УДК 519.21
DOI https://doi.org/10.24144/2616-7700.2023.43(2).29-33

О. І. Клесов[1], О. В. Колеснік[2]

[1] Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,
завідувач кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей,
доктор фізико-математичних наук, професор
voselk@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0365-7716

[2] Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”,
аспірант кафедри математичного аналізу та теорії ймовірностей
lxndr.kolesnik@gmail.com
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-8243-6831

ШВИДКІСТЬ ЗБІЖНОСТІ У ПІДСИЛЕНОМУ ЗАКОНІ ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ РЕКОРДІВ У F^{α} СХЕМІ

У статті вивчається асимптотична поведінка кількості рекордів у так званій F^{α}-схемі, яка узагальнює класичну постановку для незалежних однаково розподілених випадкових величин. Отриманий результат є новим навіть у класичній постановці і може трактуватися як оцінка швидкості збіжності у теоремі Реньї.

Ключові слова: незалежні однаково розподілені випадкові величини, F^{α}-схема, рекорди, кількість рекордів, підсилений закон великих чисел, швидкість збіжності.

1. Вступ. Розглянемо послідовність $\{X_k, k \geq 1\}$ незалежних однаково розподілених випадкових величин, функція розподілу яких є неперервною. Тоді події типу $\{X_i = X_j\}$ мають ймовірність 0, якщо $i \neq j$. Нехай $L(1) = 1$. Означимо рекурентно випадкові величини

$$L(n) = \inf\{k > L(n-1) : X_k > X_{L(n-1)}\}, \qquad n \geq 2, \tag{1}$$

вважаючи, що $\inf \emptyset := +\infty$. Члени послідовності $L = \{L(n), n \geq 1\}$ називаються *моментами рекордів*, побудованими з послідовності $\{X_k, k \geq 1\}$. Ми також розглядаємо послідовність випадкових величин $\mu = \{\mu(n), n \geq 1\}$, означену співвідношенням

$$\mu(n) = \#\{k : L(k) \leq n\}, \qquad n \geq 1. \tag{2}$$

Зрозуміло, що $\mu(n)$ — це *кількість рекордів*, що трапились до моменту n включно.

Граничні властивості послідовності $\{\mu(n)\}$ для збіжності розподілів вивчені повною мірою (див., наприклад, [8]), але збіжності майже напевно приділялось набагато менше уваги. Так, Реньї [9] довів, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n)}{\ln(n)} = 1, \qquad \text{майже напевно} \tag{3}$$

(сучасне доведення цього результату можна знайти, наприклад, в [5] на стор. 307–308). Спроби узагальнити цей результат на залежні випадкові величини $\{X_n\}$ є і досі невдалими. Існує лише один випадок, відмінний від класичного, коли це вдається зробити.

В роботі [10] вперше було розглянуто так звану F^α-*схему*, яка будується за заданої функції розподілу та послідовності додатних чисел $\{\alpha_k\}$. Зрозуміло, що $F^{\alpha_n}(x)$ є функцією розподілу для кожного $n \geq 1$. Сукупність незалежних величин $\{X_n\}$ називається F^α-схемою, якщо функцією розподілу випадкової величини X_n є $F^{\alpha_n}(x)$. Якщо всі α_n є рівними між собою, то F^α-схема — це сукупність незалежних однаково розподілених випадкових величин. Якщо ж не всі α_n є рівними між собою, то F^α-схема — це узагальнення класичного випадку.

При вивченні F^α-схеми корисними є допоміжні випадкові величини

$$I_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо } X_k \text{ є рекордом,} \\ 0, & \text{у іншому випадку.} \end{cases}$$

У роботі [7] доведено, що $\{I_k\}$ є незалежними випадковими величинами (див. також [1]) з такими ймовірностями "*успіху*"

$$\mathbf{P}(I_k = 1) = \frac{\alpha_k}{A_k},$$

де $A_1 = \alpha_1$, $A_k = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k$, $k \geq 2$. Оскільки I_k — це випадкова величина Бернуллі, то

$$\mathbf{E}I_k = \frac{\alpha_k}{A_k}, \qquad \mathbf{D}I_k = \frac{\alpha_k}{A_k}\left(1 - \frac{\alpha_k}{A_k}\right). \tag{4}$$

Звідси випливає, що

$$\mathbf{E}\mu(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{A_k}, \tag{5}$$

$$\mathbf{D}\mu(n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{A_k}\left(1 - \frac{\alpha_k}{A_k}\right). \tag{6}$$

Для F^α-схеми підсилений закон великих чисел розглядався у багатьох роботах (огляд існуючих результатів наведено в [3]). Один з випадків F^α-схеми, коли підсилений закон великих чисел можна довести, наведено в [4]:

$$\alpha_k = k^s, \qquad s > -1. \tag{7}$$

Для цієї F^α-схеми

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n)}{\ln(n)} = s + 1, \qquad \text{майже напевно.} \tag{8}$$

Нижче ми наведемо покращення цього результату, яке за формою нагадує підсилений закон великих чисел Марцинкевича–Зігмунда для сум незалежних однаково розподілених випадкових величин (див., наприклад, [6]), яке вдається встановити для F^α-схеми (7) з обмеженням $s \in \mathbf{N}$.

2. Основний результат. Спочатку ми наведемо загальний результат, а після нього наслідок для класичного випадку.

Теорема 1. *Розглянемо F^α-схему (7) з $s \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$. Тоді для довільного дійсного $r > \frac{1}{2}$*

$$\lim_{n\to\infty} (\ln(n))^{1-r} \left(\frac{\mu(n)}{\ln(n)} - s - 1 \right) = 0, \qquad \text{майже напевно.} \tag{9}$$

Зрозуміло, що (9) при $r < 1$ дійсно покращує (8).

Доведення. Для доведення теореми використаємо формула Фаульхабера, відому ще з XVII сторіччя:

$$\sum_{k=1}^{n} k^s = \sum_{k=0}^{s} f_k n^{s-k+1}, \qquad f_k = \frac{C_{s+1}^k B_k}{s+1}, \tag{10}$$

де C_{s+1}^k — біноміальні коефіцієнти, а B_k — числа Бернуллі. Зрозуміло, що

$$f_0 = \frac{1}{s+1}. \tag{11}$$

Позначимо суму у лівій частині (10) через F_n. Оскільки

$$\frac{n^s}{F_n} - \frac{1}{f_0 n} = \frac{f_0 n^{s+1} - F_n}{f_0 n F_n} = \frac{O(n^s)}{f_0 n F_n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

то

$$\frac{n^s}{F_n} = \frac{1}{f_0 n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \tag{12}$$

Тому

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k^s}{F_k} = \frac{1}{f_0}(\ln(n) + \gamma + o(1)) + O(1),$$

на підставі формули Ойлера

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1),$$

де γ — константа Ойлера–Маскероні. Використавши (5), отримуємо

$$\mathbf{E}\mu(n) = \frac{\ln(n)}{f_0} + O(1). \tag{13}$$

Підставивши (12) в (4), отримуємо

$$\mathbf{E} I_k = \frac{k^s}{F_k} = \frac{1}{f_0 k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$
$$\mathbf{D} I_k \le \frac{k^s}{F_k} = \frac{1}{f_0 k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\mathbf{D} I_k}{(\ln(k))^{2r}} < \infty,$$

оскільки $r > \frac{1}{2}$. На підставі підсиленого закону великих чисел Колмогорова для неоднаково розподілених незалежних випадкових величин це означає, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n) - \mathbf{E}\mu(n)}{(\ln(n))^r} = 0, \qquad \text{майже напевно.}$$

Якщо асимптотику (13) підставити в цю рівність та врахувати (11), то отримаємо (9).

З теореми 1 ми отримуємо покращення результату Рены, який раніше не зустрічався у літературі (його можна також назвати результатом про швидкість збіжності у підсиленому законі великих чисел Рены (3)).

Наслідок 1. *Нехай $s = 0$. Тоді для будь-якого $\frac{1}{2} < r < 1$*

$$\lim_{n\to\infty} (\ln(n))^{1-r} \left(\frac{\mu(n)}{\ln(n)} - 1 \right) = 0, \qquad \textit{майже напевно.} \tag{14}$$

3. Висновки та перспективи подальших досліджень. В роботі [9] було доведено ще один результат стосовно поведінки майже напевно n-го рекорду, а саме

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(L(n))}{n} = 1, \qquad \text{майже напевно.}$$

Тому можна сподіватись, що аналогічний результат є справедливим також і для F^α-схеми (7). З точки зору, викладеній в монографії [2], послідовності $\{L(n)\}$ та $\{\mu(n)\}$ є дуальними об'єктами, які є асимптотично квазіоберненими один до іншого. Тому асимптотична поведінка одного з них визначає асимптотичну поведінку іншого. Безпосереднє застосування підходу, викладеного в [2], неможливо у випадку F^α-схеми, оскільки нормування в (3) не є псевдорегулярною функцією. З іншого боку, шляхи подолання такого ускладнення намічено в [3].

Перспективним напрямком подальших досліджень є розгляд більш загальних F^α-схем. Зокрема, у теоремі 1, як видається, можна позбавитися обмеження $s \in \mathbf{N}$. Ще більш загальні F^α-схеми потребують більш детального розгляду асимптотики послідовності

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{A_k},$$

при $n \to \infty$. У класичному випадку ця задача зводиться до доведення формули Ойлера. Отримання подібного результату у загальному випадку не є простою задачею.

Список використаної літератури

1. Borovkov K., Pfeifer D. On record indices and record times. *Journal of Statistical Planning and Inference.* 1995. Vol. 45, No. 1–2. P. 65–79.
2. Buldygin V. V., Indlekofer K.-H., Klesov O. I., Steinebach J. Pseudo-Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes. Berlin : Springer Verlag, 2018.
3. Doukhan P., Klesov O. I., Pakes A., Steinebach J. G. Limit theorems for record counts and times in the F^α-scheme *Extremes.* 2013. Vol. 16, No. 2. P. 147–171.
4. Doukhan P., Klesov O. I., Steinebach J. G. Strong laws of large numbers in an F^α-scheme. Mathematical Statistics and Limit Theorems. Festschrift in Honour of Paul Deheuvels. Springer International Publishing : Switzerland, 2015. P. 287–303.

5. Gut A. Probability: A Graduate Course. Berlin : Springer-Verlag, 2005.
6. Klesov O. I. Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables. Berlin : Springer Verlag, 2014.
7. Nevzorov V. B. On record times and inter-record times for sequences of nonidentically distributed random variables. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI.* 1985. Vol. 142. P. 109–118.
8. Nevzorov V. B. Records: Mathematical Theory. Providence, RI : American Mathematical Society, 2001.
9. Rényi A. A. Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations Combinatorial Methods in Probability Theory. Aarhus : Denmark, 1962. P. 10–117.
10. Yang M. On the distribution of the inter-record times in an increasing population. *J. Appl. Prob.* 1975. Vol. 12. P. 148–154.

O. I. Klesov, O. V. Kolesnik Rate of convergence in the strong law of large numbers of records in an F^α scheme.

The asymptotic behavior of the number of records in a so called F^α-scheme is considered in the paper. This setting generalizes the classical setting involving independent identically distributed random variables. The result obtained in the paper is new even in the classical setting and can be viewed as an estimate of the rate of convergence in Rényi's theorem.

Keywords: independent identically distributed randoom variables, F^α-scheme, records, number of records, strong law of large numbers, rate of convergence.

References

1. Borovkov, K., & Pfeifer, D. (1995). On record indices and record times. *Journal of Statistical Planning and Inference,* 45(1–2), 65–79.
2. Buldygin, V. V., Indlekofer, K.-H., Klesov, O. I., & Steinebach, J. (2018). *Pseudo-Regularly Varying Functions and Generalized Renewal Processes.* Berlin: Springer Verlag.
3. Doukhan, P., Klesov, O. I., Pakes, A., & Steinebach, J. G. (2013). Limit theorems for record counts and times in the F^α-scheme *Extremes,* 16(2), 147–171.
4. Doukhan, P., Klesov, O. I., & Steinebach, J. G. (2015). Strong laws of large numbers in an F^α-scheme *Mathematical Statistics and Limit Theorems. Festschrift in Honour of Paul Deheuvels.* Springer International Publishing: Switzerland.
5. Gut, A. (2005). *Probability: A Graduate Course.* Berlin: Springer-Verlag.
6. Klesov, O. I. (2014). *Limit Theorems for Multi-Indexed Sums of Random Variables.* Berlin: Springer Verlag.
7. Nevzorov, V. B. (1985). On record times and inter-record times for sequences of nonidentically distributed random variables. *Zap. Nauchn. Sem. LOMI,* 142, 109–118.
8. Nevzorov, V.'B. (2001). *Records: Mathematical Theory.* Providence, RI: American Mathematical Society.
9. Rényi, A. A. (1962). *Théorie des éléments saillants d'une suite d'observations Combinatorial Methods in Probability Theory.* Aarhus: Denmark.
10. Yang, M. (1975). On the distribution of the inter-record times in an increasing population. *J. Appl. Prob.,* 12, 148–154.

Одержано 15.10.2023