УДК 512.53+512.64
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).15-21

В. М. Бондаренко[1], О. В. Зубарук[2]

[1] Інститут математики НАН України,
провідний науковий співробітник відділу алгебри і топології,
доктор фізико-математичних наук
vitalij.bond@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5064-9452

[2] Київський національний університет імені Тараса Шевченка,
голова циклової комісії вчителів математики УФМЛ,
кандидат фізико-математичних наук
sambrinka@ukr.net
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-3620-4262

ПРО МАТРИЧНІ ЗОБРАЖЕННЯ НАДНАПІВГРУП КОМУТАТИВНОЇ НАПІВГРУПИ ТРЕТЬОГО ПОРЯДКУ БЕЗ ДІЛЬНИКІВ НУЛЯ

Матричні зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре; зокрема, першим автором разом з Ю. А. Дроздом повністю описано всі скінченні ручні групи над довільним фіксованим полем (тобто такі, для яких задача про опис їхніх зображень є ручною).

Матричні зображення напівгруп над полями вивчені не в такій мірі, як зображення груп. Якщо говорити про опис зображень, серед старих результатів є лише окремі результати; найбільш відомими є результати І. С. Понізовського про напівгрупи, що мають скінченне число нерозкладних зображень та результати про алгебри, які можна розглядати також і відносно напівгруп, а саме $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ (І. М. Гельфанд, В. А. Пономарьов) і $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ (перший автор і К. Рінгель).

Протягом майже двадцяти років перший автор і його наукові учні (С М. Дяченко, О. М. Тертична, О. В. Зубарук, Е. М. Костишин, і Я. В. Заціха) детально вивчали матричні зображення для різних класів напівгруп (див. про це в анотації нашої статті в цьому журналі за 2020 рік, том 36, №1, с. 7–15).

Ця стаття авторів присвячена продовженню їхніх досліджень, пов'язаних з матричними зображеннями наднапівгруп скінченних напівгруп.

Ключові слова: наднапівгрупа, визначальні співвідношення, матричні зображення, ручна і дика напівгрупи, напівгрупа скінченного і нескінченного типів, канонічна форма.

1. Вступ. Ця робота присвячена матричним зображенням напівгруп спеціального вигляду, які будуються по заданій напівгрупі та її фіксованим системам твірних і визначальних співвідношень.

Напівгрупи третього порядку вперше описав Т. Тамура в 1953 р. [1] (в термінах таблиць Келі). Г. Е. Форсайт в 1955 р. [2] отримав аналогічний результат за допомогою комп'ютерної програми. Мінімальні системи твірних та відповідні визначальні співвідношення для всіх напівгруп третього порядку (з точністю до ізоморфізму і дуальності) вказані в роботі [3].

Зауважимо, що напівгрупи другого порядку вкладаються в напівгрупи третього порядку шляхом зовнішнього приєднання нульового чи одиничного елемента і тому не вимагають окремого розгляду.

Напівгрупу, яка отримується із деякої циклічної напівгрупи приєднанням нульового чи одиничного елемента, назвемо майже циклічною. Такі напівгрупи, як і циклічні, не цікаві з точки зору теорії зображень (по суті її матричне зображення задається однією матрицею, канонічні форми яких добре відомі). Згідно роботи [4] комутативні напівгрупи третього порядку, що не є ні циклічними, ні майже циклічними, вичерпуються такими чотирма напівгрупами:

a) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = 0$, $bc = cb = 0$;

b) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = 0$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = 0$;

c) $(0, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^2 = b$, $c^2 = c$, $bc = 0$, $cb = 0$;

d) $(c^2, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = c$, $cb = c$.

В круглих дужках вказано всі елементи напівгрупи, в кутових дужках — мінімальну систему твірних, а потім — визначальні співвідношення. Тривіальні визначальні співвідношення для одиничного і нульового твірних (якщо вони є) не виписуються.

Згідно [4, Теорема 1] напівгрупи $b) - d)$ є напівгрупами скінченного зображувального типу над довільним полем K (тобто мають, з точністю до еквівалентності, скінченне число нерозкладних зображень), а напівгрупа a) — ручною напівгрупою нескінченного зображувального типу. Нагадаємо, що напівгрупа називається ручною (дикою), якщо задача про опис її зображень є ручною (дикою); див. загальні означення в роботі [5].

Матричні зображення наднапівгруп напівгруп b) і c) вивчалися авторами відповідно в [6] і [7], а випадок напівгрупи a) добре відомий: див., зокрема, [8], а щодо її найбільш відомих наднапівгруп — [9] і [10].

У цій статті розглядається напівгрупа d), яку ми позначатимемо також через T; вона єдина із чотирьох не має дільників нуля.

Позначимо визначальні співвідношення $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = c$, $cb = c$. відповідно через (b), (c), $(bc2)$, (bc), (cb) і введемо наступні напівгрупи:

$$
\begin{array}{llll}
T^{(b)} & := T \setminus (b) & := (c^2, b, c) = \langle b, c\rangle : & c^3 = c,\ b^2 = c^2,\ bc = c,\ cb = c; \\
T^{(c)} & := T \setminus (c) & := (c^2, b, c) = \langle b, c\rangle : & b^3 = b^2,\ b^2 = c^2,\ bc = c,\ cb = c; \\
T^{(bc2)} & := T \setminus (bc2) & := (c^2, b, c) = \langle b, c\rangle : & b^3 = b^2,\ c^3 = c,\ bc = c,\ cb = c; \\
T^{(bc)} & := T \setminus (bc) & := (c^2, b, c) = \langle b, c\rangle : & b^3 = b^2,\ c^3 = c,\ b^2 = c^2,\ cb = c; \\
T^{(cb)} & := T \setminus (cb) & := (c^2, b, c) = \langle b, c\rangle : & b^3 = b^2,\ c^3 = c,\ b^2 = c^2,\ bc = c.
\end{array}
$$

Кожна із введених напівгруп має фактор-напівгрупу, ізоморфну напівгрупі T, тобто є її наднапівгрупою.

Сформулюємо тепер основний результати цієї статті.

Всі матричні зображення розглядаються над довільним фіксованим полем K, характеристика якого позначається, як звичайно, через $char\, K$.

Теорема 1. *Напівгрупа $T^{(x)}$ має скінченний зображувальний тип для довільного поля K і довільного $x \in \{(b), (c), (bc2), (bc), (cb)\}$.*

2. Матричні зображення напівгрупи T. Без обмеження загальності завжди вважаємо, що матриця зображення, яка відповідає нульовому (відповідно одиничному) елементу напівгрупи, якщо він є, — нульова (відповідно одинична). Матриця зображення напівгрупи, що відповідає елементу x позначається через X. E позначає одиничну матрицю будь-якого розміру $n \times n$ $(n \geq 0)$.

У роботі [4] описано канонічні форми матричних зображень всіх напівгруп третього порядку. Сформулюємо відповідну теорему для напівгрупи $T = d$).

Теорема 2. *Канонічна форма для матричних зображень напівгрупи*

$(c^2, b, c) = \langle b, c\rangle$: $b^3 = b^2$, $c^3 = c$, $b^2 = c^2$, $bc = c$, $cb = c$
над полем K така:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для char $K \neq 2$;

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для char $K = 2$.

Те, що це канонічна форма, в даному випадку означає (за означенням першого автора), що будь-яке зображення з точністю до еквівалентності (яка задається одночасною подібністю матриць B і C) має такий же вигляд при деяких розмірах одиничних і нульових клітин; звідси, зокрема, випливає, що з точністю до еквівалентності число нерозкладних зображень скінченне.

Зауважимо, що при описі матричних зображень напівгруп мінімальність системи твірних природна, а мінімальність системи твірних для фіксованої мінімальної системи твірних не має особливого значення (часто “зайві” співвідношення навіть корисні, коли вони мають простий вигляд). Але якщо говорити про тематику взагалі, то, звичайно ж, бажано мати в заключному варіанті як мінімальні системи твірних, так і мінімальні системи визначальних співвідношень. В зв’язку з цим детально проаналізуємо доведення теореми 2 із роботи [4], яке приводимо майже дослівно.

Спочатку перетвореннями подібності приведемо матрицю B до нормальної форми Жордана в такій формі:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тоді, після розбиття матриці C на блоки такого ж розміру, як і блоки матриці B, з рівностей $BC = C$ і $CB = C$ випливає, що

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи рівність $B^2 = C^2$, отримуємо $C_1^2 = E$ і залишилося лише привести (перетвореннями подібності) матрицю C_1 до вигляду

$$C_1 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

якщо $char\, K \neq 2$, і до вигляду

$$C_1 = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

якщо $char\, K = 2$.

У кінці доведення в [4] зауважено, що рівність $C^3 = C$ не використовувалася (вона виконується автоматично) і відмічено, що це випливає і без розгляду зображень, а саме $c^3 = (c^2)c = b^2c = bc = c$. Іншими словами, визначальне співвідношення $c^3 = c$ є "зайвим".

Проаналізуємо це доведення.

Якщо після приведення матриці B використати лише одну із рівностей $BC = C$ і $CB = B$ — скажімо, перше (інший випадок розглядається аналогічно), то маємо

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а тоді із $B^2 = C^2$ випливає, що $C_1^2 = E$ і $C_i = 0$ при $i = 2, 3, 4$. Тобто прийшли до того самого висновку, що і в основному доведенні не лише без рівності $C^3 = C$, а й без рівності $CB = C$, а це означає, що і визначальне співвідношення $cb = c$ є "зайвим" (бо кожна скінченна напівгрупа має точне зображення).

Отже, із приведених міркувань маємо наступний висновок.

Наслідок 1. *Напівгрупа $T = d)$ має такі зображення у вигляді твірних і визначальних співвідношень:*
$T = (c^2, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^3 = b^2$, $b^2 = c^2$, $bc = c$;
$T = (c^2, b, c) = \langle b, c \rangle$: $b^3 = b^2$, $b^2 = c^2$, $cb = c$.

3. Доведення теореми 1. У доведеннях з матричними обчисленнями ми будемо опускати деталі, рекомендуючи читачеві статтю [6].

Із теореми 2 і наслідку 1 випливає, що залишилося розглянути випадки $T^{(b)}$ і $T^{(bc2)}$.

Розглянемо спочатку випадок $T^{(b)}$. Враховуючи, що мінімальний поліном елемента c дорівнює $x(x^2 - 1)$, приведемо спочатку перетвореннями подібності матрицю C до вигляду

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $C_1^2 = E$. Тоді із рівностей $BC = C$ і $CB = B$ випливає, що

$$B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix},$$

де $B_1C_1 = C_1$ і $C_1B_1 = C_1$. Нарешті, врахувавши рівність $B^2 = C^2$, маємо, що $B_1^2 = E$, $B_2^2 = 0$. Отже, пара матриць (B, C) розкладається в пряму суму пар матриць $a)$ (B_1, C_1), де $B_1^2 = E$, $C_1^2 = E$, $B_1C_1 = C_1, C_1B_1 = C_1$ і $b)$ $(B_2, 0)$, де

$B_2^2 = 0$. У випадку $a)$ (після скорочення останньої рівності на C_1) маємо, що $B_1 = E$, $C_1^2 = E$, а значить пара B_1, C_1 подібна парі

$$B_1' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad C_1' = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

якщо $char\, K \neq 2$, і парі

$$B_1' = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad C_1' = \begin{pmatrix} E & E & 0 \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

якщо $char\, K = 2$. Отже, в обох випадках маємо з точністю до подібності по дві нерозкладні пари, а саме у випадку $char\, K \neq 2$ $P_1 = (1,1)$ і $P_2 = (1,-1)$, а у випадку $char\, K = 2$ $P_1 = (1,1)$ і $P_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.

У випадку $b)$ також маємо дві нерозкладні пари: $P_3 = (J_1, , 0)$ і $P_4 = (J_2, 0)$, де J_1 і J_2 — клітки Жордана з власним числом 0 відповідно розмірів 1×1 і 2×2).

Отже, якщо говорити про випадок $T^{(b)}$ в цілому, то для пар (B, C) канонічна форма має такий вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char\, \neq 2$ і

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char\, = 2$.

Розглянемо тепер випадок $T^{(bc2)}$. Оскільки $B^3 = B^2$, $BC = C$ і $CB = C$, то пара (B, C) подібна парі такого вигляду як в доведенні теореми 2 після першого кроку доведення. Рівності $B^2 = C^2$ вже немає, але із рівності $C^3 = C$ маємо, що матриця C_1 (яка допускає подібні перетворення) задовольняє рівність $C_1^3 = C_1$, а значить число нерозкладних пар матриць (B, C) скінченне. Канонічна форма для них має такий вигляд:

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char \neq 2$ і

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для $char = 2$.

Теорема 1 доведена.

4. Висновки та перспективи подальших досліджень. У роботі продовжується вивчення матричних зображень наднапівгруп спеціального вигляду комутативних напівгруп третього порядку, а саме єдиної напівгрупи без дільників нуля, яка не є ні циклічною, ні майже циклічною. Досліджується їхній зображувальний тип над довільним полем і канонічна форма матричних зображень. Отримані результати знайдуть застосування в першу чергу при вивченні матричних зображень наднапівгруп некомутативних напівгруп третього порядку.

Список використаної літератури

1. Tamura T. Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ.* 1953. Vol. 3, P. 1–11.
2. Forsythe G. E. SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc.* 1955. Vol. 6. P. 443–447.
3. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Про визначальні співвідношення для мінімальних систем твірних напівгруп третього порядку. *Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова (Серія 1. Фізико-математичні науки).* 2013. № 14. С. 62–67.
4. Бондаренко В. М., Заціха Я. В. Канонічні форми матричних зображень напівгруп малого порядку. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика).* 2018. Т. 32, № 1. С. 36–49.
5. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах. Матричные задачи. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1977. С. 104–114.
6. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними ідемпотентами. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика).* 2020. Т. 36, № 1. С. 7–15.
7. Бондаренко В. М., Зубарук О. В. Про матричні зображення наднапівгруп напівгрупи, породженої двома взаємно анульовними 2-потентним і 2-нільпотентним елементами. *Вісник Київського нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка (серія: фізико-математичні науки).* 2020. № 3. С. 110–114.
8. Бондаренко В. М., Литвинчук И. В. О некоторых ручных и диких матричных задачах постоянного ранга. *Наук. вісник Ужгород. ун-ту (серія: математика і інформатика).* 2012. Т. 23, № 1. С. 19–27.
9. Гельфанд И. М., Пономарьов В. А. Неразложимые представления группы Лоренца. *Успехи мат. наук.* 1968 . Т. 23, № 2. С. 3–60.
10. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2. *Матем. сб.* 1975. Т. 96, № 1. С. 63–74.

Bondarenko V. M., Zubaruk O. V. On matrix representations of oversemigroups of the commutative semigroup of the third order without zero divisors.

Matrix representations of finite groups over fields are studied sufficiently well; in particular, the first author together with Yu. A. Drozd fully described all finite tame groups over an arbitrary fixed field (i.e. ones for which the problem of classifying their representations is tame).

Matrix representations of semigroups over fields have not been studied to the same extent as representations of groups. If one talks about the classification of representations, among the old results there are only separate results; the most famous are the results of I. S. Ponizovsky on semigroups having a finite number of indecomposable representations and results on algebras which can also be considered relative to semigroups, namely $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ (I. M. Gelfand, V. A. Ponomaryov) and $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ (first author and C. Ringel).

For almost twenty years the first author and his scientific students (S. M. Dyachenko, O. M. Tertychna, O. V. Zubaruk, E. M. Kostyshyn and Ya. V. Zatsikha) studied in detail matrix representations for various classes of semigroups (see about this in the abstract of our paper in this magazine for 2020, vol. 36, no. 1, p. 7–15).

This paper of the authors is devoted to the continuation of their research related to matrix representations of oversemigroups of finite semigroups.

Keywords: oversemigroup, defining relations, matrix representations, tame and wild semigroups, semigroup of finite and infinite types, canonical form.

References

1. Tamura, T. (1953). Some remarks on semi-groups and all types of semi-groups of order 2, 3. *J. Gakugei Tokushima Univ.,* 3, 1–11.
2. Forsythe, G. E. (1955). SWAC computes 126 distinct semigroups of order 4. *Proc. Amer. Math. Soc.,* 6, 443–447.
3. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ja. V. (2013). On the defining relations for the minimal systems of generators of the third order semigroup. *Scientific journal of NPU named after M. P. Drahomanov, Series 1, Physics and Mathematics,* 14, 62–67 [in Ukrainian].
4. Bondarenko, V. M., & Zaciha, Ja. V. (2018). Canonical forms of matrix representations of semigroups of small order. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University: Ser. of mathematics,* 32(1), 36–49. [in Ukrainian]
5. Drozd, Yu. A. (1977). *Pro ruchni ta dyki matrychni problemy* [On tame and wild matrix problems]. Matrix problems. Kyiv: Institute of Math. of AN of Ukrain. SSR [in Russian].
6. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2020). On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by two annihilating idempotents. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University: Ser. of mathematics and computer science,* 36(1), 7–15 [in Ukrainian].
7. Bondarenko, V. M., & Zubaruk, O. V. (2020). On matrix representations of oversemigroups of semigroups generated by mutually annihilating 2-potent and 2-nilpotent elements. *Bulletin Taras Shevchenko Nat. University of Kyiv, ser. physicsand mathematics,* 3, 110–114. [in Ukrainian].
8. Bondarenko, V. M., & Lytvynchuk, I. V. (2012). O nekotorykh ruchnych i difikh matrichny zadachakh postoyannogo ranga [On some tame and wild matrix problems of constant rank]. *Scientific Bulletin of Uzhhorod University, ser. of mathematics and computer science,* 23(1), 19–27 [in Russian].
9. Gelfand, I. M., & Ponomarev, V. A. (1968). Insecomposable representations of the Lorentz groups. *Russian Math. Surveys,* 23, 1–58.
10. Bondarenko, V. M. (1975). Representations of dihedral groups over a field of characteristic 2. *Math. USSR Sbornik,* 25(1), 58–68.

Одержано 15.10.2023