Нормальні вигляди квадратичних форми над полями комплексних та дійсних чисел. Закон інерції дійсних квадратичних форм

Лектор — доц. Ігор Шапочка

ДВНЗ «Ужгородський національний університет»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра алгебри та диференціальних рівнянь

15 травня 2023 року

Розглянемо комплексну (тобто над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел)

Розглянемо комплексну (тобто над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел) квадратичну форму канонічного вигляду від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

Розглянемо комплексну (тобто над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел) квадратичну форму канонічного вигляду від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

Розглянемо комплексну (тобто над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел) квадратичну форму канонічного вигляду від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n деякі комплексні числа.

Розглянемо комплексну (тобто над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел) квадратичну форму канонічного вигляду від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n деякі комплексні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r.

Розглянемо комплексну (тобто над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел) квадратичну форму канонічного вигляду від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n деякі комплексні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Тоді тільки r із коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_n не дорівнюють 0.

Розглянемо комплексну (тобто над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел) квадратичну форму канонічного вигляду від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n деякі комплексні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Тоді тільки r із коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_n не дорівнюють 0. Можна вважати, що

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \dots, \quad \alpha_r \neq 0.$$

Розглянемо комплексну (тобто над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел) квадратичну форму канонічного вигляду від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n деякі комплексні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Тоді тільки r із коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_n не дорівнюють 0. Можна вважати, що

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \ldots, \quad \alpha_r \neq 0.$$

У протилежному випадку легко вказати невироджене лінійне перетворення змінних,

Розглянемо комплексну (тобто над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел) квадратичну форму канонічного вигляду від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n деякі комплексні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Тоді тільки r із коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_n не дорівнюють 0. Можна вважати, що

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \ldots, \quad \alpha_r \neq 0.$$

У протилежному випадку легко вказати невироджене лінійне перетворення змінних, після виконання якого одержимо квадратичну форму канонічного вигляду,

Розглянемо комплексну (тобто над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел) квадратичну форму канонічного вигляду від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n деякі комплексні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Тоді тільки r із коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_n не дорівнюють 0. Можна вважати, що

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \ldots, \quad \alpha_r \neq 0.$$

У протилежному випадку легко вказати невироджене лінійне перетворення змінних, після виконання якого одержимо квадратичну форму канонічного вигляду, в якій ненульовими будуть будуть тільки коефіцієнти біля перших r квадратів змінних.

Розглянемо комплексну (тобто над полем $\mathbb{C}$ комплексних чисел) квадратичну форму канонічного вигляду від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n деякі комплексні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Тоді тільки r із коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_n не дорівнюють 0. Можна вважати, що

$$\alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \dots, \quad \alpha_r \neq 0.$$

У протилежному випадку легко вказати невироджене лінійне перетворення змінних, після виконання якого одержимо квадратичну форму канонічного вигляду, в якій ненульовими будуть будуть тільки коефіцієнти біля перших r квадратів змінних. Таким чином,

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \dots + \alpha_r x_r^2.$$

Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} y_1,$$

Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} y_1, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_r &= \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} y_r, \end{aligned}$$

Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} y_1,\\
&\dots\dots\dots\\
&x_r = \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} y_r,\\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n),
\end{aligned}
$$

Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} y_1, \\
&\dots\dots\dots \\
&x_r = \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} y_r, \\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n), \\
&\dots\dots\dots \\
&x_n = y_n,
\end{aligned}
$$

Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} y_1, \\
&\dots\dots\dots \\
&x_r = \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} y_r, \\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n), \\
&\dots\dots\dots \\
&x_n = y_n,
\end{aligned} \tag{1}$$

Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$
\begin{aligned}
& x_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} y_1, \\
& \ldots\ldots\ldots \\
& x_r = \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} y_r, \\
& x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n\text{)}, \\
& \ldots\ldots\ldots \\
& x_n = y_n,
\end{aligned} \tag{1}
$$

де корінь квадратний $\sqrt{\alpha}$ із комплексного числа α означає один із двох коренів другого степеня із α.

Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$\begin{aligned}
&x_1 = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha_1}} y_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&x_r = \tfrac{1}{\sqrt{\alpha_r}} y_r,\\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n),\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&x_n = y_n,
\end{aligned} \tag{1}$$

де корінь квадратний $\sqrt{\alpha}$ із комплексного числа α означає один із двох коренів другого степеня із α.

Це лінійне перетворення змінних є невиродженим,

Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$\begin{aligned} & x_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} y_1, \\ & \dots\dots\dots \\ & x_r = \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} y_r, \\ & x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n), \\ & \dots\dots\dots \\ & x_n = y_n, \end{aligned} \tag{1}$$

де корінь квадратний $\sqrt{\alpha}$ із комплексного числа α означає один із двох коренів другого степеня із α.

Це лінійне перетворення змінних є невиродженим, оскільки його матрицею є діагональна матриця

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} & & & \\ & & & 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} y_1, \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&x_r = \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} y_r, \\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n), \\
&\ldots\ldots\ldots \\
&x_n = y_n,
\end{aligned}
\tag{1}
$$

де корінь квадратний $\sqrt{\alpha}$ із комплексного числа α означає один із двох коренів другого степеня із α.

Це лінійне перетворення змінних є невиродженим, оскільки його матрицею є діагональна матриця

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} & & & \\
& & & 1 & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

детермінант якої дорівнює $\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}}$

Розглянемо лінійне перетворення невідомих

$$\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} y_1, \\
&\dots\dots\dots \\
&x_r = \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} y_r, \\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n), \\
&\dots\dots\dots \\
&x_n = y_n,
\end{aligned} \tag{1}$$

де корінь квадратний $\sqrt{\alpha}$ із комплексного числа α означає один із двох коренів другого степеня із α.

Це лінійне перетворення змінних є невиродженим, оскільки його матрицею є діагональна матриця

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} & & & \\
& & & 1 & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & 1
\end{pmatrix}$$

детермінант якої дорівнює $\frac{1}{\sqrt{\alpha_1}} \frac{1}{\sqrt{\alpha_2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{\alpha_r}} \neq 0.$

Виконавши лінійне перетворення змінних (1) у квадратичній формі f,

Виконавши лінійне перетворення змінних (1) у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму, що є сумою r квадратів невідомих

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2.$$

Виконавши лінійне перетворення змінних (1) у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму, що є сумою r квадратів невідомих

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2.$$

Означення 1

Квадратична форма, що є сумою деякого числа квадратів змінних

Виконавши лінійне перетворення змінних (1) у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму, що є сумою r квадратів невідомих

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2.$$

Означення 1

Квадратична форма, що є сумою деякого числа квадратів змінних називається **комплексною квадратичною формою нормального вигляду**.

Виконавши лінійне перетворення змінних (1) у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму, що є сумою r квадратів невідомих

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2.$$

Означення 1

Квадратична форма, що є сумою деякого числа квадратів змінних називається **комплексною квадратичною формою нормального вигляду**.

Нами доведена наступна теорема.

Виконавши лінійне перетворення змінних (1) у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму, що є сумою r квадратів невідомих

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2.$$

Означення 1

Квадратична форма, що є сумою деякого числа квадратів змінних називається **комплексною квадратичною формою нормального вигляду**.

Нами доведена наступна теорема.

Теорема 1 (основна теорема про комплексні квадратичні форми)

Будь-яка дана комплексна квадратична форма від n змінних рангу r

Виконавши лінійне перетворення змінних (1) у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму, що є сумою r квадратів невідомих

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2.$$

Означення 1

Квадратична форма, що є сумою деякого числа квадратів змінних називається **комплексною квадратичною формою нормального вигляду**.

Нами доведена наступна теорема.

Теорема 1 (основна теорема про комплексні квадратичні форми)

Будь-яка дана комплексна квадратична форма від n змінних рангу r еквівалентна деякій квадратичній формі нормального вигляду,

Виконавши лінійне перетворення змінних (1) у квадратичній формі f, ми одержимо квадратичну форму, що є сумою r квадратів невідомих

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_r^2.$$

Означення 1

Квадратична форма, що є сумою деякого числа квадратів змінних називається комплексною квадратичною формою нормального вигляду.

Нами доведена наступна теорема.

Теорема 1 (основна теорема про комплексні квадратичні форми)

Будь-яка дана комплексна квадратична форма від n змінних рангу r еквівалентна деякій квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою r квадратів невідомих.

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки,

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми.

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми.

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — комплексні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — комплексні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги і $\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} g = r$.

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — комплексні квадратичні форми від n змінних x_1, x_2, ..., x_n, що мають однакові ранги і $\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} g = r$. Тоді за попередньою теоремою кожна із квадратичних форм f і g

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — комплексні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги і $\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} g = r$. Тоді за попередньою теоремою кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна комплексній квадратичній формі нормального вигляду,

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — комплексні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги і $\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} g = r$. Тоді за попередньою теоремою кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна комплексній квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою r квадратів невідомих:

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — комплексні квадратичні форми від n змінних x_1, x_2, ..., x_n, що мають однакові ранги і $\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} g = r$. Тоді за попередньою теоремою кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна комплексній квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою r квадратів невідомих:

$$f \sim x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2,$$

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — комплексні квадратичні форми від n змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n, що мають однакові ранги і $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r$. Тоді за попередньою теоремою кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна комплексній квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою r квадратів невідомих:

$$f \sim x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2, \qquad g \sim x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2.$$

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — комплексні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, що мають однакові ранги і $\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r$. Тоді за попередньою теоремою кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна комплексній квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою r квадратів невідомих:

$$f \sim x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2, \qquad g \sim x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_r^2.$$

Тому за симетричною та транзитивною властивостями еквівалентності квадратичних форм

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — комплексні квадратичні форми від n змінних x_1, x_2, $\ldots$, x_n, що мають однакові ранги і $\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} g = r$. Тоді за попередньою теоремою кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна комплексній квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою r квадратів невідомих:

$$f \sim x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2, \qquad g \sim x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2.$$

Тому за симетричною та транзитивною властивостями еквівалентності квадратичних форм квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g.

Теорема 2 (класифікаційна теорема)

Комплексні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки, коли ранги цих форм співпадають.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — комплексні квадратичні форми від n змінних x_1, x_2, ..., x_n, що мають однакові ранги і $\mathrm{rank} f = \mathrm{rank} g = r$. Тоді за попередньою теоремою кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна комплексній квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою r квадратів невідомих:

$$f \sim x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2, \qquad g \sim x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_r^2.$$

Тому за симетричною та транзитивною властивостями еквівалентності квадратичних форм квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Теорема доведена. □

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел)

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел) квадратичну форму від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел) квадратичну форму від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел) квадратичну форму від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n — деякі дійсні числа.

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел) квадратичну форму від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n — деякі дійсні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r.

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел) квадратичну форму від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n — деякі дійсні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Аналогічно як у випадку з комплексними квадратичними формами канонічного вигляду можна вважати,

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел) квадратичну форму від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n — деякі дійсні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Аналогічно як у випадку з комплексними квадратичними формами канонічного вигляду можна вважати, що тільки перші r із коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_n не дорівнюють нулю.

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел) квадратичну форму від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n — деякі дійсні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Аналогічно як у випадку з комплексними квадратичними формами канонічного вигляду можна вважати, що тільки перші r із коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_n не дорівнюють нулю. Причому перші p із цих r коефіцієнтів є додатними числами,

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел) квадратичну форму від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n — деякі дійсні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Аналогічно як у випадку з комплексними квадратичними формами канонічного вигляду можна вважати, що тільки перші r із коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_n не дорівнюють нулю. Причому перші p із цих r коефіцієнтів є додатними числами, а інші — від'ємними:

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел) квадратичну форму від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n — деякі дійсні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Аналогічно як у випадку з комплексними квадратичними формами канонічного вигляду можна вважати, що тільки перші r із коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_n не дорівнюють нулю. Причому перші p із цих r коефіцієнтів є додатними числами, а інші — від'ємними:

$$\alpha_1 > 0, \quad \ldots, \quad \alpha_p > 0, \quad \alpha_{p+1} < 0, \quad \ldots, \quad \alpha_r < 0,$$

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел) квадратичну форму від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n — деякі дійсні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Аналогічно як у випадку з комплексними квадратичними формами канонічного вигляду можна вважати, що тільки перші r із коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_n не дорівнюють нулю. Причому перші p із цих r коефіцієнтів є додатними числами, а інші — від'ємними:

$$\alpha_1 > 0, \quad \ldots, \quad \alpha_p > 0, \quad \alpha_{p+1} < 0, \quad \ldots, \quad \alpha_r < 0,$$

де $p \in \{0, 1, \ldots, r\}$.

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел) квадратичну форму від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n — деякі дійсні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Аналогічно як у випадку з комплексними квадратичними формами канонічного вигляду можна вважати, що тільки перші r із коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_n не дорівнюють нулю. Причому перші p із цих r коефіцієнтів є додатними числами, а інші — від'ємними:

$$\alpha_1 > 0, \quad \ldots, \quad \alpha_p > 0, \quad \alpha_{p+1} < 0, \quad \ldots, \quad \alpha_r < 0,$$

де $p \in \{0, 1, \ldots, r\}$.
Тоді квадратичну форму f можна записати у вигляді

$$f = \beta_1 x_1^2 + \cdots + \beta_p x_p^2 - \beta_{p+1} x_{p+1}^2 - \cdots - \beta_{p+q} x_{p+q}^2,$$

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел) квадратичну форму від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — деякі дійсні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Аналогічно як у випадку з комплексними квадратичними формами канонічного вигляду можна вважати, що тільки перші r із коефіцієнтів $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ не дорівнюють нулю. Причому перші p із цих r коефіцієнтів є додатними числами, а інші — від'ємними:

$$\alpha_1 > 0, \quad \ldots, \quad \alpha_p > 0, \quad \alpha_{p+1} < 0, \quad \ldots, \quad \alpha_r < 0,$$

де $p \in \{0, 1, \ldots, r\}$.
Тоді квадратичну форму f можна записати у вигляді

$$f = \beta_1 x_1^2 + \cdots + \beta_p x_p^2 - \beta_{p+1} x_{p+1}^2 - \cdots - \beta_{p+q} x_{p+q}^2,$$

де $\beta_1, \ldots, \beta_{p+q}$ — додатні числа

Розглянемо дійсну (тобто над полем $\mathbb{R}$ дійсних чисел) квадратичну форму від n змінних x_1, x_2, ..., x_n:

$$f = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \cdots + \alpha_n x_n^2,$$

де α_1, α_2, ..., α_n — деякі дійсні числа. Нехай ранг квадратичної форми f дорівнює r. Аналогічно як у випадку з комплексними квадратичними формами канонічного вигляду можна вважати, що тільки перші r із коефіцієнтів α_1, α_2, ..., α_n не дорівнюють нулю. Причому перші p із цих r коефіцієнтів є додатними числами, а інші — від'ємними:

$$\alpha_1 > 0, \quad \ldots, \quad \alpha_p > 0, \quad \alpha_{p+1} < 0, \quad \ldots, \quad \alpha_r < 0,$$

де $p \in \{0, 1, \ldots, r\}$.
Тоді квадратичну форму f можна записати у вигляді

$$f = \beta_1 x_1^2 + \cdots + \beta_p x_p^2 - \beta_{p+1} x_{p+1}^2 - \cdots - \beta_{p+q} x_{p+q}^2,$$

де β_1, ..., β_{p+q} — додатні числа і $p + q = r$.

Розглянемо лінійне перетворення змінних

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1,\\
&\dots\dots\dots\\
&x_r = \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} y_r,\\
&x_{r+1} = y_{r+1} \ (\text{якщо } r < n),\\
&\dots\dots\dots\\
&x_n = y_n.
\end{aligned}
$$

Розглянемо лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1, \\
&\dots\dots\dots \\
&x_r = \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} y_r, \\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n), \\
&\dots\dots\dots \\
&x_n = y_n.
\end{aligned}$$

Це лінійне перетворення змінних є невиродженим,

Розглянемо лінійне перетворення змінних

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1, \\
&\dots\dots\dots \\
&x_r = \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} y_r, \\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n), \\
&\dots\dots\dots \\
&x_n = y_n.
\end{aligned}
$$

Це лінійне перетворення змінних є невиродженим, оскільки його матрицею є діагональна матриця

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} & & & \\
& & & 1 & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

Розглянемо лінійне перетворення змінних

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1,\\
&\dots\dots\dots\\
&x_r = \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} y_r,\\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n),\\
&\dots\dots\dots\\
&x_n = y_n.
\end{aligned}
$$

Це лінійне перетворення змінних є невиродженим, оскільки його матрицею є діагональна матриця

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} & & & \\
& & & 1 & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

детермінант якої дорівнює $\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{\beta_r}}$

Розглянемо лінійне перетворення змінних

$$
\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1, \\
&\dots\dots\dots \\
&x_r = \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} y_r, \\
&x_{r+1} = y_{r+1} \ (\text{якщо } r < n), \\
&\dots\dots\dots \\
&x_n = y_n.
\end{aligned}
$$

Це лінійне перетворення змінних є невиродженим, оскільки його матрицею є діагональна матриця

$$
\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} & & & \\
& & & 1 & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & 1
\end{pmatrix}
$$

детермінант якої дорівнює $\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} \neq 0.$

Розглянемо лінійне перетворення змінних

$$\begin{aligned}
&x_1 = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&x_r = \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} y_r,\\
&x_{r+1} = y_{r+1} \text{ (якщо } r < n\text{)},\\
&\ldots\ldots\ldots\\
&x_n = y_n.
\end{aligned}$$

Це лінійне перетворення змінних є невиродженим, оскільки його матрицею є діагональна матриця

$$\begin{pmatrix}
\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} & & & & & \\
& \ddots & & & & \\
& & \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} & & & \\
& & & 1 & & \\
& & & & \ddots & \\
& & & & & 1
\end{pmatrix}$$

детермінант якої дорівнює $\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \frac{1}{\sqrt{\beta_2}} \cdots \frac{1}{\sqrt{\beta_r}} \neq 0$. Виконаємо його в квадратичній формі f.

Одержимо

$$f \sim$$

Одержимо

$$f \sim \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1\right)^2 + \dots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p\right)^2 -$$

$$- \beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1}\right)^2 - \dots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q}\right)^2$$

Одержимо

$$f \sim \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1 \right)^2 + \cdots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p \right)^2 -$$

$$- \beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1} \right)^2 - \cdots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q} \right)^2 =$$

$$= y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2,$$

Одержимо

$$f \sim \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1\right)^2 + \dots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p\right)^2 -$$

$$- \beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1}\right)^2 - \dots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q}\right)^2 =$$

$$= y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатних і q від'ємних квадратів змінних

Одержимо

$$f \sim \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1\right)^2 + \dots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p\right)^2 -$$

$$-\beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1}\right)^2 - \dots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q}\right)^2 =$$

$$= y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатних і q від'ємних квадратів змінних $(p,\ q \in \{0, 1, 2, \dots, r\};$

Одержимо

$$f \sim \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1\right)^2 + \dots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p\right)^2 -$$

$$- \beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1}\right)^2 - \dots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q}\right)^2 =$$

$$= y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатних і q від'ємних квадратів змінних $(p,\ q \in \{0, 1, 2, \dots, r\};$ $p + q = r)$.

Означення 2

Квадратична форма,

Одержимо

$$f \sim \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1\right)^2 + \cdots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p\right)^2 -$$
$$- \beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1}\right)^2 - \cdots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q}\right)^2 =$$
$$= y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатних і q від'ємних квадратів змінних $(p,\ q \in \{0, 1, 2, \ldots, r\};$ $p + q = r)$.

Означення 2

Квадратична форма, що є сумою деякого числа додатних

Одержимо

$$f \sim \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1 \right)^2 + \cdots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p \right)^2 -$$

$$- \beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1} \right)^2 - \cdots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q} \right)^2 =$$

$$= y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатних і q від'ємних квадратів змінних $(p,\ q \in \{0, 1, 2, \ldots, r\};\ p + q = r)$.

Означення 2

Квадратична форма, що є сумою деякого числа додатних та деякого числа від'ємних квадратів змінних

Одержимо

$$f \sim \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1\right)^2 + \dots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p\right)^2 -$$

$$- \beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1}\right)^2 - \dots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q}\right)^2 =$$

$$= y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатних і q від'ємних квадратів змінних $(p,\ q \in \{0, 1, 2, \dots, r\};$ $p + q = r)$.

Означення 2

Квадратична форма, що є сумою деякого числа додатних та деякого числа від'ємних квадратів змінних називається **квадратичною формою нормального вигляду над полем дійсних чисел**.

Одержимо

$$f \sim \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1\right)^2 + \dots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p\right)^2 -$$

$$-\beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1}\right)^2 - \dots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q}\right)^2 =$$

$$= y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатних і q від'ємних квадратів змінних $(p,\ q \in \{0, 1, 2, \dots, r\};\ p + q = r)$.

Означення 2

Квадратична форма, що є сумою деякого числа додатних та деякого числа від'ємних квадратів змінних називається квадратичною формою нормального вигляду над полем дійсних чисел.

Отже, нами доведена наступна теорема.

Одержимо

$$f \sim \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1\right)^2 + \cdots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p\right)^2 -$$

$$-\beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1}\right)^2 - \cdots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q}\right)^2 =$$

$$= y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатних і q від'ємних квадратів змінних (p, $q \in \{0, 1, 2, \ldots, r\}$; $p + q = r$).

Означення 2

Квадратична форма, що є сумою деякого числа додатних та деякого числа від'ємних квадратів змінних називається квадратичною формою нормального вигляду над полем дійсних чисел.

Отже, нами доведена наступна теорема.

Теорема 3 (основна теорема про дійсні квадратичні форми)

Одержимо

$$f \sim \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1\right)^2 + \dots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p\right)^2 -$$

$$- \beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1}\right)^2 - \dots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q}\right)^2 =$$

$$= y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатних і q від'ємних квадратів змінних $(p,\ q \in \{0, 1, 2, \dots, r\};$ $p + q = r)$.

Означення 2

Квадратична форма, що є сумою деякого числа додатних та деякого числа від'ємних квадратів змінних називається квадратичною формою нормального вигляду над полем дійсних чисел.

Отже, нами доведена наступна теорема.

Теорема 3 (основна теорема про дійсні квадратичні форми)

Будь-яка дана дійсна квадратична форма від n змінних рангу r

Одержимо

$$f \sim \beta_1\left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}}y_1\right)^2+\dots+\beta_p\left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}}y_p\right)^2-$$
$$-\beta_{p+1}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}}y_{p+1}\right)^2-\dots-\beta_{p+q}\left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}}y_{p+q}\right)^2=$$
$$=y_1^2+\dots+y_p^2-y_{p+1}^2-\dots-y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатних і q від'ємних квадратів змінних ($p,\ q \in \{0,1,2,\dots,r\}$; $p+q=r$).

Означення 2

Квадратична форма, що є сумою деякого числа додатних та деякого числа від'ємних квадратів змінних називається квадратичною формою нормального вигляду над полем дійсних чисел.

Отже, нами доведена наступна теорема.

Теорема 3 (основна теорема про дійсні квадратичні форми)

Будь-яка дана дійсна квадратична форма від n змінних рангу r еквівалентна деякій квадратичній формі нормального вигляду,

Одержимо

$$f \sim \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1\right)^2 + \cdots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p\right)^2 -$$

$$- \beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1}\right)^2 - \cdots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q}\right)^2 =$$

$$= y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатних і q від'ємних квадратів змінних (p, $q \in \{0, 1, 2, \ldots, r\}$; $p + q = r$).

Означення 2

Квадратична форма, що є сумою деякого числа додатних та деякого числа від'ємних квадратів змінних називається квадратичною формою нормального вигляду над полем дійсних чисел.

Отже, нами доведена наступна теорема.

Теорема 3 (основна теорема про дійсні квадратичні форми)

Будь-яка дана дійсна квадратична форма від n змінних рангу r еквівалентна деякій квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою деякого числа p додатних

Одержимо

$$f \sim \beta_1 \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_1}} y_1\right)^2 + \dots + \beta_p \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_p}} y_p\right)^2 -$$

$$- \beta_{p+1} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+1}}} y_{p+1}\right)^2 - \dots - \beta_{p+q} \left(\frac{1}{\sqrt{\beta_{p+q}}} y_{p+q}\right)^2 =$$

$$= y_1^2 + \dots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \dots - y_{p+q}^2,$$

тобто суму p додатних і q від'ємних квадратів змінних $(p,\ q \in \{0, 1, 2, \dots, r\};$ $p + q = r)$.

Означення 2

Квадратична форма, що є сумою деякого числа додатних та деякого числа від'ємних квадратів змінних називається квадратичною формою нормального вигляду над полем дійсних чисел.

Отже, нами доведена наступна теорема.

Теорема 3 (основна теорема про дійсні квадратичні форми)

Будь-яка дана дійсна квадратична форма від n змінних рангу r еквівалентна деякій квадратичній формі нормального вигляду, що є сумою деякого числа p додатних і $r - p$ від'ємних квадратів змінних.

Наступна теорема вказує,

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Теорема 4 (закон інерції)

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Теорема 4 (закон інерції)

Якщо дана дійсна квадратична форма

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Теорема 4 (закон інерції)

Якщо дана дійсна квадратична форма за допомогою двох дійсних невироджених лінійних перетворень змінних

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Теорема 4 (закон інерції)

Якщо дана дійсна квадратична форма за допомогою двох дійсних невироджених лінійних перетворень змінних зведена до двох квадратичних форм нормального виду,

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Теорема 4 (закон інерції)

Якщо дана дійсна квадратична форма за допомогою двох дійсних невироджених лінійних перетворень змінних зведена до двох квадратичних форм нормального виду, то число додатних (від'ємних) квадратів змінних

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Теорема 4 (закон інерції)

Якщо дана дійсна квадратична форма за допомогою двох дійсних невироджених лінійних перетворень змінних зведена до двох квадратичних форм нормального виду, то число додатних (від'ємних) квадратів змінних однієї квадратичної форми нормального вигляду

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Теорема 4 (закон інерції)

Якщо дана дійсна квадратична форма за допомогою двох дійсних невироджених лінійних перетворень змінних зведена до двох квадратичних форм нормального виду, то число додатних (від'ємних) квадратів змінних однієї квадратичної форми нормального вигляду дорівнює числу додатних (від'ємних) квадратів змінних

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Теорема 4 (закон інерції)

Якщо дана дійсна квадратична форма за допомогою двох дійсних невироджених лінійних перетворень змінних зведена до двох квадратичних форм нормального виду, то число додатних (від'ємних) квадратів змінних однієї квадратичної форми нормального вигляду дорівнює числу додатних (від'ємних) квадратів змінних другої квадратичної форми нормального вигляду.

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Теорема 4 (закон інерції)

Якщо дана дійсна квадратична форма за допомогою двох дійсних невироджених лінійних перетворень змінних зведена до двох квадратичних форм нормального виду, то число додатних (від'ємних) квадратів змінних однієї квадратичної форми нормального вигляду дорівнює числу додатних (від'ємних) квадратів змінних другої квадратичної форми нормального вигляду.

Тобто, якщо дійсна квадратична форма f рангу r

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Теорема 4 (закон інерції)

Якщо дана дійсна квадратична форма за допомогою двох дійсних невироджених лінійних перетворень змінних зведена до двох квадратичних форм нормального виду, то число додатних (від'ємних) квадратів змінних однієї квадратичної форми нормального вигляду дорівнює числу додатних (від'ємних) квадратів змінних другої квадратичної форми нормального вигляду.

Тобто, якщо дійсна квадратична форма f рангу r еквівалентна як дійсній квадратичній формі нормального вигляду

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2,$$

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Теорема 4 (закон інерції)

Якщо дана дійсна квадратична форма за допомогою двох дійсних невироджених лінійних перетворень змінних зведена до двох квадратичних форм нормального виду, то число додатних (від'ємних) квадратів змінних однієї квадратичної форми нормального вигляду дорівнює числу додатних (від'ємних) квадратів змінних другої квадратичної форми нормального вигляду.

Тобто, якщо дійсна квадратична форма f рангу r еквівалентна як дійсній квадратичній формі нормального вигляду

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2,$$

так і дійсній квадратичній формі нормального вигляду

$$z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_r^2,$$

Наступна теорема вказує, що є спільного в квадратичних формах нормального вигляду, до яких зводиться дана дійсна квадратична форма за допомогою різних дійсних невироджених лінійних перетворень змінних.

Теорема 4 (закон інерції)

Якщо дана дійсна квадратична форма за допомогою двох дійсних невироджених лінійних перетворень змінних зведена до двох квадратичних форм нормального виду, то число додатних (від'ємних) квадратів змінних однієї квадратичної форми нормального вигляду дорівнює числу додатних (від'ємних) квадратів змінних другої квадратичної форми нормального вигляду.

Тобто, якщо дійсна квадратична форма f рангу r еквівалентна як дійсній квадратичній формі нормального вигляду

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2,$$

так і дійсній квадратичній формі нормального вигляду

$$z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_r^2,$$

то $p = s$.

Доведення.

Нехай задано деяку дійсну квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

Доведення.

Нехай задано деяку дійсну квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

від n змінних x_1, x_2, ..., x_n

Доведення.

Нехай задано деяку дійсну квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і її ранг дорівнює r.

Доведення.

Нехай задано деяку дійсну квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

від n змінних x_1, x_2, ..., x_n і її ранг дорівнює r. Припустимо, що у квадратичній формі f по черзі виконали наступні два дійсні невироджені лінійні перетворення змінних

Доведення.

Нехай задано деяку дійсну квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

від n змінних x_1, x_2, ..., x_n і її ранг дорівнює r. Припустимо, що у квадратичній формі f по черзі виконали наступні два дійсні невироджені лінійні перетворення змінних

$$\begin{aligned} x_1 &= \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n} y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \beta_{n1} y_1 + \cdots + \beta_{nn} y_n; \end{aligned}$$

Доведення.

Нехай задано деяку дійсну квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$ і її ранг дорівнює r. Припустимо, що у квадратичній формі f по черзі виконали наступні два дійсні невироджені лінійні перетворення змінних

$$\begin{array}{ll} x_1 = \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n} y_n, & \quad x_1 = \gamma_{11} z_1 + \cdots + \gamma_{1n} z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_{n1} y_1 + \cdots + \beta_{nn} y_n; & \quad x_n = \gamma_{n1} z_1 + \cdots + \gamma_{nn} z_n, \end{array} \tag{2}$$

Доведення.

Нехай задано деяку дійсну квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

від n змінних x_1, x_2, ..., x_n і її ранг дорівнює r. Припустимо, що у квадратичній формі f по черзі виконали наступні два дійсні невироджені лінійні перетворення змінних

$$\begin{array}{lcl} x_1 = \beta_{11}y_1 + \cdots + \beta_{1n}y_n, & \qquad & x_1 = \gamma_{11}z_1 + \cdots + \gamma_{1n}z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_{n1}y_1 + \cdots + \beta_{nn}y_n; & & x_n = \gamma_{n1}z_1 + \cdots + \gamma_{nn}z_n, \end{array} \qquad (2)$$

у результаті яких одержали відповідно квадратичні форми нормального вигляду:

Доведення.

Нехай задано деяку дійсну квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

від n змінних x_1, x_2, ..., x_n і її ранг дорівнює r. Припустимо, що у квадратичній формі f по черзі виконали наступні два дійсні невироджені лінійні перетворення змінних

$$\begin{array}{ll} x_1 = \beta_{11} y_1 + \cdots + \beta_{1n} y_n, & x_1 = \gamma_{11} z_1 + \cdots + \gamma_{1n} z_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \beta_{n1} y_1 + \cdots + \beta_{nn} y_n; & x_n = \gamma_{n1} z_1 + \cdots + \gamma_{nn} z_n, \end{array} \qquad (2)$$

у результаті яких одержали відповідно квадратичні форми нормального вигляду:

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2,$$

Доведення.

Нехай задано деяку дійсну квадратичну форму

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i x_j$$

від n змінних x_1, x_2, ..., x_n і її ранг дорівнює r. Припустимо, що у квадратичній формі f по черзі виконали наступні два дійсні невироджені лінійні перетворення змінних

$$\begin{array}{ll} x_1 = \beta_{11}y_1 + \cdots + \beta_{1n}y_n, & x_1 = \gamma_{11}z_1 + \cdots + \gamma_{1n}z_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \beta_{n1}y_1 + \cdots + \beta_{nn}y_n; & x_n = \gamma_{n1}z_1 + \cdots + \gamma_{nn}z_n, \end{array} \tag{2}$$

у результаті яких одержали відповідно квадратичні форми нормального вигляду:

$$y_1^2 + \cdots + y_p^2 - y_{p+1}^2 - \cdots - y_r^2, \quad z_1^2 + \cdots + z_s^2 - z_{s+1}^2 - \cdots - z_r^2. \tag{3}$$

Доведення.

Припустимо, що $p \neq s$.

Доведення.

Припустимо, що $p \neq s$. Для визначеності вважатимемо, що $p < s$

Доведення.

Припустимо, що $p \neq s$. Для визначеності вважатимемо, що $p < s$ (випадок $p > s$ доводиться аналогічно).

Доведення.

Припустимо, що $p \neq s$. Для визначеності вважатимемо, що $p < s$ (випадок $p > s$ доводиться аналогічно).
Далі, нехай

$$\begin{aligned} y_1 &= \delta_{11}x_1 + \cdots + \delta_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \delta_{n1}x_1 + \cdots + \delta_{nn}x_n; \end{aligned}$$

Доведення.

Припустимо, що $p \neq s$. Для визначеності вважатимемо, що $p < s$ (випадок $p > s$ доводиться аналогічно).
Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1 = \delta_{11}x_1 + \dots + \delta_{1n}x_n, & z_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \dots + \varepsilon_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \delta_{n1}x_1 + \dots + \delta_{nn}x_n; & z_n = \varepsilon_{n1}x_1 + \dots + \varepsilon_{nn}x_n \end{array} \qquad (4)$$

Доведення.

Припустимо, що $p \neq s$. Для визначеності вважатимемо, що $p < s$ (випадок $p > s$ доводиться аналогічно).
Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1 = \delta_{11}x_1 + \cdots + \delta_{1n}x_n, & z_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \delta_{n1}x_1 + \cdots + \delta_{nn}x_n; & z_n = \varepsilon_{n1}x_1 + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n \end{array} \tag{4}$$

— обернені лінійні перетворення змінних відповідно до лінійних перетворень (2).

Доведення.

Припустимо, що $p \neq s$. Для визначеності вважатимемо, що $p < s$ (випадок $p > s$ доводиться аналогічно).
Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1 = \delta_{11}x_1 + \cdots + \delta_{1n}x_n, & z_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \delta_{n1}x_1 + \cdots + \delta_{nn}x_n; & z_n = \varepsilon_{n1}x_1 + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n \end{array} \qquad (4)$$

— обернені лінійні перетворення змінних відповідно до лінійних перетворень (2). Підкреслимо, що якщо виконати відповідно ці лінійні перетворення змінних у квадратичних формах (3)

Доведення.

Припустимо, що $p \neq s$. Для визначеності вважатимемо, що $p < s$ (випадок $p > s$ доводиться аналогічно).
Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1 = \delta_{11}x_1 + \cdots + \delta_{1n}x_n, & z_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \delta_{n1}x_1 + \cdots + \delta_{nn}x_n; & z_n = \varepsilon_{n1}x_1 + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n \end{array} \tag{4}$$

— обернені лінійні перетворення змінних відповідно до лінійних перетворень (2). Підкреслимо, що якщо виконати відповідно ці лінійні перетворення змінних у квадратичних формах (3) нормального вигляду,

Доведення.

Припустимо, що $p \neq s$. Для визначеності вважатимемо, що $p < s$ (випадок $p > s$ доводиться аналогічно).
Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1 = \delta_{11}x_1 + \cdots + \delta_{1n}x_n, & z_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \delta_{n1}x_1 + \cdots + \delta_{nn}x_n; & z_n = \varepsilon_{n1}x_1 + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n \end{array} \qquad (4)$$

— обернені лінійні перетворення змінних відповідно до лінійних перетворень (2). Підкреслимо, що якщо виконати відповідно ці лінійні перетворення змінних у квадратичних формах (3) нормального вигляду, то у обох випадках одержимо квадратичну форму f.

Доведення.

Припустимо, що $p \neq s$. Для визначеності вважатимемо, що $p < s$ (випадок $p > s$ доводиться аналогічно).
Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1 = \delta_{11}x_1 + \cdots + \delta_{1n}x_n, & z_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \delta_{n1}x_1 + \cdots + \delta_{nn}x_n; & z_n = \varepsilon_{n1}x_1 + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n \end{array} \qquad (4)$$

— обернені лінійні перетворення змінних відповідно до лінійних перетворень (2). Підкреслимо, що якщо виконати відповідно ці лінійні перетворення змінних у квадратичних формах (3) нормального вигляду, то у обох випадках одержимо квадратичну форму f.
Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь від n змінних x_1, x_2, ..., x_n

Доведення.

Припустимо, що $p \neq s$. Для визначеності вважатимемо, що $p < s$ (випадок $p > s$ доводиться аналогічно).
Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1 = \delta_{11}x_1 + \dots + \delta_{1n}x_n, & z_1 = \varepsilon_{11}x_1 + \dots + \varepsilon_{1n}x_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = \delta_{n1}x_1 + \dots + \delta_{nn}x_n; & z_n = \varepsilon_{n1}x_1 + \dots + \varepsilon_{nn}x_n \end{array} \tag{4}$$

— обернені лінійні перетворення змінних відповідно до лінійних перетворень (2). Підкреслимо, що якщо виконати відповідно ці лінійні перетворення змінних у квадратичних формах (3) нормального вигляду, то у обох випадках одержимо квадратичну форму f.
Розглянемо систему лінійних однорідних рівнянь від n змінних x_1, x_2, ..., x_n

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_{11}x_1 + \dots + \delta_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \delta_{p1}x_1 + \dots + \delta_{pn}x_n = 0, \\ \varepsilon_{s+1\,1}x_1 + \dots + \varepsilon_{s+1\,n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varepsilon_{n1}x_1 + \dots + \varepsilon_{nn}x_n = 0. \end{array} \right. \tag{5}$$

Доведення.

Це система з $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь з n змінними.

Доведення.

Це система з $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь з n змінними. Оскільки $p < s$,

Доведення.

Це система з $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь з n змінними. Оскільки $p < s$, то $n+p-s < n$,

Доведення.

Це система з $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь з n змінними. Оскільки $p<s$, то $n+p-s<n$, що в свою чергу означає, що число рівнянь системи рівнянь (5) менше за число змінних,

Доведення.

Це система з $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь з n змінними. Оскільки $p < s$, то $n+p-s < n$, що в свою чергу означає, що число рівнянь системи рівнянь (5) менше за число змінних, отже, вона має ненульовий розв'язок $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$.

Доведення.

Це система з $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь з n змінними. Оскільки $p < s$, то $n+p-s < n$, що в свою чергу означає, що число рівнянь системи рівнянь (5) менше за число змінних, отже, вона має ненульовий розв'язок $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$.

Далі, нехай

$$\begin{aligned} y_1^* &= \delta_{11}x_1^* + \cdots + \delta_{1n}x_n^*, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^* &= \delta_{n1}x_1^* + \cdots + \delta_{nn}x_n^*; \end{aligned}$$

Доведення.

Це система з $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь з n змінними. Оскільки $p<s$, то $n+p-s<n$, що в свою чергу означає, що число рівнянь системи рівнянь (5) менше за число змінних, отже, вона має ненульовий розв'язок $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$.

Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1^* = \delta_{11}x_1^* + \cdots + \delta_{1n}x_n^*, & \qquad z_1^* = \varepsilon_{11}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n^*, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^* = \delta_{n1}x_1^* + \cdots + \delta_{nn}x_n^*; & \qquad z_n^* = \varepsilon_{n1}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n^*. \end{array}$$

Доведення.

Це система з $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь з n змінними. Оскільки $p<s$, то $n+p-s<n$, що в свою чергу означає, що число рівнянь системи рівнянь (5) менше за число змінних, отже, вона має ненульовий розв'язок $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$.

Далі, нехай

$$\begin{aligned} y_1^* &= \delta_{11}x_1^* + \cdots + \delta_{1n}x_n^*, & z_1^* &= \varepsilon_{11}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n^*, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^* &= \delta_{n1}x_1^* + \cdots + \delta_{nn}x_n^*; & z_n^* &= \varepsilon_{n1}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n^*. \end{aligned}$$

Очевидно (див. (4, 5)), що

$$y_1^* = 0, \quad \ldots, \quad y_p^* = 0,$$

Доведення.

Це система з $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь з n змінними. Оскільки $p<s$, то $n+p-s<n$, що в свою чергу означає, що число рівнянь системи рівнянь (5) менше за число змінних, отже, вона має ненульовий розв'язок $x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*$.

Далі, нехай

$$\begin{aligned} y_1^* &= \delta_{11}x_1^* + \cdots + \delta_{1n}x_n^*, & z_1^* &= \varepsilon_{11}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n^*,\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ y_n^* &= \delta_{n1}x_1^* + \cdots + \delta_{nn}x_n^*; & z_n^* &= \varepsilon_{n1}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n^*. \end{aligned}$$

Очевидно (див. (4, 5)), що

$$y_1^*=0, \quad \ldots, \quad y_p^*=0, \quad z_{s+1}^*=0, \quad \ldots, \quad z_n^*=0.$$

Доведення.

Це система з $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь з n змінними. Оскільки $p<s$, то $n+p-s<n$, що в свою чергу означає, що число рівнянь системи рівнянь (5) менше за число змінних, отже, вона має ненульовий розв'язок $x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*$.

Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1^* = \delta_{11}x_1^* + \cdots + \delta_{1n}x_n^*, & z_1^* = \varepsilon_{11}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n^*, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^* = \delta_{n1}x_1^* + \cdots + \delta_{nn}x_n^*; & z_n^* = \varepsilon_{n1}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n^*. \end{array}$$

Очевидно (див. (4, 5)), що

$$y_1^* = 0, \quad \ldots, \quad y_p^* = 0, \quad z_{s+1}^* = 0, \quad \ldots, \quad z_n^* = 0.$$

З усього вище сказаного слідує, що

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_i^*x_j^* = {y_1^*}^2 + \cdots + {y_p^*}^2 - {y_{p+1}^*}^2 - \cdots - {y_r^*}^2$$

Доведення.

Це система з $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь з n змінними. Оскільки $p<s$, то $n+p-s<n$, що в свою чергу означає, що число рівнянь системи рівнянь (5) менше за число змінних, отже, вона має ненульовий розв'язок $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$.

Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1^* = \delta_{11}x_1^* + \cdots + \delta_{1n}x_n^*, & z_1^* = \varepsilon_{11}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n^*, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n^* = \delta_{n1}x_1^* + \cdots + \delta_{nn}x_n^*; & z_n^* = \varepsilon_{n1}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n^*. \end{array}$$

Очевидно (див. (4, 5)), що

$$y_1^* = 0, \quad \dots, \quad y_p^* = 0, \quad z_{s+1}^* = 0, \quad \dots, \quad z_n^* = 0.$$

З усього вище сказаного слідує, що

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_i^*x_j^* = y_1^{*2} + \cdots + y_p^{*2} - {y_{p+1}^*}^2 - \cdots - y_r^{*2} =$$

$$= -{y_{p+1}^*}^2 - \cdots - y_r^{*2},$$

Доведення.

Це система з $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь з n змінними. Оскільки $p<s$, то $n+p-s<n$, що в свою чергу означає, що число рівнянь системи рівнянь (5) менше за число змінних, отже, вона має ненульовий розв'язок $x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_n^*$.

Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1^* = \delta_{11}x_1^* + \cdots + \delta_{1n}x_n^*, & z_1^* = \varepsilon_{11}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n^*, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^* = \delta_{n1}x_1^* + \cdots + \delta_{nn}x_n^*; & z_n^* = \varepsilon_{n1}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n^*. \end{array}$$

Очевидно (див. (4, 5)), що

$$y_1^* = 0, \quad \ldots, \quad y_p^* = 0, \quad z_{s+1}^* = 0, \quad \ldots, \quad z_n^* = 0.$$

З усього вище сказаного слідує, що

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_i^*x_j^* = {y_1^*}^2 + \cdots + {y_p^*}^2 - {y_{p+1}^*}^2 - \cdots - {y_r^*}^2 =$$

$$= -{y_{p+1}^*}^2 - \cdots - {y_r^*}^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_i^*x_j^* = {z_1^*}^2 + \cdots + {z_s^*}^2 - {z_{s+1}^*}^2 - \cdots - {z_r^*}^2$$

Доведення.

Це система з $p+(n-s)$ лінійних однорідних рівнянь з n змінними. Оскільки $p<s$, то $n+p-s<n$, що в свою чергу означає, що число рівнянь системи рівнянь (5) менше за число змінних, отже, вона має ненульовий розв'язок $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$.

Далі, нехай

$$\begin{array}{ll} y_1^* = \delta_{11}x_1^* + \cdots + \delta_{1n}x_n^*, & z_1^* = \varepsilon_{11}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{1n}x_n^*, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n^* = \delta_{n1}x_1^* + \cdots + \delta_{nn}x_n^*; & z_n^* = \varepsilon_{n1}x_1^* + \cdots + \varepsilon_{nn}x_n^*. \end{array}$$

Очевидно (див. (4, 5)), що

$$y_1^* = 0, \quad \ldots, \quad y_p^* = 0, \quad z_{s+1}^* = 0, \quad \ldots, \quad z_n^* = 0.$$

З усього вище сказаного слідує, що

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_i^*x_j^* = {y_1^*}^2 + \cdots + {y_p^*}^2 - {y_{p+1}^*}^2 - \cdots - {y_r^*}^2 =$$

$$= -{y_{p+1}^*}^2 - \cdots - {y_r^*}^2,$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}x_i^*x_j^* = {z_1^*}^2 + \cdots + {z_s^*}^2 - {z_{s+1}^*}^2 - \cdots - {z_r^*}^2 =$$

$$= {z_1^*}^2 + \cdots + {z_s^*}^2.$$

Доведення.

З рівності лівих частин попередніх рівностей випливає рівність правих її частин:
$$-{y^*_{p+1}}^2 - \dots - {y^*_r}^2 = {z^*_1}^2 + \dots + {z^*_s}^2. \tag{6}$$

Доведення.

З рівності лівих частин попередніх рівностей випливає рівність правих її частин:

$$-{y^*_{p+1}}^2 - \cdots - {y^*_r}^2 = {z^*_1}^2 + \cdots + {z^*_s}^2. \tag{6}$$

Оскільки $y^*_{p+1}, \ldots, y^*_r, z^*_1, \ldots, z^*_s$ — дійсні числа,

Доведення.

З рівності лівих частин попередніх рівностей випливає рівність правих її частин:

$$-{y_{p+1}^{*}}^{2} - \dots - {y_r^{*}}^{2} = {z_1^{*}}^{2} + \dots + {z_s^{*}}^{2}. \tag{6}$$

Оскільки $y_{p+1}^*, \dots, y_r^*, z_1^*, \dots, z_s^*$ — дійсні числа, то із (6) одержимо, що

$$z_1^* = 0, \quad \dots, \quad z_s^* = 0.$$

Доведення.

З рівності лівих частин попередніх рівностей випливає рівність правих її частин:

$$-{y_{p+1}^*}^2 - \dots - {y_r^*}^2 = {z_1^*}^2 + \dots + {z_s^*}^2. \tag{6}$$

Оскільки $y_{p+1}^*, \dots, y_r^*, z_1^*, \dots, z_s^*$ — дійсні числа, то із (6) одержимо, що

$$z_1^* = 0, \quad \dots, \quad z_s^* = 0.$$

Таким чином, $z_i^* = 0$ для всіх $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

Доведення.

З рівності лівих частин попередніх рівностей випливає рівність правих її частин:

$$-{y^*_{p+1}}^2 - \cdots - {y^*_r}^2 = {z^*_1}^2 + \cdots + {z^*_s}^2. \tag{6}$$

Оскільки $y^*_{p+1}, \ldots, y^*_r, z^*_1, \ldots, z^*_s$ — дійсні числа, то із (6) одержимо, що

$$z^*_1 = 0, \quad \ldots, \quad z^*_s = 0.$$

Таким чином, $z^*_i = 0$ для всіх $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і (див. (2))

$$\begin{aligned} x^*_1 &= \gamma_{11} z^*_1 + \cdots + \gamma_{1n} z^*_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^*_n &= \gamma_{n1} z^*_1 + \cdots + \gamma_{nn} z^*_n = 0. \end{aligned}$$

Доведення.

З рівності лівих частин попередніх рівностей випливає рівність правих її частин:

$$-{y_{p+1}^{*}}^{2}-\dots-{y_r^{*}}^{2}={z_1^{*}}^{2}+\dots+{z_s^{*}}^{2}. \tag{6}$$

Оскільки $y_{p+1}^*, \dots, y_r^*, z_1^*, \dots, z_s^*$ — дійсні числа, то із (6) одержимо, що

$$z_1^*=0, \quad \dots, \quad z_s^*=0.$$

Таким чином, $z_i^*=0$ для всіх $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ і (див. (2))

$$\begin{aligned} x_1^* &= \gamma_{11}z_1^*+\dots+\gamma_{1n}z_n^*=0, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^* &= \gamma_{n1}z_1^*+\dots+\gamma_{nn}z_n^*=0. \end{aligned}$$

Це суперечить тому, що $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ є ненульовим розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (5).

Доведення.

З рівності лівих частин попередніх рівностей випливає рівність правих її частин:

$$-{y_{p+1}^*}^2 - \cdots - {y_r^*}^2 = {z_1^*}^2 + \cdots + {z_s^*}^2. \qquad (6)$$

Оскільки y_{p+1}^*, ..., y_r^*, z_1^*, ..., z_s^* — дійсні числа, то із (6) одержимо, що

$$z_1^* = 0, \quad \ldots, \quad z_s^* = 0.$$

Таким чином, $z_i^* = 0$ для всіх $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і (див. (2))

$$\begin{aligned} x_1^* &= \gamma_{11} z_1^* + \cdots + \gamma_{1n} z_n^* = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^* &= \gamma_{n1} z_1^* + \cdots + \gamma_{nn} z_n^* = 0. \end{aligned}$$

Це суперечить тому, що x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* є ненульовим розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (5). Отже, припущення, що $p < s$ так само як і $p > s$ є неправильним.

Доведення.

З рівності лівих частин попередніх рівностей випливає рівність правих її частин:

$$-{y_{p+1}^*}^2 - \cdots - {y_r^*}^2 = {z_1^*}^2 + \cdots + {z_s^*}^2. \qquad (6)$$

Оскільки $y_{p+1}^*, \ldots, y_r^*, z_1^*, \ldots, z_s^*$ — дійсні числа, то із (6) одержимо, що

$$z_1^* = 0, \quad \ldots, \quad z_s^* = 0.$$

Таким чином, $z_i^* = 0$ для всіх $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і (див. (2))

$$\begin{aligned} x_1^* &= \gamma_{11} z_1^* + \cdots + \gamma_{1n} z_n^* = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^* &= \gamma_{n1} z_1^* + \cdots + \gamma_{nn} z_n^* = 0. \end{aligned}$$

Це суперечить тому, що $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$ є ненульовим розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (5). Отже, припущення, що $p < s$ так само як і $p > s$ є неправильним. А тому $p = s$.

Доведення.

З рівності лівих частин попередніх рівностей випливає рівність правих її частин:

$$-{y^*_{p+1}}^2 - \cdots - {y^*_r}^2 = {z^*_1}^2 + \cdots + {z^*_s}^2. \tag{6}$$

Оскільки $y^*_{p+1}, \ldots, y^*_r, z^*_1, \ldots, z^*_s$ — дійсні числа, то із (6) одержимо, що

$$z^*_1 = 0, \quad \ldots, \quad z^*_s = 0.$$

Таким чином, $z^*_i = 0$ для всіх $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і (див. (2))

$$\begin{aligned} x^*_1 &= \gamma_{11} z^*_1 + \cdots + \gamma_{1n} z^*_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^*_n &= \gamma_{n1} z^*_1 + \cdots + \gamma_{nn} z^*_n = 0. \end{aligned}$$

Це суперечить тому, що $x^*_1, x^*_2, \ldots, x^*_n$ є ненульовим розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (5). Отже, припущення, що $p < s$ так само як і $p > s$ є неправильним. А тому $p = s$. Тобто число додатних квадратів змінних у обох квадратичних формах (3) нормального вигляду є однаковим.

Доведення.

З рівності лівих частин попередніх рівностей випливає рівність правих її частин:

$$-{y_{p+1}^*}^2 - \cdots - {y_r^*}^2 = {z_1^*}^2 + \cdots + {z_s^*}^2. \tag{6}$$

Оскільки y_{p+1}^*, ..., y_r^*, z_1^*, ..., z_s^* — дійсні числа, то із (6) одержимо, що

$$z_1^* = 0, \quad \ldots, \quad z_s^* = 0.$$

Таким чином, $z_i^* = 0$ для всіх $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і (див. (2))

$$\begin{aligned} x_1^* &= \gamma_{11} z_1^* + \cdots + \gamma_{1n} z_n^* = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n^* &= \gamma_{n1} z_1^* + \cdots + \gamma_{nn} z_n^* = 0. \end{aligned}$$

Це суперечить тому, що x_1^*, x_2^*, ..., x_n^* є ненульовим розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (5). Отже, припущення, що $p < s$ так само як і $p > s$ є неправильним. А тому $p = s$. Тобто число додатних квадратів змінних у обох квадратичних формах (3) нормального вигляду є однаковим. Як наслідок одержуємо,

Доведення.

З рівності лівих частин попередніх рівностей випливає рівність правих її частин:

$$-{y^*_{p+1}}^2 - \cdots - {y^*_r}^2 = {z^*_1}^2 + \cdots + {z^*_s}^2. \qquad (6)$$

Оскільки y^*_{p+1}, ..., y^*_r, z^*_1, ..., z^*_s — дійсні числа, то із (6) одержимо, що

$$z^*_1 = 0, \quad \ldots, \quad z^*_s = 0.$$

Таким чином, $z^*_i = 0$ для всіх $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ і (див. (2))

$$\begin{aligned} x^*_1 &= \gamma_{11} z^*_1 + \cdots + \gamma_{1n} z^*_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x^*_n &= \gamma_{n1} z^*_1 + \cdots + \gamma_{nn} z^*_n = 0. \end{aligned}$$

Це суперечить тому, що x^*_1, x^*_2, ..., x^*_n є ненульовим розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (5). Отже, припущення, що $p < s$ так само як і $p > s$ є неправильним. А тому $p = s$. Тобто число додатних квадратів змінних у обох квадратичних формах (3) нормального вигляду є однаковим. Як наслідок одержуємо, що і число від'ємних квадратів змінних у цих квадратичних формах співпадає.

Доведення.

З рівності лівих частин попередніх рівностей випливає рівність правих її частин:

$$-{y_{p+1}^*}^2 - \dots - {y_r^*}^2 = {z_1^*}^2 + \dots + {z_s^*}^2. \tag{6}$$

Оскільки y_{p+1}^*, …, y_r^*, z_1^*, …, z_s^* — дійсні числа, то із (6) одержимо, що

$$z_1^* = 0, \quad \dots, \quad z_s^* = 0.$$

Таким чином, $z_i^* = 0$ для всіх $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ і (див. (2))

$$\begin{array}{l} x_1^* = \gamma_{11} z_1^* + \dots + \gamma_{1n} z_n^* = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^* = \gamma_{n1} z_1^* + \dots + \gamma_{nn} z_n^* = 0. \end{array}$$

Це суперечить тому, що x_1^*, x_2^*, …, x_n^* є ненульовим розв'язком системи лінійних однорідних рівнянь (5). Отже, припущення, що $p < s$ так само як і $p > s$ є неправильним. А тому $p = s$. Тобто число додатних квадратів змінних у обох квадратичних формах (3) нормального вигляду є однаковим. Як наслідок одержуємо, що і число від'ємних квадратів змінних у цих квадратичних формах співпадає. Теорема доведена. □

Означення 3

Нехай деяка дійсна квадратична форма $f(x_1, \dots, x_n)$

Означення 3

Нехай деяка дійсна квадратична форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

Означення 3

Нехай деяка дійсна квадратична форма $f(x_1, \dots, x_n)$ еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2.$$

Тоді число p додатних квадратів змінних цієї квадратичної форми нормального вигляду називається додатним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \dots, x_n)$.

Означення 3

Нехай деяка дійсна квадратична форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

Тоді число p додатних квадратів змінних цієї квадратичної форми нормального вигляду називається додатним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$. Число q від'ємних квадратів змінних у квадратичні формі нормальному вигляді називається від'ємним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Означення 3

Нехай деяка дійсна квадратична форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

Тоді число p додатних квадратів змінних цієї квадратичної форми нормального вигляду називається додатним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$. Число q від'ємних квадратів змінних у квадратичні формі нормальному вигляді називається від'ємним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$. Різниця $p - q$ між додатним та від'ємним індексами інерції називається сигнатурою даної квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Означення 3

Нехай деяка дійсна квадратична форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

Тоді число p додатних квадратів змінних цієї квадратичної форми нормального вигляду називається додатним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$. Число q від'ємних квадратів змінних у квадратичні формі нормальному вигляді називається від'ємним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$. Різниця $p - q$ між додатним та від'ємним індексами інерції називається сигнатурою даної квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Сигнатуру квадратичної форми f позначатимемо через $\operatorname{sign} f$.

Означення 3

Нехай деяка дійсна квадратична форма $f(x_1, \dots, x_n)$ еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2.$$

Тоді число p додатних квадратів змінних цієї квадратичної форми нормального вигляду називається додатним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \dots, x_n)$. Число q від'ємних квадратів змінних у квадратичні формі нормальному вигляді називається від'ємним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \dots, x_n)$. Різниця $p - q$ між додатним та від'ємним індексами інерції називається сигнатурою даної квадратичної форми $f(x_1, \dots, x_n)$.

Сигнатуру квадратичної форми f позначатимемо через $\mathrm{sign} f$.

Теорема 5 (класифікаційна теорема)

Означення 3

Нехай деяка дійсна квадратична форма $f(x_1, \dots, x_n)$ еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

Тоді число p додатних квадратів змінних цієї квадратичної форми нормального вигляду називається додатним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \dots, x_n)$. Число q від'ємних квадратів змінних у квадратичні формі нормальному вигляді називається від'ємним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \dots, x_n)$. Різниця $p - q$ між додатним та від'ємним індексами інерції називається сигнатурою даної квадратичної форми $f(x_1, \dots, x_n)$.

Сигнатуру квадратичної форми f позначатимемо через $\operatorname{sign} f$.

Теорема 5 (класифікаційна теорема)

Дві дійсні квадратичні форми від одного числа змінних

Означення 3

Нехай деяка дійсна квадратична форма $f(x_1,\dots,x_n)$ еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2+\dots+x_p^2-x_{p+1}^2-\dots-x_{p+q}^2.$$

Тоді число p додатних квадратів змінних цієї квадратичної форми нормального вигляду називається додатним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1,\dots,x_n)$. Число q від'ємних квадратів змінних у квадратичні формі нормальному вигляді називається від'ємним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1,\dots,x_n)$. Різниця $p-q$ між додатним та від'ємним індексами інерції називається сигнатурою даної квадратичної форми $f(x_1,\dots,x_n)$.

Сигнатуру квадратичної форми f позначатимемо через $\operatorname{sign} f$.

Теорема 5 (класифікаційна теорема)

Дві дійсні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки тоді,

Означення 3

Нехай деяка дійсна квадратична форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

Тоді число p додатних квадратів змінних цієї квадратичної форми нормального вигляду називається додатним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$. Число q від'ємних квадратів змінних у квадратичні формі нормальному вигляді називається від'ємним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$. Різниця $p - q$ між додатним та від'ємним індексами інерції називається сигнатурою даної квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Сигнатуру квадратичної форми f позначатимемо через $\mathrm{sign} f$.

Теорема 5 (класифікаційна теорема)

Дві дійсні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки тоді, коли співпадають ранги цих квадратичних форм

Означення 3

Нехай деяка дійсна квадратична форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ еквівалентна квадратичній формі нормального вигляду

$$x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2.$$

Тоді число p додатних квадратів змінних цієї квадратичної форми нормального вигляду називається додатним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$. Число q від'ємних квадратів змінних у квадратичні формі нормальному вигляді називається від'ємним індексом інерції квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$. Різниця $p - q$ між додатним та від'ємним індексами інерції називається сигнатурою даної квадратичної форми $f(x_1, \ldots, x_n)$.

Сигнатуру квадратичної форми f позначатимемо через $\operatorname{sign} f$.

Теорема 5 (класифікаційна теорема)

Дві дійсні квадратичні форми від одного числа змінних еквівалентні тоді і тільки тоді, коли співпадають ранги цих квадратичних форм і співпадають сигнатури обох квадратичних форм.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних x_1, x_2, ..., x_n,

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги,

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних x_1, x_2, ..., x_n, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r,$$

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

За основною теоремою про дійсні квадратичні форми

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

За основною теоремою про дійсні квадратичні форми кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна дійсній квадратичній формі нормального вигляду:

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

За основною теоремою про дійсні квадратичні форми кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна дійсній квадратичній формі нормального вигляду:

$$f \sim x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

За основною теоремою про дійсні квадратичні форми кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна дійсній квадратичній формі нормального вигляду:

$$f \sim x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

$$g \sim x_1^2 + \cdots + x_{p'}^2 - x_{p'+1}^2 - \cdots - x_{p'+q'}^2,$$

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

За основною теоремою про дійсні квадратичні форми кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна дійсній квадратичній формі нормального вигляду:

$$f \sim x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

$$g \sim x_1^2 + \cdots + x_{p'}^2 - x_{p'+1}^2 - \cdots - x_{p'+q'}^2,$$

де

$$p + q = r = p' + q',$$

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

За основною теоремою про дійсні квадратичні форми кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна дійсній квадратичній формі нормального вигляду:

$$f \sim x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

$$g \sim x_1^2 + \cdots + x_{p'}^2 - x_{p'+1}^2 - \cdots - x_{p'+q'}^2,$$

де

$$p + q = r = p' + q', \qquad p - q = s = p' - q'.$$

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

За основною теоремою про дійсні квадратичні форми кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна дійсній квадратичній формі нормального вигляду:

$$f \sim x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

$$g \sim x_1^2 + \cdots + x_{p'}^2 - x_{p'+1}^2 - \cdots - x_{p'+q'}^2,$$

де

$$p + q = r = p' + q', \qquad p - q = s = p' - q'.$$

Звідси

$$p = \frac{r+s}{2} = p',$$

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

За основною теоремою про дійсні квадратичні форми кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна дійсній квадратичній формі нормального вигляду:

$$f \sim x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2,$$

$$g \sim x_1^2 + \dots + x_{p'}^2 - x_{p'+1}^2 - \dots - x_{p'+q'}^2,$$

де

$$p + q = r = p' + q', \qquad p - q = s = p' - q'.$$

Звідси

$$p = \frac{r+s}{2} = p', \qquad q = \frac{r-s}{2} = q',$$

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

За основною теоремою про дійсні квадратичні форми кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна дійсній квадратичній формі нормального вигляду:

$$f \sim x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

$$g \sim x_1^2 + \cdots + x_{p'}^2 - x_{p'+1}^2 - \cdots - x_{p'+q'}^2,$$

де

$$p + q = r = p' + q', \qquad p - q = s = p' - q'.$$

Звідси

$$p = \frac{r+s}{2} = p', \qquad q = \frac{r-s}{2} = q',$$

тобто квадратичні форми f і g еквівалентні одній і тій ж дійсній квадратичній формі нормального вигляду.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

За основною теоремою про дійсні квадратичні форми кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна дійсній квадратичній формі нормального вигляду:

$$f \sim x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

$$g \sim x_1^2 + \cdots + x_{p'}^2 - x_{p'+1}^2 - \cdots - x_{p'+q'}^2,$$

де

$$p + q = r = p' + q', \qquad p - q = s = p' - q'.$$

Звідси

$$p = \frac{r+s}{2} = p', \qquad q = \frac{r-s}{2} = q',$$

тобто квадратичні форми f і g еквівалентні одній і тій ж дійсній квадратичній формі нормального вигляду. Тому за симетричною та транзитивною властивостями еквівалентності квадратичних форм

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.
Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

За основною теоремою про дійсні квадратичні форми кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна дійсній квадратичній формі нормального вигляду:

$$f \sim x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

$$g \sim x_1^2 + \cdots + x_{p'}^2 - x_{p'+1}^2 - \cdots - x_{p'+q'}^2,$$

де

$$p + q = r = p' + q', \qquad p - q = s = p' - q'.$$

Звідси

$$p = \frac{r+s}{2} = p', \qquad q = \frac{r-s}{2} = q',$$

тобто квадратичні форми f і g еквівалентні одній і тій ж дійсній квадратичній формі нормального вигляду. Тому за симетричною та транзитивною властивостями еквівалентності квадратичних форм квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g.

Доведення.

Необхідність теореми одразу слідує із теореми про інваріантність рангу квадратичної форми та закону інерції дійсної квадратичної форми.

Доведемо тепер достатність теореми. Нехай f і g — дійсні квадратичні форми від n змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що мають однакові ранги, а також мають рівні сигнатури і

$$\operatorname{rank} f = \operatorname{rank} g = r, \quad \operatorname{sign} f = \operatorname{sign} g = s.$$

За основною теоремою про дійсні квадратичні форми кожна із квадратичних форм f і g еквівалентна дійсній квадратичній формі нормального вигляду:

$$f \sim x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_{p+q}^2,$$

$$g \sim x_1^2 + \cdots + x_{p'}^2 - x_{p'+1}^2 - \cdots - x_{p'+q'}^2,$$

де

$$p + q = r = p' + q', \qquad p - q = s = p' - q'.$$

Звідси

$$p = \frac{r+s}{2} = p', \qquad q = \frac{r-s}{2} = q',$$

тобто квадратичні форми f і g еквівалентні одній і тій ж дійсній квадратичній формі нормального вигляду. Тому за симетричною та транзитивною властивостями еквівалентності квадратичних форм квадратична форма f еквівалентна квадратичній формі g. Теорема доведена. $\square$