Доповіді
НАЦІОНАЛЬНОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

5 • 2004

КІБЕРНЕТИКА ТА ОБЧИСЛЮВАЛЬНА ТЕХНІКА

УДК 681.14:517.11

Член-кореспондент НАН України **В. В. Грицик, Ф. Е. Гече**

Реалізація бульових та багатозначних логічних функцій на нейронних елементах

Criteria of the realizability of Boolean and multivalued logical functions by one neuron element are derived, and a method of synthesis of a neuron element over a finite Galois field is developed.

У даній роботі розглядається нова математична модель нейронних елементів, що використовує систему характерів абелевих груп, на яких задаються логічні функції. Запропонована модель є узагальненням нейронних елементів із пороговою функцією активації [1–3].

1. Бульові нейрофункції. Нехай $H_2 = \{-1, 1\}$ — циклічна група 2-го порядку, $G_n = H_2 \times \ldots \times H_2$ — прямий добуток n циклічних груп H_2 і $X(G_n)$ — група характерів [4] групи G_n над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. На множині $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ визначимо функцію

$$\operatorname{Rsign} x = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x > 0, \\ -1, & \text{якщо } x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Розглянемо 2^n-вимірний простір $V_{\mathbb{R}} = \{\varphi \mid \varphi\colon G_n \to \mathbb{R}\}$ над полем $\mathbb{R}$. Елементи χ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1)$ групи $X(G_n)$ утворюють ортогональний базис векторного простору $V_{\mathbb{R}}$. Бульова функція задає однозначне відображення $f\colon G_n \to H_2$, тобто $f \in V_{\mathbb{R}}$. Отже, довільну бульову функцію $f \in V_{\mathbb{R}}$ однозначно можна записати у вигляді

$$f(\mathbf{a}) = s_0\chi_0(\mathbf{a}) + s_1\chi_1(\mathbf{a}) + \ldots + s_{2^n-1}\chi_{2^n-1}(\mathbf{a}). \tag{2}$$

Вектор $\mathbf{s}_f = (s_0, s_1, \ldots, s_{2^n-1})$ називається спектром бульової функції у системі характерів $X(G_n)$.

З різних характерів $X(G_n)$ побудуємо m-елементну множину $\{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\}$ і відносно вибраної системи характерів розглянемо наступну математичну модель нейронного елемента (НЕ)

$$f(x_1(\mathbf{a}), \ldots, x_n(\mathbf{a})) = \operatorname{Rsign}\left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j \chi_{i_j}(\mathbf{a}) + w_0\right), \tag{3}$$

де вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ називається вектором структури НЕ.

Нехай $w(\mathbf{a}) = \omega_1\chi_{i_1}(\mathbf{a}) + \ldots + \omega_m\chi_{i_m}(\mathbf{a}) + \omega_0$. Якщо $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ є вектором структури НЕ відносно системи характерів $\{\chi_{i_1}, \ldots \chi_{i_m}\}$ групи G_n над $\mathbb{R}$, що реалізує бульову функцію $f\colon G_n \to H_2$, то з (1) і (3) безпосередньо випливає, що

$$\forall \mathbf{a} \in G_n \quad w(\mathbf{a}) \neq 0. \tag{4}$$

Далі будемо розглядати лише такі нейронні елементи, вектори структур яких задовольняють умову (4). Множину всіх таких $m+1$-вимірних дійсних векторів, що задовольняють умову (4), позначимо через Ω_{m+1}.

Значення характера χ_i на елементі $\mathbf{a} = ((-1)^{\alpha_1}, \ldots, (-1)^{\alpha_n}) \in G_n$ визначимо за формулою

$$\chi_i(\mathbf{a}) = (-1)^{(\alpha_1 i_1 + \ldots + \alpha_n i_n)},$$

де $i = i_1 2^{n-1} + i_2 2^{n-2} + \ldots + i_{n-1} 2 + i_n$, $i_j, \alpha_j \in \{0, 1\}$.

Очевидно, що нейронний елемент відносно системи характерів $\{\chi_1, \chi_2, \chi_4, \ldots, \chi_{2^{n-1}}\}$ збігається з пороговим елементом [1].

Аналогічно тому, як у пороговій логіці, тут також виникає питання: чи реалізується задана бульова функція $f(x_1, \ldots, x_n)$ одним НЕ відносно вибраної системи характерів $\{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\}$ і якщо так, то як знайти відповідний вектор структури НЕ?

Теорема 1. *Бульова функція $f\colon G_n \to H_2$ реалізується одним нейронним елементом відносно системи характерів $\{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\} \subseteq X(G_n)$ з вектором структури $\mathbf{w} \in \Omega_{m+1}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\forall \mathbf{a} \in G_n \quad f(\mathbf{a})w(\mathbf{a}) = |w(\mathbf{a})|, \tag{5}$$

де $|x|$ — модуль числа x.

Доведення безпосередньо випливає з (3) та з рівності $\operatorname{Rsign} x \cdot x = |x|$.

Теорема 2. *Бульова функція $f\colon G_n \to H_2$ реалізується одним нейронним елементом відносно системи характерів $\{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\} \subseteq X(G_n)$ з вектором структури $\mathbf{w} \in \Omega_{m+1}$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{\mathbf{a} \in G_n} f(\mathbf{a})w(\mathbf{a}) = \sum_{\mathbf{a} \in G_n} |w(\mathbf{a})|. \tag{6}$$

Доведення. Дійсно, якщо припускати, що має місце (6) і функція f не реалізується одним НЕ відносно $\{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\}$, то існують такі елементи $\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_k \in G_n$, для яких не виконується рівність (5), тобто

$$\forall \mathbf{g}_j \in \{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_k\} \quad f(\mathbf{g}_j)w(\mathbf{g}_j) = -|w(\mathbf{g}_j)| \tag{7}$$

і

$$2\sum_{j=1}^{k} |w(\mathbf{g}_j)| = \sum_{\mathbf{a} \in G_n} |w(\mathbf{a})| - \sum_{\mathbf{a} \in G_n} f(\mathbf{a})w(\mathbf{a}) = 0.$$

Отже, $\forall \mathbf{g}_j \in \{\mathbf{g}_1, \ldots, \mathbf{g}_k\}$ $w(\mathbf{g}_j) = 0$, що протиречить умові $\mathbf{w} \in \Omega_{m+1}$. Необхідність є наслідком співвідношення (5).

Запишемо ліву частину рівності (6) у розгорнутому вигляді

$$\sum_{\mathbf{a}\in G_n} f(\mathbf{a})\mathrm{w}(\mathbf{a}) = \sum_{\mathbf{a}\in G_n} f(\mathbf{a})(\omega_1\chi_{i_1}(\mathbf{a}) + \ldots + \omega_m\chi_{i_m}(\mathbf{a}) + \omega_0) =$$

$$= \omega_0 \sum_{\mathbf{a}\in G_n} f(\mathbf{a}) + \sum_{j=1}^{m} \omega_j \biggl(\sum_{\mathbf{a}\in G_n} f(\mathbf{a})\chi_{i_j}(\mathbf{a}) \biggr) = \omega_0 s_0 + \sum_{j=1}^{m} \omega_j s_j.$$

Якщо з спектральних коефіцієнтів $s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}, s_0$ бульової функції f, що відповідають системі характерів $X = \{\chi_{i_1}, \ldots \chi_{i_m}\}$ побудувати вектор $\mathbf{s}_f(X) = (s_{i_1}, \ldots, s_{i_m}; s_0)$, який будемо називати характеристичним вектором бульової функції f відносно системи X, то теорему 2 можна переформулювати так:

Теорема 3. *Бульова функція $f\colon G_n \to H_2$ реалізується одним нейронним елементом відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \ldots \chi_{i_m}\} \subset\subset X(G_n)$ з вектором структури $\mathbf{w} \in \Omega_{m+1}$ тоді і тільки тоді, коли її характеристичний вектор $\mathbf{s}_f(X)$ задовольняє умову*

$$(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X)) = \sum_{\mathbf{a}\in G_n} |\mathrm{w}(\mathbf{a})|, \tag{8}$$

де $(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X))$ — скалярний добуток векторів $\mathbf{w}$ і $\mathbf{s}_f(X)$.

Якщо НЕ з вектором структури $\mathbf{w} \in \Omega_{m+1}$ відносно системи характерів $\{\chi_{i_1}, \ldots \chi_{i_m}\}$ реалізує бульову функцію f, то з теореми 3 та (7) випливає, що для бульової функції $g\colon G_n \to H_2$ $(g \neq f)$ виконується нерівність

$$(\mathbf{w}, \mathbf{s}_f(X)) > (\mathbf{w}, \mathbf{s}_g(X)).$$

Слід відмітити, що теореми Чоу [1] мають місце і для нейронних елементів відносно системи характерів $\{\chi_{i_1}, \ldots \chi_{i_m}\}$.

Для синтезу НЕ відносно системи характерів $\{\chi_{i_1}, \ldots \chi_{i_m}\} \subset\subset X(G_n)$ можна використати метод апроксимації, ітераційний метод [1] та метод, побудований на властивостях матриць толерантності [5].

2. Багатозначні нейрофункції над полем Галуа. Нехай $L = \mathrm{GF}(p^t)$ — поле Галуа, $d = \operatorname{card} L$ — потужність поля L, ε — примітивний елемент поля L і k — натуральне число $(k \geqslant 2)$, що ділить $d-1$. Тоді L містить [6] циклічну групу $H_k = \langle \sigma \mid \sigma^k = 1 \rangle$, де $\sigma = \varepsilon^{(d-1)/k}$. Позначимо через D_n прямий добуток n циклічних груп H_k, тобто $D_n = H_k \times \ldots \times H_k$.

Функція k-значної логіки $f(x_1, \ldots, x_n)$ в алфавіті $\{1, \sigma, \ldots, \sigma^{k-1}\}$ реалізує однозначне відображення $f\colon D_n \to H_k$.

Визначимо на множині $L \setminus \{0\}$ функцію $\operatorname{Lsign} z$ наступним чином:

$$\operatorname{Lsign} z = \sigma^j, \qquad \text{якщо} \quad \frac{j(d-1)}{k} \leqslant \deg z < \frac{(j+1)(d-1)}{k},$$

де $j \in \{0, 1, \ldots, k-1\}$, $\deg z$ — степінь елемента z $(z = \varepsilon^{\deg z})$.

Нехай $X(D_n)$ — група характерів групи D_n над полем L. Кажуть, що функція $f\colon D_n \to H_k$ реалізується одним НЕ відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\}$ групи D_n над полем L, якщо існує такий $m+1$-вимірний вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$, $\omega_i \in L$, що

$$\forall \mathbf{a} \in D_n \quad f(x_1(\mathbf{a}), \ldots, x_n(\mathbf{a})) = \operatorname{Lsign}\Biggl(\oplus \sum_{j=1}^{m} \omega_j \odot \chi_{i_j}(\mathbf{a}) \oplus \omega_0 \Biggr),$$

де вектор $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ називається вектором структури багатозначного НЕ і $\oplus$, $\odot$ — операції додавання і множення у полі L.

Теорема 4. *Функція k-значної логіки $f\colon D_n \to H_k$ $(k \geqslant 2)$ реалізується одним нейронним елементом відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\} \subset X(D_n)$ з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ над полем L тоді і тільки тоді, коли існує така функція $r(\mathbf{x})$, яка визначена на групі D_n і приймає ненульові значення в L, що*

$$r(\mathbf{x}) \odot f(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x}), \qquad 0 \leqslant \deg r(\mathbf{x}) < \frac{d-1}{k}.$$

Нехай $V_L = \{\varphi \mid \varphi\colon D_n \to L\}$. На множині $V_L \times V_L$ задаємо функціонал (,) наступним чином: $\forall \mathbf{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_q)$, $\forall \mathbf{b} = (\beta_1, \ldots, \beta_q) \in V_L$ $(q = k^n)$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \alpha_1 \odot \beta_1^* \oplus \ldots \oplus \alpha_q \odot \beta_q^*$, де $\beta_i^* = \beta_i^{-1}$, якщо $\beta_i \neq 0$, і $\beta_i^* = 0$ у протилежному випадку.

Наступна теорема дає практичний метод синтезу НЕ над полем Галуа.

Теорема 5. *Функція k-значної логіки f $(k \geqslant 2)$ реалізується одним нейронним елементом відносно системи характерів $X = \{\chi_{i_1}, \ldots, \chi_{i_m}\}$ з вектором структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ над полем L тоді і тільки тоді, коли існує така функція $r(\mathbf{x})$, $r\colon D_n \to L \setminus \{0\}$, що*

$$0 \leqslant \deg r(\mathbf{x}) < \frac{d-1}{k}, \qquad (r(\mathbf{x}) \odot f(\mathbf{x}), \chi_j(\mathbf{x})) = 0,$$

для всіх $\chi_j \in X(D_n)$, крім $j = 0, i_1, \ldots, i_m$.

Якщо функція k-значної логіки $f(x_1, \ldots, x_n)$ задовольняє умову теореми 5, то координати вектора структури $\mathbf{w} = (\omega_1, \ldots, \omega_m; \omega_0)$ НЕ, що реалізує функцію f, знаходимо за формулами

$$\omega_0 = k^{-n} \odot (r(\mathbf{x}) \odot f(\mathbf{x}), \chi_0(\mathbf{x})),$$
$$\omega_j = k^{-n} \odot (r(\mathbf{x}) \odot f(\mathbf{x}), \chi_{i_j}(\mathbf{x})), \qquad j = 1, 2, \ldots, n.$$

1. *Дертоузос М.* Пороговая логика. – Москва: Мир, 1967. – 341 с.
2. *Уоссерман Ф.* Нейрокомпьютерная техника: Теория и практика. – Москва: Мир, 1992. – 240 с.
3. *Комарцова Л. Г., Максимов А. В. Нейрокомпьютеры. – Москва: МГТУ им. Н. Э.* Баумана, 2002. – 318 с.
4. *Ван дер Варден Б. Л.* Алгебра. – Москва: Наука, 1979. – 623 с.
5. *Параллельная* обработка информации // Проблемно-ориентированные и специализированные средства обработки информации в 5-ти т. / Под ред. Б. Н. Малиновского, В. В. Грицыка. – Киев: Наук. думка, 1990. – Т. 5. – 502 с.
6. *Лабунец В. Г., Ситников О. П.* Гармонический анализ булевых функций и функций k-значной логики над конечными полями // Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. – 1975. – № 1. – С. 141–148.

Ужгородський національний університет

Надійшло до редакції 23.10.2003