членів,

Доведення.

Воно є невиродженим, оскільки має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

детермінант якої дорівнює $1 \neq 0$. У результаті цього перетворення член $2a_{12}x_1x_2$ квадратичної форми f набуде вигляду

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}u_1(u_1 + x_2) = 2a_{12}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2.$$

Це означає, що у одержаній після перетворення змінних квадратичній формі з'явиться член з ненульовим коефіцієнтом з квадратом невідомого. Цей член «не скоротиться» після спрощення ні з одним з інших членів, оскільки у кожному з них присутній хоча б один із невідомих $u_3, u_4, \dots, u_k$.

Доведення.

Воно є невиродженим, оскільки має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

детермінант якої дорівнює $1 \neq 0$. У результаті цього перетворення член $2a_{12}x_1x_2$ квадратичної форми f набуде вигляду

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}u_1(u_1 + x_2) = 2a_{12}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2.$$

Це означає, що у одержаній після перетворення змінних квадратичній формі з'явиться член з ненульовим коефіцієнтом з квадратом невідомого. Цей член «не скоротиться» після спрощення ні з одним з інших членів, оскільки у кожному з них присутній хоча б один із невідомих u_3, u_4, …, u_k. Отже, доведення теореми у цьому випадку звелося до випадку, що розглядався раніше.

Доведення.

Воно є невиродженим, оскільки має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

детермінант якої дорівнює $1 \neq 0$. У результаті цього перетворення член $2a_{12}x_1x_2$ квадратичної форми f набуде вигляду

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}u_1(u_1 + x_2) = 2a_{12}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2.$$

Це означає, що у одержаній після перетворення змінних квадратичній формі з'явиться член з ненульовим коефіцієнтом з квадратом невідомого. Цей член «не скоротиться» після спрощення ні з одним з інших членів, оскільки у кожному з них присутній хоча б один із невідомих u_3, u_4, ..., u_k. Отже, доведення теореми у цьому випадку звелося до випадку, що розглядався раніше. Теорема доведена.

Доведення.

Воно є невиродженим, оскільки має матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

детермінант якої дорівнює $1 \neq 0$. У результаті цього перетворення член $2a_{12}x_1x_2$ квадратичної форми f набуде вигляду

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}u_1(u_1 + x_2) = 2a_{12}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2.$$

Це означає, що у одержаній після перетворення змінних квадратичній формі з'явиться член з ненульовим коефіцієнтом з квадратом невідомого. Цей член «не скоротиться» після спрощення ні з одним з інших членів, оскільки у кожному з них присутній хоча б один із невідомих u_3, u_4, ..., u_k. Отже, доведення теореми у цьому випадку звелося до випадку, що розглядався раніше. Теорема доведена. □

Зауваження 1

Зауважимо, що хоча основна теорема про квадратичні форми сформульована для квадратичних форм над числовими полями, її твердження є правильним для довільного поля, характеристика якого не дорівнює 2.

Зауваження 1

Зауважимо, що хоча основна теорема про квадратичні форми сформульована для квадратичних форм над числовими полями, її твердження є правильним для довільного поля, характеристика якого не дорівнює 2.
Основна теорема про квадратичні форми не дає завершеної класифікації квадратичних форм.

Зауваження 1

Зауважимо, що хоча основна теорема про квадратичні форми сформульована для квадратичних форм над числовими полями, її твердження є правильним для довільного поля, характеристика якого не дорівнює 2.

Основна теорема про квадратичні форми не дає завершеної класифікації квадратичних форм. Справа в тім, що різні квадратичні форми канонічного вигляду можуть бути еквівалентними одна одній.

Зауваження 1

Зауважимо, що хоча основна теорема про квадратичні форми сформульована для квадратичних форм над числовими полями, її твердження є правильним для довільного поля, характеристика якого не дорівнює 2.
Основна теорема про квадратичні форми не дає завершеної класифікації квадратичних форм. Справа в тім, що різні квадратичні форми канонічного вигляду можуть бути еквівалентними одна одній. Інакше кажучи, одну і ту ж квадратичну форму можна звести до декількох канонічних виглядів за допомогою невироджених лінійних перетворень змінних.

Зауваження 1

Зауважимо, що хоча основна теорема про квадратичні форми сформульована для квадратичних форм над числовими полями, її твердження є правильним для довільного поля, характеристика якого не дорівнює 2.
Основна теорема про квадратичні форми не дає завершеної класифікації квадратичних форм. Справа в тім, що різні квадратичні форми канонічного вигляду можуть бути еквівалентними одна одній. Інакше кажучи, одну і ту ж квадратичну форму можна звести до декількох канонічних виглядів за допомогою невироджених лінійних перетворень змінних. Відмітимо, що у всіх цих квадратичних формах канонічного вигляду спільним буде число квадратів з ненульовими коефіцієнтами.

Зауваження 1

Зауважимо, що хоча основна теорема про квадратичні форми сформульована для квадратичних форм над числовими полями, її твердження є правильним для довільного поля, характеристика якого не дорівнює 2.
Основна теорема про квадратичні форми не дає завершеної класифікації квадратичних форм. Справа в тім, що різні квадратичні форми канонічного вигляду можуть бути еквівалентними одна одній. Інакше кажучи, одну і ту ж квадратичну форму можна звести до декількох канонічних виглядів за допомогою невироджених лінійних перетворень змінних. Відмітимо, що у всіх цих квадратичних формах канонічного вигляду спільним буде число квадратів з ненульовими коефіцієнтами.
Продовження класифікації квадратичних форм над полем P залежить від специфіки поля P.

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Розглянемо дійсну квадратичну форму від змінних x_1, x_2, x_3

$$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 20x_1x_3 + 11x_2^2 - 22x_2x_3 + 82x_3^2.$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Розглянемо дійсну квадратичну форму від змінних x_1, x_2, x_3

$$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 20x_1x_3 + 11x_2^2 - 22x_2x_3 + 82x_3^2.$$

Випишемо матрицю цієї квадратичної форми

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Розглянемо дійсну квадратичну форму від змінних x_1, x_2, x_3

$$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 20x_1x_3 + 11x_2^2 - 22x_2x_3 + 82x_3^2.$$

Випишемо матрицю цієї квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 10 \\ & & \\ & & \end{pmatrix}$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Розглянемо дійсну квадратичну форму від змінних x_1, x_2, x_3

$$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 20x_1x_3 + 11x_2^2 - 22x_2x_3 + 82x_3^2.$$

Випишемо матрицю цієї квадратичної форми

$$A = \left(\begin{array}{rrr} 2 & -4 & 10 \\ -4 & 11 & -11 \\ & & \end{array} \right.$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Розглянемо дійсну квадратичну форму від змінних x_1, x_2, x_3

$$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 20x_1x_3 + 11x_2^2 - 22x_2x_3 + 82x_3^2.$$

Випишемо матрицю цієї квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 10 \\ -4 & 11 & -11 \\ 10 & -11 & 82 \end{pmatrix}.$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Розглянемо дійсну квадратичну форму від змінних x_1, x_2, x_3

$$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 20x_1x_3 + 11x_2^2 - 22x_2x_3 + 82x_3^2.$$

Випишемо матрицю цієї квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 10 \\ -4 & 11 & -11 \\ 10 & -11 & 82 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо лінійне перетворення змінних, обернене до наступного

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Розглянемо дійсну квадратичну форму від змінних x_1, x_2, x_3

$$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 20x_1x_3 + 11x_2^2 - 22x_2x_3 + 82x_3^2.$$

Випишемо матрицю цієї квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 10 \\ -4 & 11 & -11 \\ 10 & -11 & 82 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо лінійне перетворення змінних, обернене до наступного

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 4x_2 + 10x_3, \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Розглянемо дійсну квадратичну форму від змінних x_1, x_2, x_3

$$2x_1^2 - 8x_1x_2 + 20x_1x_3 + 11x_2^2 - 22x_2x_3 + 82x_3^2.$$

Випишемо матрицю цієї квадратичної форми

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 10 \\ -4 & 11 & -11 \\ 10 & -11 & 82 \end{pmatrix}.$$

Виконаємо лінійне перетворення змінних, обернене до наступного

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 - 4x_2 + 10x_3, \\ y_2 &= x_2, \\ y_3 &= x_3. \end{aligned}$$

Тобто перетворення

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3, \\ x_2 &= y_2, \\ x_3 &= y_3. \end{aligned}$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Одержимо квадратичну форму

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Одержимо квадратичну форму

$$2(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)^2 - 8(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_2 + 20(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_3 +$$
$$+ 11y_2^2 - 22y_2y_3 + 82y_3^2$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Одержимо квадратичну форму

$$2(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)^2 - 8(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_2 + 20(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_3 +$$

$$+ 11y_2^2 - 22y_2y_3 + 82y_3^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}y_1^2 + 8y_2^2 + 50y_3^2 + 4y_1y_2 - 10y_1y_3 - 40y_2y_3$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Одержимо квадратичну форму

$$2(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)^2 - 8(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_2 + 20(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_3 +$$

$$+ 11y_2^2 - 22y_2y_3 + 82y_3^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}y_1^2 + 8y_2^2 + 50y_3^2 + 4y_1y_2 - 10y_1y_3 - 40y_2y_3 -$$

$$- 4y_1y_2 - 16y_2^2 + 40y_2y_3$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Одержимо квадратичну форму

$$2(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)^2 - 8(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_2 + 20(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_3 +$$

$$+ 11y_2^2 - 22y_2y_3 + 82y_3^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}y_1^2 + 8y_2^2 + 50y_3^2 + 4y_1y_2 - 10y_1y_3 - 40y_2y_3 -$$

$$- 4y_1y_2 - 16y_2^2 + 40y_2y_3 + 10y_1y_3 + 40y_2y_3 - 100y_3^2$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Одержимо квадратичну форму

$$2(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)^2 - 8(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_2 + 20(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_3 +$$

$$+ 11y_2^2 - 22y_2y_3 + 82y_3^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}y_1^2 + 8y_2^2 + 50y_3^2 + 4y_1y_2 - 10y_1y_3 - 40y_2y_3 -$$

$$- 4y_1y_2 - 16y_2^2 + 40y_2y_3 + 10y_1y_3 + 40y_2y_3 - 100y_3^2 +$$

$$+ 11y_2^2 - 22y_2y_3 + 82y_3^2$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Одержимо квадратичну форму

$$2(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)^2 - 8(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_2 + 20(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_3 +$$

$$+ 11y_2^2 - 22y_2y_3 + 82y_3^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}y_1^2 + 8y_2^2 + 50y_3^2 + 4y_1y_2 - 10y_1y_3 - 40y_2y_3 -$$

$$- 4y_1y_2 - 16y_2^2 + 40y_2y_3 + 10y_1y_3 + 40y_2y_3 - 100y_3^2 +$$

$$+ 11y_2^2 - 22y_2y_3 + 82y_3^2 = \tfrac{1}{2}y_1^2 + 3y_2^2 + 18y_2y_3 + 32y_3^2$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Одержимо квадратичну форму

$$2(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)^2 - 8(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_2 + 20(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_3 +$$

$$+ 11y_2^2 - 22y_2y_3 + 82y_3^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}y_1^2 + 8y_2^2 + 50y_3^2 + 4y_1y_2 - 10y_1y_3 - 40y_2y_3 -$$

$$- 4y_1y_2 - 16y_2^2 + 40y_2y_3 + 10y_1y_3 + 40y_2y_3 - 100y_3^2 +$$

$$+ 11y_2^2 - 22y_2y_3 + 82y_3^2 = \tfrac{1}{2}y_1^2 + 3y_2^2 + 18y_2y_3 + 32y_3^2$$

з матрицею

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 32 \end{pmatrix}$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Одержимо квадратичну форму

$$2(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)^2 - 8(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_2 + 20(\tfrac{1}{2}y_1 + 2y_2 - 5y_3)y_3 +$$

$$+ 11y_2^2 - 22y_2y_3 + 82y_3^2 =$$

$$= \tfrac{1}{2}y_1^2 + 8y_2^2 + 50y_3^2 + 4y_1y_2 - 10y_1y_3 - 40y_2y_3 -$$

$$- 4y_1y_2 - 16y_2^2 + 40y_2y_3 + 10y_1y_3 + 40y_2y_3 - 100y_3^2 +$$

$$+ 11y_2^2 - 22y_2y_3 + 82y_3^2 = \tfrac{1}{2}y_1^2 + 3y_2^2 + 18y_2y_3 + 32y_3^2$$

з матрицею

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 32 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 & 10 \\ -4 & 11 & -11 \\ 10 & -11 & 82 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Тепер у квадратичній формі

$$\frac{1}{2}y_1^2 + 3y_2^2 + 18y_2y_3 + 32y_3^2$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Тепер у квадратичній формі

$$\frac{1}{2}y_1^2 + 3y_2^2 + 18y_2y_3 + 32y_3^2$$

виконаємо лінійне перетворення змінних, обернене до наступного

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Тепер у квадратичній формі

$$\frac{1}{2}y_1^2 + 3y_2^2 + 18y_2y_3 + 32y_3^2$$

виконаємо лінійне перетворення змінних, обернене до наступного

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1, \\ z_2 &= 3y_2 + 9y_3, \\ z_3 &= y_3. \end{aligned}$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Тепер у квадратичній формі

$$\frac{1}{2}y_1^2 + 3y_2^2 + 18y_2y_3 + 32y_3^2$$

виконаємо лінійне перетворення змінних, обернене до наступного

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1, \\ z_2 &= 3y_2 + 9y_3, \\ z_3 &= y_3. \end{aligned}$$

Тобто перетворення

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1, \\ y_2 &= \frac{1}{3}z_2 - 3z_3, \\ y_3 &= z_3. \end{aligned}$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Тепер у квадратичній формі

$$\frac{1}{2}y_1^2 + 3y_2^2 + 18y_2y_3 + 32y_3^2$$

виконаємо лінійне перетворення змінних, обернене до наступного

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1, \\ z_2 &= 3y_2 + 9y_3, \\ z_3 &= y_3. \end{aligned}$$

Тобто перетворення

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1, \\ y_2 &= \frac{1}{3}z_2 - 3z_3, \\ y_3 &= z_3. \end{aligned}$$

Одержимо квадратичну форму

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Тепер у квадратичній формі

$$\frac{1}{2}y_1^2 + 3y_2^2 + 18y_2y_3 + 32y_3^2$$

виконаємо лінійне перетворення змінних, обернене до наступного

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1, \\ z_2 &= 3y_2 + 9y_3, \\ z_3 &= y_3. \end{aligned}$$

Тобто перетворення

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1, \\ y_2 &= \frac{1}{3}z_2 - 3z_3, \\ y_3 &= z_3. \end{aligned}$$

Одержимо квадратичну форму

$$\frac{1}{2}z_1^2 + 3(\frac{1}{3}z_2 - 3z_3)^2 + 18(\frac{1}{3}z_2 - 3z_3)z_3 + 32z_3^2$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Тепер у квадратичній формі

$$\frac{1}{2}y_1^2 + 3y_2^2 + 18y_2y_3 + 32y_3^2$$

виконаємо лінійне перетворення змінних, обернене до наступного

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1, \\ z_2 &= 3y_2 + 9y_3, \\ z_3 &= y_3. \end{aligned}$$

Тобто перетворення

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1, \\ y_2 &= \frac{1}{3}z_2 - 3z_3, \\ y_3 &= z_3. \end{aligned}$$

Одержимо квадратичну форму

$$\frac{1}{2}z_1^2 + 3(\frac{1}{3}z_2 - 3z_3)^2 + 18(\frac{1}{3}z_2 - 3z_3)z_3 + 32z_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{3}z_2^2 - 6z_2z_3 + 27z_3^2 + 6z_2z_3 - 54z_3^2 + 32z_3^2$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Тепер у квадратичній формі

$$\frac{1}{2}y_1^2 + 3y_2^2 + 18y_2y_3 + 32y_3^2$$

виконаємо лінійне перетворення змінних, обернене до наступного

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1, \\ z_2 &= 3y_2 + 9y_3, \\ z_3 &= y_3. \end{aligned}$$

Тобто перетворення

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1, \\ y_2 &= \frac{1}{3}z_2 - 3z_3, \\ y_3 &= z_3. \end{aligned}$$

Одержимо квадратичну форму

$$\frac{1}{2}z_1^2 + 3(\frac{1}{3}z_2 - 3z_3)^2 + 18(\frac{1}{3}z_2 - 3z_3)z_3 + 32z_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{3}z_2^2 - 6z_2z_3 + 27z_3^2 + 6z_2z_3 - 54z_3^2 + 32z_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{3}z_2^2 + 5z_3^2$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Тепер у квадратичній формі

$$\frac{1}{2}y_1^2 + 3y_2^2 + 18y_2y_3 + 32y_3^2$$

виконаємо лінійне перетворення змінних, обернене до наступного

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1, \\ z_2 &= 3y_2 + 9y_3, \\ z_3 &= y_3. \end{aligned}$$

Тобто перетворення

$$\begin{aligned} y_1 &= z_1, \\ y_2 &= \frac{1}{3}z_2 - 3z_3, \\ y_3 &= z_3. \end{aligned}$$

Одержимо квадратичну форму

$$\frac{1}{2}z_1^2 + 3(\frac{1}{3}z_2 - 3z_3)^2 + 18(\frac{1}{3}z_2 - 3z_3)z_3 + 32z_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{3}z_2^2 - 6z_2z_3 + 27z_3^2 + 6z_2z_3 - 54z_3^2 + 32z_3^2 =$$

$$= \frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{3}z_2^2 + 5z_3^2$$

з матрицею

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо у квадратичній формі $\frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{3}z_2^2 + 5z_3^2$ виконати лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}u_1, \\ z_2 &= \sqrt{3}u_2, \\ z_3 &= \tfrac{1}{\sqrt{5}}u_3, \end{aligned}$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо у квадратичній формі $\frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{3}z_2^2 + 5z_3^2$ виконати лінійне перетворення змінних

$$z_1 = \sqrt{2}u_1,$$
$$z_2 = \sqrt{3}u_2,$$
$$z_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}u_3,$$

то знову ж таки одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}u_1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}u_2\right)^2 + 5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}u_3\right)^2$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

$$C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 9 \\ 0 & 9 & 32 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо у квадратичній формі $\frac{1}{2}z_1^2 + \frac{1}{3}z_2^2 + 5z_3^2$ виконати лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt{2}u_1, \\ z_2 &= \sqrt{3}u_2, \\ z_3 &= \frac{1}{\sqrt{5}}u_3, \end{aligned}$$

то знову ж таки одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{2}u_1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sqrt{3}u_2\right)^2 + 5\left(\frac{1}{\sqrt{5}}u_3\right)^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Підкреслимо,

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Підкреслимо, якщо виконати у початковій квадратичній формі лінійне перетворення змінних x_1, x_2, x_3 у змінні u_1, u_2, u_3

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Підкреслимо, якщо виконати у початковій квадратичній формі лінійне перетворення змінних x_1, x_2, x_3 у змінні u_1, u_2, u_3 з матрицею

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{11\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{3\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Підкреслимо, якщо виконати у початковій квадратичній формі лінійне перетворення змінних x_1, x_2, x_3 у змінні u_1, u_2, u_3 з матрицею

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{11\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{3\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

Приклад знаходження канонічного вигляду квадратичної форми.

Підкреслимо, якщо виконати у початковій квадратичній формі лінійне перетворення змінних x_1, x_2, x_3 у змінні u_1, u_2, u_3 з матрицею

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{11\sqrt{5}}{5} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{3\sqrt{5}}{5} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix},$$

то одразу одержимо квадратичну форму канонічного вигляду

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2.$$