Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
"Ужгородський національний університет"

Тилищак О. А., Юрченко Н. В.

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ
З АЛГЕБРИ
ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
Частина 1

Ужгород — 2020

Збірник завдань з алгебри та аналітичної геометрії Частина 1 / Тилищак О. А., Юрченко Н. В. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т., 2020. – 64 с.

Відповідальний за випуск: завідувач кафедри алгебри ДВНЗ "УжНУ"Шапочка І.В.

Рецензент: Мулеса О.Ю., кандидат технічних наук, доцент

Рекомендовано до друку Науково-методичною комісією Факультету математики та цифрових технологій ДВНЗ "УжНУ", протокол №3 від 14 грудня 2020 р.

ЗМІСТ

Передмова

У збірнику завдань пропонуються умови завдань для самостійної роботи студентів з деяких розділів вищої алгебри та аналітичної геометрії.

Посібник складається з чотирнадцяти параграфів. В перших двох параграфах студентам пропонуються завдання по темі комплексні числа та дії над ними. В наступних шести параграфах в основі завдання на розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь різними методами. В дев'ятому параграфі ряд завдань по темі многочлени, корені многочленів. Наступні п'ять параграфів містять завдання з аналітичної геометрії. Серед тем є наступні: вектори на площині та в просторі, дії над векторами в координатній формі, скалярний, векторний, мішаний добутки векторів, рівняння прямої на площині, рівняння площини в просторі, взаємне розміщення прямої та площини в просторі.

В межах кожного параграфу пропонуються по десять варіантів завдань для можливості індивідуальної роботи студентів.

Тема 1. Комплексні числа. Координатна та алгебраїчна форма комплексного числа

ВАРІАНТ 1.
1) Обчислити значення виразу $(5-2i)(1+3i)$.

2) Обчислити значення виразу $\frac{-1+3i}{2-i}$.

3) Розв'язати рівняння $(3+i)x^2-(11-3i)x+6-8i=0$.

ВАРІАНТ 2.
1) Обчислити значення виразу $(1-3i)(2+i)$.

2) Обчислити значення виразу $\frac{-3+i}{1-2i}$.

3) Розв'язати рівняння $(3-i)x^2-(11+3i)x+6+8i=0$.

ВАРІАНТ 3.
1) Обчислити значення виразу $(3-i)(1-5i)$.

2) Обчислити значення виразу $\frac{1-5i}{3-2i}$.

3) Розв'язати рівняння $(3+i)x^2-(9-7i)x-10i=0$.

ВАРІАНТ 4.
1) Обчислити значення виразу $(5+2i)(1-3i)$.

2) Обчислити значення виразу $\frac{5+i}{3-2i}$.

3) Розв'язати рівняння $(3-i)x^2-(9+7i)x+10i=0$.

ВАРІАНТ 5.
1) Обчислити значення виразу $(2-2i)(1-2i)$.

2) Обчислити значення виразу $\frac{-1+i}{-1-i\sqrt{3}}$.

3) Розв'язати рівняння $(1+3i)x^2-(-3+11i)x-8+6i=0$.

ВАРІАНТ 6.
1) Обчислити значення виразу $(2-5i)(1+i)$.

2) Обчислити значення виразу $\frac{1-3i}{2-i}$.

3) Розв'язати рівняння $(3+i)x^2+(11-3i)x+6-8i=0$.

ВАРІАНТ 7.
1) Обчислити значення виразу $(1-2i)(3+i)$.

2) Обчислити значення виразу $\frac{3-i}{1-2i}$.

3) Розв'язати рівняння $(3-i)x^2+(11+3i)x+6+8i=0$.

ВАРІАНТ 8.
1) Обчислити значення виразу $(1-3i)(2+2i)$.

2) Обчислити значення виразу $\frac{-1+5i}{3-2i}$.

3) Розв'язати рівняння $(3+i)x^2+(9-7i)x-10i=0$.

ВАРІАНТ 9.
1) Обчислити значення виразу $(3-2i)(1-i)$.

2) Обчислити значення виразу $\frac{5-i}{3-2i}$.

3) Розв'язати рівняння $(3-i)x^2+(9+11i)x+10i=0$.

ВАРІАНТ 10.
1) Обчислити значення виразу $(1+3i)(2-3i)$.

2) Обчислити значення виразу $\frac{1-i}{-1-i\sqrt{3}}$.

3) Розв'язати рівняння $(1+3i)x^2+(-3+11i)x-8+6i=0$.

Тема 2. Тригонометрична форма комплексного числа

ВАРІАНТ 1.
1) Знайти тригонометричну форму комплексних чисел:
а) $-\sqrt{3}\,i$, б) $\frac{3\sqrt{6}}{4}+\frac{9\sqrt{2}}{4}i$, в) $1-i$.

2) Описати множину точок, що зображують числа z, які задовольняють
нерівність $|z-1-3i|<3$.

3) Подати у вигляді многочленів від $\sin x$ та $\cos x$ функцію $\operatorname{ctg} 5x$.

4) Обчислити вираз $\left(\frac{-2-2i}{\sqrt{3}+i}\right)^{18}$.

5) Виписати в алгебраїчній формі всі корені: $\sqrt[4]{-8+8\sqrt{3}\,i}$.

ВАРІАНТ 2.
1) Знайти тригонометричну форму комплексних чисел:
а) $-3\sqrt{6}\,i$, б) $\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i$, в) $3-3i$.

2) Описати множину точок, що зображують числа z, які задовольняють
нерівність $|z+3-i|<2$.

3) Подати у вигляді многочленів від $\sin x$ та $\cos x$ функцію $\operatorname{ctg} 6x$.

4) Обчислити вираз $\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i}\right)^{18}$.

5) Виписати в алгебраїчній формі всі корені: $\sqrt[4]{-8-8\sqrt{3}\,i}$.

ВАРІАНТ 3.
1) Знайти тригонометричну форму комплексних чисел:
а) $-3\sqrt{6}$, б) $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$, в) $-\frac{\sqrt{6}}{4}+\frac{\sqrt{2}}{4}i$.

2) Описати множину точок, що зображують числа z, які задовольняють
нерівність $|z+1-3i|\geq 1$.

3) Подати у вигляді многочленів від $\sin x$ та $\cos x$ функцію $\cos 5x$.

4) Обчислити вираз $\left(\frac{-3-3i}{-1+\sqrt{3}\,i}\right)^{18}$.

5) Виписати в алгебраїчній формі всі корені: $\sqrt[4]{-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i}$.

ВАРІАНТ 4.
1) Знайти тригонометричну форму комплексних чисел:
а) $\frac{2\sqrt{6}}{3}i$, б) $-\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, в) $2-2\sqrt{3}\,i$.

2) Описати множину точок, що зображують числа z, які задовольняють
нерівність $|z-1-i|\geq 1$.

3) Подати у вигляді многочленів від $\sin x$ та $\cos x$ функцію $\sin 6x$.

4) Обчислити вираз $\left(\frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i}{1-i}\right)^{18}$.

5) Виписати в алгебраїчній формі всі корені: $\sqrt[4]{-\sqrt{2}+\sqrt{6}\,i}$.

ВАРІАНТ 5.
1) Знайти тригонометричну форму комплексних чисел:
а) $-2\sqrt{6}\,i$, б) $\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$, в) $\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$.

2) Описати множину точок, що зображують числа z, які задовольняють
нерівність $|z-1+2i|<1$.

3) Подати у вигляді многочленів від $\sin x$ та $\cos x$ функцію $\cos 5x$.

4) Обчислити вираз $\left(\frac{1+i}{-1-\sqrt{3}\,i}\right)^{18}$.

5) Виписати в алгебраїчній формі всі корені: $\sqrt[4]{8-8\sqrt{3}\,i}$.

ВАРІАНТ 6.
1) Знайти тригонометричну форму комплексних чисел:
а) $\sqrt{6}\,i$, б) $-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$, в) $-\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{3\sqrt{6}}{2}i$.

2) Описати множину точок, що зображують числа z, які задовольняють
нерівність $|z+3|>1$.

3) Подати у вигляді многочленів від $\sin x$ та $\cos x$ функцію $\sin 5x$.

4) Обчислити вираз $\left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{-1-i}\right)^{18}$.

5) Виписати в алгебраїчній формі всі корені: $\sqrt[4]{8+8\sqrt{3}\,i}$.

ВАРІАНТ 7.
1) Знайти тригонометричну форму комплексних чисел:
а) $3\sqrt{2}$, б) $-\sqrt{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}i$, в) $\frac{\sqrt{6}}{3}-\sqrt{2}\,i$.

2) Описати множину точок, що зображують числа z, які задовольняють
нерівність $|z+3-i| \geq 2$.

3) Подати у вигляді многочленів від $\sin x$ та $\cos x$ функцію $\sin 7x$.

4) Обчислити вираз $\left(\frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}\,i}{1-i}\right)^{18}$.

5) Виписати в алгебраїчній формі всі корені: $\sqrt[4]{-8\sqrt{3}+8i}$.

ВАРІАНТ 8.
1) Знайти тригонометричну форму комплексних чисел:
а) $\sqrt{2}\,i$, б) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}i$, в) $-2-2\sqrt{3}\,i$.

2) Описати множину точок, що зображують числа z, які задовольняють
нерівність $|z+3-i| > 3$.

3) Подати у вигляді многочленів від $\sin x$ та $\cos x$ функцію $\sin 5x$.

4) Обчислити вираз $\left(\frac{-1-i}{-\sqrt{3}-i}\right)^{18}$.

5) Виписати в алгебраїчній формі всі корені: $\sqrt[4]{8\sqrt{3}+8\,i}$.

ВАРІАНТ 9.
1) Знайти тригонометричну форму комплексних чисел:
а) $-3\sqrt{2}\,i$, б) $\frac{3\sqrt{6}}{2}+\frac{9\sqrt{2}}{2}i$, в) $1+i$.

2) Описати множину точок, що зображують числа z, які задовольняють
нерівність $|z+3+i| < 3$.

3) Подати у вигляді многочленів від $\sin x$ та $\cos x$ функцію $\cos 6x$.

4) Обчислити вираз $\left(\frac{1-\sqrt{3}\,i}{1+i}\right)^{18}$.

5) Виписати в алгебраїчній формі всі корені: $\sqrt[4]{-8\sqrt{3}-8\,i}$.

ВАРІАНТ 10.

1) Знайти тригонометричну форму комплексних чисел:
а) $-\sqrt{3}$, б) $\frac{\sqrt{6}}{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, в) $-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

2) Описати множину точок, що зображують числа z, які задовольняють
нерівність $|z+2|>2$.

3) Подати у вигляді многочленів від $\sin x$ та $\cos x$ функцію $\sin 6x$.

4) Обчислити вираз $\left(\frac{1+\sqrt{3}\,i}{-1+i}\right)^{18}$.

5) Виписати в алгебраїчній формі всі корені: $\sqrt[4]{8\sqrt{3}-8\,i}$.

Тема 3. Метод Гаусса розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь

ВАРІАНТ 1.
Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\begin{cases} -3x_1-2x_2-2x_3-2x_4-3x_5 &= -5,\\ -x_1-x_2-x_3-x_4-x_5 &= -2,\\ -x_1-x_2-2x_3-3x_4-x_5 &= -3,\\ -2x_1-2x_2-3x_3-3x_4-x_5 &= -7,\\ 2x_1+x_2+2x_3+2x_4+2x_5 &= 5. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x_1-2x_2-4x_3+x_4-2x_5 &= 6,\\ 3x_1-3_2-9x_3+x_4+x_5 &= 9,\\ x_1+x_2-x_3-2x_4+7x_5 &= -6,\\ -x_1+2x_2+4x_3-2x_4+4x_5 &= -9,\\ 4x_1-x_2-9x_3-x_4+9x_5 &= 2. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} x_1+3x_2-x_3+8x_4-5x_5 &= 16,\\ 2x_1+2x_2+3x_3+8x_4-4x_5 &= 15,\\ x_1-x_2+3x_3+2x_5 &= -2,\\ x_1-x_2+3x_3+3x_5 &= -4,\\ -3x_1-2x_2-4x_3-10x_4+2x_5 &= -15. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 2.
Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\begin{cases} 5x_1+2x_2-4x_3+3x_4+3x_5 &= -3,\\ 4x_1+4x_2-4x_3+5x_4+4x_5 &= -2,\\ 3x_1+x_2-3x_3+2x_4+4x_5 &= -5,\\ 3x_1+2x_2-3x_3+3x_4+3x_5 &= -2,\\ -3x_1-3x_2+3x_3-4x_4-3x_5 &= 1. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} -4x_1+2x_2-4x_3+x_4+x_5 &= -13\\ 3x_1-22+2x_3+2x_4+x_5 &= 11,\\ -x_1+x_2+x_4+x_5 &= -7,\\ 2x_1-2x_2-x_4-x_5 &= 13,\\ -2x_1+x_2-2x_3-x_4 &= -6. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 3x_1-2x_2+8x_3+x_4-x_5 &= 3,\\ 4x_1-4x_2+12x_3+4x_4-4x_5 &= 3,\\ -3x_1-x_2-5x_3+5x_4-4x_5 &= -5,\\ 2x_1-3x_2+7x_3+4x_4-4x_5 &= 0,\\ -3x_1+4x_2-10x_3-5x_4+5x_5 &= -1. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 3.
Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1+2x_2-2x_3-3x_4-3x_5 &=& -5,\\ 3x_1+2x_2-x_3-4x_4-2x_5 &=& -5,\\ -2x_1-3x_2+4x_3+2x_4+5x_5 &=& 6,\\ -4x_1-4x_2+4x_3+6x_4+6x_5 &=& 10,\\ x_1+x_2-x_3-x_4-x_5 &=& -1. \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} 3x_1+5x_2+3x_3-x_4-3x_5 &=& 5,\\ x_1+x_2-3x_3-x_4+2x_5 &=& -4,\\ 3x_1+5x_2+x_3-2x_4-2x_5 &=& 2,\\ -5x_1-8x_2-2x_3+3x_4+3x_5 &=& -3,\\ 2x_1+3x_2+2x_3-x_4-2x_5 &=& 3. \end{array}\right.$$

$$3)\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1+x_2-2x_3+4x_4-2x_5 &=& 7,\\ x_1+x_2+3x_4-x_5 &=& 3,\\ -x_1-2x_2-3x_3-5x_4+4x_5 &=& -7,\\ x_1+3x_2+4x_3+7x_4+x_5 &=& 0,\\ x_1+x_2+3x_4-3x_5 &=& 6. \end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 4.
Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} -5x_1-5x_2+4x_3+2x_4+2x_5 &=& -2,\\ 2x_1+2x_2-2x_3-x_4-x_5 &=& 1,\\ -5x_1-4x_2+8x_3+7x_4+2x_5 &=& 1,\\ -4x_1-4x_2+3x_3+x_4+2x_5 &=& -3,\\ 3x_1+2x_2-4x_3-3x_4-x_5 &=& 2. \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} -3x_1+2x_2-7x_3-10x_4+4x_5 &=& -4,\\ -3x_1+4x_2-11x_3-14x_4+3x_5 &=& -12,\\ -4x_1+4x_2-12x_3-16x_4+3x_5 &=& -15,\\ 5x_1-7x_2+19x_3+24x_4-6x_5 &=& 18,\\ 2x_1-3x_2+8x_3+10x_4-2x_5 &=& 9. \end{array}\right.$$

$$3)\left\{\begin{array}{rcl} -x_1+5x_2-6x_3+4x_4+2x_5 &=& -30,\\ -x_1+7x_2-8x_3+6x_4+4x_5 &=& -42,\\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4+7x_5 &=& 5,\\ x_1+2x_2-x_3+3x_4+5x_5 &=& -12,\\ 4x_1+x_2+3x_3+3x_4+9x_5 &=& -4. \end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 5.
Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\begin{cases} -4_1-5x_2+18x_3+6x_4+4x_5 &= 17,\\ -x_1-3x_2+8x_3+5x_4+2x_5 &= 7,\\ 2x_1+4x_2-12x_3-6x_4-3x_5 &= -11,\\ -2x_1-3x_2+10x_3+4_4+3x_5 &= 11,\\ -3x_1-4x_2+14x_3+5x_4+3x_5 &= 13.\end{cases}$$

$$2)\begin{cases} 4x_1+4x_2-4x_3+4x_4+3x_5 &= -7,\\ -4x_1-2x_2+3x_3-2x_4-3x_5 &= 2,\\ 4x_1+x_2-3x_3+2x_4+3x_5 &= 0,\\ -3x_1-3x_2+2x_3-2x_4-2x_5 &= 5,\\ x_1-x_2-x_3+x_4+x_5 &= 2.\end{cases}$$

$$3)\begin{cases} -3x_1-2x_2+5x_3+4x_4-x_5 &= 16,\\ 2x_1+x_2-3x_3-2x_4+x_5 &= -9,\\ -2x_1-2x_2+4x_3+4x_4 &= 14,\\ 2x_1+x_2-3x_3-2x_4+x_5 &= -9,\\ -3x_1-2x_2+5x_3+5x_4 &= 18.\end{cases}$$

ВАРІАНТ 6.
Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\begin{cases} 7x_1-8x_2-6x_3+8x_4-7x_5 &= 4,\\ 4x_1-5x_2-3x_3+3x_4-2x_5 &= 0,\\ -6x_1+7x_2+5x_3-5x_4+5x_5 &= -2,\\ -7x_1+8x_2+5x_3-7x_4+6x_5 &= -4,\\ -2x_1+2x_2+2x_3-3x_4+4x_5 &= -3.\end{cases}$$

$$2)\begin{cases} 2x_1-4x_2-6x_3-3x_5 &= -3,\\ -x_1-4x_2-7x_3+2x_4-x_5 &= -1,\\ -x_1+2x_2+3x_3+2x_5 &= 3,\\ -2x_1+3x_2+4x_3+x_4+3x_5 &= 3,\\ x_1-x_2-x_3-x_4-2x_5 &= -2.\end{cases}$$

$$3)\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3-2x_4+2x_5 &= 6,\\ -x_1-x_2+x_3+3x_4+4x_5 &= -2,\\ -2x_1-x_2+2x_4+2x_5 &= -2,\\ 3x_1+x_2+x_3-3x_4-2x_5 &= 4,\\ -3x_1-2x_2+x_3+4x_4+5x_5 &= -3.\end{cases}$$

ВАРІАНТ 7.
Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} 5x_1+2x_2-9x_3+2x_4-7x_5 &=& 5,\\ 4x_1+2x_2-8x_3+2x_4-6x_5 &=& 4,\\ -3x_1+x_2+x_3-x_4 &=& -5,\\ 2x_1+x_2-4x_3+x_4-3x_5 &=& 2,\\ -5x_1-x_2+7x_3-2x_4+5x_5 &=& -6. \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} -3x_1+x_2+5x_3-6x_4-6x_5 &=& -9,\\ 2x_1-2x_2-3x_3+x_4+x_5 &=& 7,\\ -2x_1+x_2+3x_3-3x_4-3x_5 &=& -6,\\ -2x_1+2x_2+3x_3-2x_4-3x_5 &=& -6,\\ -2x_1+2x_2+3x_3-2x_4-2x_5 &=& -7. \end{array}\right.$$

$$3)\left\{\begin{array}{rcl} -6x_1-7x_2-x_3+26x_4+3x_5 &=& 12,\\ 8x_1+2x_2-6x_3-20x_4-3x_5 &=& -8,\\ 7x_1+5x_2-2x_3-24x_4-3x_5 &=& -11,\\ -8x_1-4x_2+4x_3+24x_4+3x_5 &=& 11,\\ -4x_1-4x_2+16x_4+2x_5 &=& 7. \end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 8.
Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1+3x_2+x_3-2x_4+5x_5 &=& 5,\\ 3x_1+2x_2+4x_3-6x_4+11x_5 &=& 13,\\ -4x_1-5x_2-3x_3+4x_4-9x_5 &=& -11,\\ 2x_1+2x_2+2x_3-3_4+6x_5 &=& 7,\\ -5x_1-5x_2-5x_3+8x_4-16x_5 &=& -18. \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} -4x_1-2x_2+4x_3-3x_4-3x_5 &=& 4,\\ x_1+2x_2+2x_3-x_4+x_5 &=& -3,\\ -3x_1-x_2+4x_3-3x_4-2x_5 &=& 2,\\ 3x_1-2x_2-7x_3+5x_4+2x_5 &=& 3,\\ 2x_1+4x_2+2x_3-x_4+2x_5 &=& -7. \end{array}\right.$$

$$3)\left\{\begin{array}{rcl} -3x_1-2x_2+5x_3-4x_4-2x_5 &=& 13,\\ -2x_1-x_2+3x_3-3x_4-x_5 &=& 8,\\ -7x_1-4x_2+11x_3-10x_4-5x_5 &=& 31,\\ 2x_1-x_2-3x_3+3x_4+2x_5 &=& -9,\\ -5x_1-3x_2+8x_3-7x_4-2x_5 &=& 21. \end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 9.
Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 & = & 2, \\ -4x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 & = & 6, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 & = & -5, \\ -7x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 3x_5 & = & 4, \\ 7x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = & -6. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} -7x_1 + 4x_2 - 22x_3 + 4x_4 - 14x_5 & = & -3, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 5x_5 & = & -2, \\ 6x_1 - 3x_2 + 18x_3 + x_4 + 8x_5 & = & 15, \\ -7x_1 + 3x_2 - 20x_3 + 4x_4 - 15x_5 & = & -1, \\ 4x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 3x_4 + 9x_5 & = & -1. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 46x_4 + 2x_5 & = & -3 \\ 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 8x_4 - 4x_5 & = & 8, \\ 3x_1 + 5x_2 - 13x_3 - 11x_4 - 4x_5 & = & 9, \\ -3x_1 - 6x_2 + 15x_3 + 12x_4 + 6x_5 & = & -12, \\ -2x_1 - 3x_2 + 8x_3 + 7x_4 + 3x_5 & = & -6. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 10.
Розв'язати системи рівнянь методом Гаусса:

$$1)\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 - 3x_5 & = & 5, \\ -4x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 3x_4 + 6x_5 & = & -11, \\ 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 5x_4 - 6x_5 & = & 8, \\ -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 4x_5 & = & -6, \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 & = & -1. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} 5x_1 - 8x_2 - 21x_3 + 13x_4 - 7x_5 & = & -13, \\ -3x_1 + 6x_2 + 15x_3 - 9_4 + 4x_5 & = & 9, \\ -4x_1 + 6x_2 + 16x_3 - 10x_4 + 4x_5 & = & 11, \\ 3x_1 - 6x_2 - 15x_3 + 9x_4 - 2x_5 & = & -10, \\ -4x_1 + 7x_2 + 18x_3 - 11x_4 + 2x_5 & = & 13. \end{cases}$$

$$3)\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 + 11x_5 & = & -13, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - 9x_5 & = & 9, \\ -x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 11x_5 & = & -10, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 6x_5 & = & 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + 6x_3 - 8x_4 - 17x_5 & = & 20. \end{cases}$$

Тема 4. Детермінанти n-го порядку. Теорема Лапласа. Теорема Крамера

ВАРІАНТ 1.
1. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & x \\ 5 & 9 & 8 & y \\ 1 & -3 & 3 & z \\ 4 & 9 & 6 & t \end{vmatrix}$$

розкриваючи його за елементами 4-го стовпця.

2. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

$$1)\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 &= 5, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 &= 8, \\ 4x_1 - 7x_2 - 11x_3 + 5x_4 &= 24, \\ -3x_1 + 6x_2 + 9x_3 - 5x_4 &= -22. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1, \\ -3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 5x_4 &= -5, \\ -6x_1 - 4x_2 + x_3 - 3x_4 &= 0, \\ -9x_1 - 7x_2 - 6x_3 - 8x_4 &= -6. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 2.
1. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} -1 & -3 & k & -3 \\ -3 & -8 & l & -9 \\ -2 & -5 & m & -5 \\ 3 & 9 & n & 9 \end{vmatrix}$$

розкриваючи його за елементами 3-го стовпця.

2. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

$$1)\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 7x_3 + 4x_4 &= 7, \\ -2x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 &= -5, \\ -5x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 4x_4 &= -6, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 &= 7. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 4_3 + 3x_4 &= 0, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= 1, \\ -5x_1 + 5x_2 - 6x_3 + 4x_4 &= -7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 3. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 3.

1. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} k & -2 & -5 & 4 \\ l & -2 & -4 & 1 \\ m & 3 & 7 & -3 \\ n & 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

розкриваючи його за елементами 1-го стовпця.

2. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 & = & 4, \\ -x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 4x_4 & = & -3, \\ x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 7x_4 & = & 2, \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 & = & -2. \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} -10x_1 - 10x_2 - 10_3 - 15x_4 & = & 43, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 5x_4 & = & -13, \\ -3x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 6x_4 & = & 16, \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 6x_4 & = & -17. \end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 4.

1. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} 5 & -9 & -7 & 6 \\ -4 & 9 & 5 & -4 \\ 5 & -8 & -7 & 6 \\ k & l & m & n \end{vmatrix}$$

розкриваючи його за елементами 4-го рядка.

2. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} -10x_1 - 10x_2 - 5x_3 - 7x_4 & = & -9, \\ -5x_1 - 5x_2 - 4x_3 - 5x_4 & = & -9, \\ -4x_1 - 3x_2 - x_3 - 2x_4 & = & 0, \\ 4x_1 + 4_2 + 3x_3 + 4x_4 & = & 7. \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} -2x_1 - x_2 + 3_3 + 10x_4 & = & -2, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 & = & -1, \\ -3x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 & = & -4, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - 2x_4 & = & 3. \end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 5.

1. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ 5 & 2 & 3 & 8 \\ -2 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$

розкриваючи його за елементами 1-го рядка.

2. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} -6x_1+7x_2+8x_3-10x_4 &=& 1, \\ -x_1+x_2-x_3+x_4 &=& 3, \\ -6x_1+8x_2+10x_3-9x_4 &=& 6, \\ -4x_1+6_2+9x_3-7x_4 &=& 5. \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} 4x_1-x_2+7x_3+2x_4 &=& 9, \\ 7x_1-3x_2+11x_3+4x_4 &=& 16, \\ 8x_1-3x_2+13x_3+4x_4 &=& 18, \\ 12x_1-5x_2+19x_3+7x_4 &=& 27. \end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 6.

1. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} -2 & a & -6 & 6 \\ -1 & b & -5 & 6 \\ -2 & c & -5 & 5 \\ -2 & d & -7 & 8 \end{vmatrix}$$

розкриваючи його за елементами 2-го стовпця.

2. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} -x_1+x_2+3x_3+x_4 &=& 2, \\ -6x_1-3x_2+6x_3 &=& -2, \\ x_1-2x_2-5x_3-2x_4 &=& -3, \\ 4x_1+4x_2+4x_3-3x_4 &=& 4. \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} -3x_1-2x_2-4x_3+4x_4 &=& -5, \\ -x_1+2x_2-2x_3+x_4 &=& -6, \\ 7x_1+4x_2+8x_3-9x_4 &=& -10, \\ -7x_1-6x_2-7x_3+9x_4 &=& -6. \end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 7.

1. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} 6 & 1 & -6 & x \\ 5 & 4 & -3 & y \\ 5 & 2 & -4 & z \\ 3 & 3 & -2 & t \end{vmatrix}$$

розкриваючи його за елементами 4-го стовпця.

2. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} -x_1+8x_2+2x_3-9x_4 & = & 1, \\ -4x_1+2x_2-5x_3-5x_4 & = & -6, \\ -5x_1-x_2-8x_3-3x_4 & = & -9, \\ -5x_1+7_2-4x_3-10x_4 & = & -6. \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} 8x_1-3x_2+22x_3-9x_4 & = & -42, \\ -2x_1+x_2-6x_3+x_4 & = & 7, \\ -7x_1+3x_2-20x_3+8x_4 & = & 32, \\ -7x_1+2x_2-18x_3+10x_4 & = & 42. \end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 8.

1. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 & 2 & x \\ -5 & -1 & 1 & y \\ 2 & -6 & -2 & z \\ -2 & 9 & 3 & t \end{vmatrix}$$

розкриваючи його за елементами 4-го стовпця.

2. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} 9x_1+3x_2-5x_3+6x_4 & = & 3, \\ 4x_1-5x_2-3x_3+6x_4 & = & -4, \\ 6x_1+x_2-3x_3+4x_4 & = & 3, \\ 5x_1+2x_2-2x_3+3x_4 & = & 4. \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} 5x_1-10x_2+5x_3-3x_4 & = & -6, \\ -5x_1+12x_2-7x_3+2x_4 & = & 3, \\ 3x_1-6x_2+3x_3-2x_4 & = & -4, \\ 5x_1-9x_2+4x_3-3x_4 & = & -7. \end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 9.
1. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} -2 & 4 & -6 & 3 \\ 3 & -5 & 8 & -4 \\ a & b & c & d \\ 2 & -3 & 6 & -3 \end{vmatrix}$$

розкриваючи його за елементами 3-го рядка.

2. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

$$1)\begin{cases} -6x_1 - x_2 + 9x_3 - 2x_4 & = & -2, \\ 3x_1 - x_2 - 8x_3 + 4x_4 & = & 2, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 & = & -1, \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 & = & 1. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - 7x_3 + x_4 & = & 14, \\ -2x_1 - 2x_2 - 6x_3 - x_4 & = & 11, \\ 5x_1 + 3x_2 + 11x_3 - 2x_4 & = & -22, \\ -7x_1 - 4x_2 - 15x_3 + 3x_4 & = & 29. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 10.
1. Обчислити детермінант

$$\begin{vmatrix} a & -6 & 6 & 3 \\ b & -1 & 1 & 1 \\ c & 2 & -1 & -2 \\ d & -10 & 8 & 6 \end{vmatrix}$$

розкриваючи його за елементами 1-го стовпця.

2. Розв'язати системи рівнянь за правилом Крамера:

$$1)\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 & = & -3, \\ 11x_1 - 6x_2 + 17x_3 - 2x_4 & = & 8, \\ -6x_1 + 5x_2 - 11x_3 + 2x_4 & = & 3, \\ 6x_1 - 3x_2 + 9x_3 - x_4 & = & 5. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} 3x_1 + 8x_2 - 11x_3 + 8x_4 & = & -14, \\ -x_1 - 5x_2 + 7x_3 - 5x_4 & = & 8, \\ -3x_1 - 7x_2 + 10x_3 - 7x_4 & = & 13, \\ -3x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 3x_4 & = & 11. \end{cases}$$

Тема 5. Матриці. Дії над матрицями

ВАРІАНТ 1.

1) Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 & -5 \\ 2 & -7 & -4 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -20 & 19 & 15 \\ 21 & -19 & -16 \\ -46 & 42 & 35 \end{pmatrix}.$$

2) Методом алгебраїчних доповнень знайти обернену матрицю до матриця

$$\begin{pmatrix} 8 & -6 & -5 \\ -12 & 8 & 7 \\ -7 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

3) Методом елементарних перетворень знайти обернену матрицю до матриці

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 & -2 \\ 7 & -4 & 3 & 4 \\ -9 & 6 & -4 & -4 \\ -6 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 2.

1) Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 5 \\ -2 & 1 & -2 \\ 10 & -4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -11 & -3 & 2 \\ -39 & -11 & 0 \\ -10 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) Методом алгебраїчних доповнень знайти обернену матрицю до матриця

$$\begin{pmatrix} -18 & 2 & -5 \\ -11 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Методом елементарних перетворень знайти обернену матрицю до матриці

$$\begin{pmatrix} -6 & -1 & -2 & 9 \\ -3 & -1 & -1 & 5 \\ -1 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 3.
1) Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} 3 & -8 & -5 \\ 2 & -7 & -4 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -20 & 19 & 15 \\ 21 & -19 & -16 \\ -46 & 42 & 35 \end{pmatrix}.$$

2) Методом алгебраїчних доповнень знайти обернену матрицю до матриця

$$\begin{pmatrix} -5 & -6 & -2 \\ -11 & -4 & -6 \\ -11 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

3) Методом елементарних перетворень знайти обернену матрицю до матриці

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ -3 & -6 & -8 & -3 \\ -1 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 4.
1) Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} 9 & 6 & -2 \\ -6 & -5 & 2 \\ -7 & -4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 & -7 & 14 \\ -32 & -19 & -35 \\ -43 & -26 & -44 \end{pmatrix}.$$

2) Методом алгебраїчних доповнень знайти обернену матрицю до матриця

$$\begin{pmatrix} -11 & 32 & -9 \\ 4 & -2 & 3 \\ -9 & 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

3) Методом елементарних перетворень знайти обернену матрицю до

матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -7 & 7 & -6 \\ -1 & -2 & 3 & -2 \\ -3 & 6 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 5.

1) Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -7 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 10 & 6 \end{pmatrix}.$$

2) Методом алгебраїчних доповнень знайти обернену матрицю до матриця

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

3) Методом елементарних перетворень знайти обернену матрицю до матриці

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 & -2 \\ 5 & -2 & 6 & 5 \\ -5 & 3 & -8 & -6 \\ 3 & -3 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 6.

1) Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 4 \\ -4 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 4 & -3 \\ -5 & -2 & 6 \\ -3 & -7 & 11 \end{pmatrix}.$$

2) Методом алгебраїчних доповнень знайти обернену матрицю до матриця

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 & -5 \\ 4 & 2 & -3 \\ 7 & 3 & -4 \end{pmatrix}.$$

3) Методом елементарних перетворень знайти обернену матрицю до матриці

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -6 & 1 \\ -3 & 2 & 8 & -4 \\ -2 & 2 & 9 & -4 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 7.

1) Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -7 & 3 \\ -12 & -16 & 5 \\ -6 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

2) Методом алгебраїчних доповнень знайти обернену матрицю до матриця

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & -13 & 4 \end{pmatrix}.$$

3) Методом елементарних перетворень знайти обернену матрицю до матриці

$$\begin{pmatrix} -6 & 4 & -7 & -2 \\ 7 & -4 & 9 & 2 \\ -5 & 3 & -6 & -2 \\ 4 & -2 & 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 8

1) Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 & -6 \\ -5 & 2 & -3 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 14 & 19 \\ 49 & 23 & 31 \\ -16 & -7 & -10 \end{pmatrix}.$$

2) Методом алгебраїчних доповнень знайти обернену матрицю до

матриця

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & -4 \\ -1 & -11 & -5 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) Методом елементарних перетворень знайти обернену матрицю до матриці

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 & -4 \\ -2 & -2 & 1 & -2 \\ -4 & 1 & 10 & -7 \\ 3 & 1 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 9.

1) Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} -8 & 3 & -6 \\ -5 & 2 & -3 \\ -6 & 2 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 & 14 & 19 \\ 49 & 23 & 31 \\ -16 & -7 & -10 \end{pmatrix}.$$

2) Методом алгебраїчних доповнень знайти обернену матрицю до матриця

$$\begin{pmatrix} 8 & 10 & -3 \\ -5 & -7 & 2 \\ -4 & -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Методом елементарних перетворень знайти обернену матрицю до матриці

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 & 4 \\ -6 & 7 & -8 & 6 \\ 9 & -10 & 10 & -7 \\ 3 & -4 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 10.

1) Знайти добуток матриць

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & -3 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -7 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 26 & 16 & -29 \\ 7 & 4 & -7 \\ -4 & -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

2) Методом алгебраїчних доповнень знайти обернену матрицю до матриця

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

3) Методом елементарних перетворень знайти обернену матрицю до матриці

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 6 & -3 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Тема 6. Дійсний n-вимірний векторний простір. Базис

ВАРІАНТ 1.
1) Знайти всі базиси системи векторів:
$a_1 = (1, -1)$, $a_2 = (1, 2)$, $a_3 = (2, 1)$, $a_4 = (-3, 3)$.
2) Перевірити, чи система векторів утворює базис простору $\mathbb{R}^3$:
$b_1 = (1, -1, 1)$, $b_2 = (2, 0, 1)$, $b_3 = (3, 1, 1)$.
3) Знайти значення α, при якому вектори $c_1 = (1, \alpha, 0)$, $c_2 = (2, -1, 1)$, $c_3 = (1, 1, -1)$ утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$.

ВАРІАНТ 2.
1) Знайти всі базиси системи векторів:
$a_1 = (1, -1)$, $a_2 = (1, 2)$, $a_3 = (2, 1)$, $a_4 = (-3, 3)$.
2) Перевірити, чи система векторів утворює базис простору $\mathbb{R}^3$:
$b_1 = (1, -1, 1)$, $b_2 = (2, 0, 1)$, $b_3 = (3, 1, 1)$.
3) Знайти значення α, при якому вектори $c_1 = (1, \alpha, 0)$, $c_2 = (2, -1, 1)$, $c_3 = (1, 1, -1)$ утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$.

ВАРІАНТ 3.
1) Знайти всі базиси системи векторів:
$a_1 = (1, -1)$, $a_2 = (2, 0)$, $a_3 = (2, 2)$, $a_4 = (1, 1)$.
2) Перевірити, чи система векторів утворює базис простору $\mathbb{R}^3$:
$b_1 = (1, 1, -1)$, $b_2 = (0, 1, 2)$, $b_3 = (1, 3, 1)$.
3) Знайти значення α, при якому вектори $c_1 = (1, 1, 1)$, $c_2 = (1, \alpha, -1)$, $c_3 = (1, 2, 1)$ утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$.

ВАРІАНТ 4.
1) Знайти всі базиси системи векторів:
$a_1 = (1, 0)$, $a_2 = (1, 1)$, $a_3 = 32, -1)$, $a_4 = (2, 2)$.
2) Перевірити, чи система векторів утворює базис простору $\mathbb{R}^3$:
$b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (0, 1, -2)$, $b_3 = (1, 3, 1)$.
3) Знайти значення α, при якому вектори $c_1 = (1, 1, -1)$, $c_2 = (1, \alpha, 2)$, $c_3 = (3, 1, 1)$ утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$.

ВАРІАНТ 5.
1) Знайти всі базиси системи векторів:

$a_1 = (0, 2)$, $a_2 = (1, -1)$, $a_3 = (3, 1)$, $a_4 = (3, 2)$.

2) Перевірити, чи система векторів утворює базис простору $\mathbb{R}^3$:
$b_1 = (1, -1, -1)$, $b_2 = (2, 1, -1)$, $b_3 = (3, 1, 1)$.

3) Знайти значення α, при якому вектори $c_1 = (-1, 1, 1)$, $c_2 = (0, \alpha, 1)$, $c_3 = (2, 2, -1)$ утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$.

ВАРІАНТ 6.

1) Знайти всі базиси системи векторів:
$a_1 = (2, 1)$, $a_2 = (30)$, $a_3 = (0, 1)$, $a_4 = (2, 2)$.

2) Перевірити, чи система векторів утворює базис простору $\mathbb{R}^3$:
$b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (3, -1, 1)$, $b_3 = (2, 0, 1)$.

3) Знайти значення α, при якому вектори $c_1 = (1, -1, 1)$, $c_2 = (1, 0, \alpha)$, $c_3 = (3, 1, -1)$ утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$.

ВАРІАНТ 7.

1) Знайти всі базиси системи векторів:
$a_1 = (-2, 1)$, $a_2 = (1, 2)$, $a_3 = (-1, 3)$, $a_4 = (0, 1)$.

2) Перевірити, чи система векторів утворює базис простору $\mathbb{R}^3$:
$b_1 = (-1, -1, 1)$, $b_2 = (1, 3, -1)$, $b_3 = (0, 1, 1)$.

3) Знайти значення α, при якому вектори $c_1 = (1, 0, -1)$, $c_2 = (1, -1, 0)$, $c_3 = (\alpha, 2, 1)$ утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$.

ВАРІАНТ 8.

1) Знайти всі базиси системи векторів:
$a_1 = (1, -2)$, $a_2 = (1, 0)$, $a_3 = (1, 1)$, $a_4 = (2, -1)$.

2) Перевірити, чи система векторів утворює базис простору $\mathbb{R}^3$:
$b_1 = (-1, -1, -1)$, $b_2 = (1, 0, 1)$, $b_3 = (1, 2, 3)$.

3) Знайти значення α, при якому вектори $c_1 = (1, 0, 1)$, $c_2 = (3, 2, 1)$, $c_3 = (1, \alpha, 0)$ утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$.

ВАРІАНТ 9.

1) Знайти всі базиси системи векторів:
$a_1 = (2, 1)$, $a_2 = (1, -1)$, $a_3 = (-3, 1)$, $a_4 = (-1, 2)$.

2) Перевірити, чи система векторів утворює базис простору $\mathbb{R}^3$:
$b_1 = (-1, -1, -1)$, $b_2 = (1, 2, 1)$, $b_3 = (3, 1, 1)$.

3) Знайти значення α, при якому вектори $c_1 = (-1, 0, 1)$, $c_2 = (1, 3, 2)$,

$c_3 = (1, 0, \alpha)$ утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$.

ВАРІАНТ 10.

1) Знайти всі базиси системи векторів:
$a_1 = (1, 1)$, $a_2 = (-3, 1)$, $a_3 = (0, 2)$, $a_4 = (-2, 2)$.

2) Перевірити, чи система векторів утворює базис простору $\mathbb{R}^3$:
$b_1 = (-1, -1, 1)$, $b_2 = (-1, 0, 2)$, $b_3 = (1, 3, -1)$.

3) Знайти значення α, при якому вектори $c_1 = (1, \alpha, -1)$, $c_2 = (3, 2, 1)$, $c_3 = (0, 1, 2)$ утворюють базис простору $\mathbb{R}^3$.

Тема 7. Ранг матриці. Теорема Кронекера–Капеллі

ВАРІАНТ 1.
Дослідити на сумісність. Знайти загальний розв'язок і один частинний розв'язок.

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} -2x_1+x_2+2x_3+2x_4-3x_5 &=& 3,\\ -3x_1+2x_2+3x_3+2x_4-3x_5 &=& -1,\\ -3x_1-2x_2-2x_3+3x_4-4x_5 &=& 12,\\ -3x_1+x_2+x_3+x_4-3x_5 &=& 0,\\ -8x_1+2x_2+3x_3+5x_4-10x_5 &=& 9. \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} 4x_1-3x_2-14x_3-2x_4-3x_5 &=& 20,\\ -2x_1+x_2+6x_3+2x_4+x_5 &=& -8\\ -3x_1+x_2+8x_3+4x_4+x_5 &=& -10,\\ 5x_1-3x_2-16x_3-4x_4-4x_5 &=& 21,\\ 7x_1-5x_2-24x_3-4x_4-6x_5 &=& 34. \end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 2.
Дослідити на сумісність. Знайти загальний розв'язок і один частинний розв'язок.

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} 6x_1+6x_2+4x_3+3x_4+12x_5 &=& -7,\\ 5x_1+9x_2+5x_3+2x_4+7x_5 &=& 0,\\ -5x_1-8x_2-5x_3-2x_4-10x_5 &=& 5,\\ 2x_1+2x_2+x_3+x_4+3x_5 &=& -1,\\ -5x_1-4x_2-3x_3-3x_4-10x_5 &=& 6. \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl} -2x_1-5x_2+14x_3-5x_4+16x_5 &=& 1,\\ 3x_1+7x_2-20x_3+8x_4-24x_5 &=& -1\\ -2x_1-3x_2+10x_3-5x_4+12x_5 &=& -2,\\ -4x_1-8x_2+24x_3-9x_4+26x_5 &=& -1,\\ 2x_1+3x_2-10x_3+6x_4-14x_5 &=& 2. \end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 3.
Дослідити на сумісність. Знайти загальний розв'язок і один частинний розв'язок.

$$1)\left\{\begin{array}{rcl} -6x_1-2x_2-10x_3-10x_4-3x_5 &=& 4,\\ 8x_1+2x_2+14x_3+12x_4+4x_5 &=& -5,\\ -15x_1-5x_2-25x_3-25x_4-7x_5 &=& 8,\\ -11x_1-4x_2-18x_3-19x_4-5x_5 &=& 7,\\ 15x_1+5x_2+25x_3+25x_4+7x_5 &=& -10. \end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl}
-3x_1-3x_2+x_3-x_4-3x_5 & = & -3,\\
6x_1-x_2+4x_3+2x_4+5x_5 & = & 8\\
2x_1-6x_2+7x_3+x_4+x_5 & = & 4,\\
-6x_1-3x_2-x_3-2x_4-5x_5 & = & -7,\\
7x_1-5x_2+8x_3+2x_4+5x_5 & = & 10.
\end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 4.

Дослідити на сумісність. Знайти загальний розв'язок і один частинний розв'язок.

$$1)\left\{\begin{array}{rcl}
-4x_1-x_2-3x_3-3x_4+5x_5 & = & -14,\\
3x_1+2x_2+3x_3+3x_4-4x_5 & = & 7,\\
-x_1+x_2+4x_3-2x_4-6x_5 & = & 6,\\
-x_1-3x_2-4x_3-2x_4+5x_5 & = & -1,\\
-x_1-4x_2-6x_3-2x_4+8x_5 & = & -3.
\end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl}
-2x_1+4x_2+2x_3+2x_4-8x_5 & = & -8,\\
-5x_1+8x_2-2x_3+4x_4-17x_5 & = & -19\\
5x_1-7x_2+3x_3-3x_4+15x_5 & = & 21,\\
-6x_1=7x_2-5x_3+3x_4-16x_5 & = & -23,\\
-6x_1+4x_2-8x_3+x_4-11x_5 & = & -24.
\end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 5.

Дослідити на сумісність. Знайти загальний розв'язок і один частинний розв'язок.

$$1)\left\{\begin{array}{rcl}
-2x_1+6x_2+4x_3+4x_4-7x_5 & = & 1,\\
-6x_1+9x_2+8x_3+6x_4-8x_5 & = & 3,\\
-4x_1+4x_2+4x_3+3x_4-2x_5 & = & 3,\\
5x_1-6x_2-6x_3-4x_4+4x_5 & = & -2,\\
-9x_1+9x_2+9x_3+6x_4-7x_5 & = & 7.
\end{array}\right.$$

$$2)\left\{\begin{array}{rcl}
-5x_1-12x_2-22x_3-19x_4+5x_5 & = & 16,\\
4x_1+11x_2+19x_3+18x_4-4x_5 & = & -16\\
3x_1+7x_2+13x_3+11x_4-3x_5 & = & -9,\\
5x_1+6x_2+16x_3+7x_4-2x_5 & = & -4,\\
-5x_1-10x_2-20x_3-15x_4+4x_5 & = & 12.
\end{array}\right.$$

ВАРІАНТ 6.

Дослідити на сумісність. Знайти загальний розв'язок і один частинний розв'язок.

$$1)\begin{cases} 5x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 &= 4,\\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 &= 0,\\ 9x_1 - 2x_2 - 6x_3 + x_4 - 3x_5 &= 3,\\ -10x_1 - 2_2 + 6x_3 - x_4 - 3x_5 &= -2,\\ -3x_1 - x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 &= -1. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 + x_5 &= 0,\\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 - 16x_4 - 3x_5 &= -11\\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 + 2x_5 &= 4,\\ x_1 + 5x_2 - 8x_3 - 11x_4 - 3x_5 &= -6,\\ 2x_1 - 7x_2 - 10x_3 - 16x_4 - 3x_5 &= -11. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 7.

Дослідити на сумісність. Знайти загальний розв'язок і один частинний розв'язок.

$$1)\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= -4,\\ -3x_1 - 5x_2 + 4x_3 - 11x_4 - 10x_5 &= 11,\\ 6x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 8x_4 - x_5 &= -2,\\ x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 8x_4 + 9x_5 &= -8,\\ x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= -2. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= -5,\\ 3x_1 - 7x_2 - 11x_3 - 10x_4 + 3x_5 &= 21\\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 &= 1,\\ x_1 - 6x_2 - 11x_3 - 7x_4 + 3x_5 &= 15,\\ -x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 6x_4 - 2x_5 &= -13. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 8.

Дослідити на сумісність. Знайти загальний розв'язок і один частинний розв'язок.

$$1)\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 11x_5 &= -14,\\ -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 5x_4 - 15x_5 &= 23,\\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 14x_5 &= -17,\\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 13x_5 &= -18,\\ -2x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 6x_4 - 18x_5 &= 24. \end{cases}$$

$$2)\begin{cases} -2x_1 - 12x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 1,\\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &= -1\\ -x_1 - 7x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 &= 1,\\ 3x_1 + 11x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 &= -5,\\ 2x_1 - 11x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 2x_5 &= 0. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 9.

Дослідити на сумісність. Знайти загальний розв'язок і один частинний розв'язок.

$$1)\ \begin{cases} 6x_1+2x_2+2x_3-2x_4-2x_5 &= 14,\\ 6x_1+5x_2-2x_3-8x_4-3x_5 &= -12,\\ -4x_1-3x_2+x_3+5x_4+2x_5 &= 6,\\ -5x_1-5x_2+2x_3+7x_4+2x_5 &= 14,\\ -6x_1-5x_2+2x_3+7x_4+2x_5 &= 12. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} 3x_1+6x_2-9x_3-12x_4-3x_5 &= -20,\\ x_1+3x_2-5x_3-5x_4-2x_5 &= -10\\ 2x_1+5x_2-8x_3-9x_4-2x_5 &= -14,\\ -x_1-4x_2+7x_3+6x_4+3x_5 &= 15,\\ 2x_1-5x_2+8x_3+9x_4+4x_5 &= 20. \end{cases}$$

ВАРІАНТ 10.

Дослідити на сумісність. Знайти загальний розв'язок і один частинний розв'язок.

$$1)\ \begin{cases} -6x_1+x_2-2x_3-x_4+4x_5 &= -3,\\ 2x_1-x_2+x_3-x_4-x_5 &= -2,\\ 6x_1-x_2+2x_3+3x_4-4x_5 &= 5,\\ -11x_1+5x_2-6x_3+2x_4+6x_5 &= 2,\\ 3x_1-2x_2+x_3-x_4-2x_5 &= -3. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} -5x_1+3x_2+7x_3+16x_4-4x_5 &= -36,\\ 4x_1-x_2-7x_3-10x_4+3x_5 &= 21\\ 4x_1+x_2-9x_3-6x_4+3x_5 &= 10,\\ -7x_1+x_2+13x_3+16x_4-5x_5 &= -32,\\ 7x_1-x_2-13x_3-16x_4+6x_5 &= 33. \end{cases}$$

Тема 8. Системи лінійних однорідних рівнянь

ВАРІАНТ 1.
З'ясувати, які з рядків матриці A утворюють фундаментальну систему розв'язків або знайти фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1+3x_2+3x_3-2x_4-4x_5 & = & 0, \\ -x_1+3x_2+x_3-3x_4-x_5 & = & 0, \\ x_1+15x_2+9x_3-13x_4-11x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ -3 & -1 & -5 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ -2 & -2 & -4 & -1 & -5 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 2.
З'ясувати, які з рядків матриці A утворюють фундаментальну систему розв'язків або знайти фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1-4x_2-3x_3-5x_4+2x_5 & = & 0, \\ -2x_1+7x_2+4x_3+8x_4-2x_5 & = & 0, \\ -4x_1+13x_2+6x_3+14x_4-2x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & 4 & 4 \\ -1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 6 & 4 & -7 & 0 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 3.
З'ясувати, які з рядків матриці A утворюють фундаментальну систему розв'язків або знайти фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 8x_1-6x_2+3x_3+6x_4-5x_5 & = & 0, \\ -x_1+x_2-x_3-2x_4+x_5 & = & 0, \\ 13x_1-9x_2+3x_3+6x_4-7x_5 & = & 0. \end{array}\right.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 4.

З'ясувати, які з рядків матриці A утворюють фундаментальну систему розв'язків або знайти фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 0, \\ -5x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 &= 0, \\ -11x_1 - 5x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 &= 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 5.

З'ясувати, які з рядків матриці A утворюють фундаментальну систему розв'язків або знайти фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 4x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0, \\ -4x_1 - 5x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 5x_5 &= 0, \\ -6x_1 - 7x_2 + 10x_3 + 5x_4 - 9x_5 &= 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 13 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 9 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & -13 & -4 \\ 1 & -1 & 1 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 6.

З'ясувати, які з рядків матриці A утворюють фундаментальну систему розв'язків або знайти фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 + 3x_3 + 5x_4 - 6x_5 &= 0, \\ -8x_1 - 3x_2 - 5x_3 - 9x_4 + 10x_5 &= 0, \\ -14x_1 - 7x_2 - 9x_3 - 17x_4 + 18x_5 &= 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 2 & 1 \\ -4 & 1 & 9 & -4 & -2 \\ -2 & 2 & 5 & -5 & -3 \\ 4 & -1 & -9 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 10 & -6 & -3 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 7.

З'ясувати, які з рядків матриці A утворюють фундаментальну систему розв'язків або знайти фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 3x_5 &= 0, \\ -3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 &= 0, \\ 2x_2 + 2x_3 + x_4 - +3x_5 &= 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 3 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 8.

З'ясувати, які з рядків матриці A утворюють фундаментальну систему розв'язків або знайти фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 &= 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 &= 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 & 4 & -6 \\ -2 & -2 & 1 & -4 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 9.
З'ясувати, які з рядків матриці A утворюють фундаментальну систему розв'язків або знайти фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} 6x_1 - 5x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 &= 0, \\ 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 - 2x_4 + x_5 &= 0, \\ 8x_1 - 7x_2 + x_3 - 2x_4 + 4x_5 &= 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ВАРІАНТ 10.
З'ясувати, які з рядків матриці A утворюють фундаментальну систему розв'язків або знайти фундаментальну систему розв'язків системи рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 6x_3 - x_4 - x_5 &= 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 &= 0, \\ 13x_1 - 5x_2 - 12x_3 - 5x_4 - x_5 &= 0. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 2 & 6 & 1 \\ -3 & 0 & -2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тема 9. Многочлени. Схема Горнера

ВАРІАНТ 1.

1) Користуючись схемою Горнера, розкласти на простіші дроби дріб $\frac{x^3+5x^2+7x+3}{(x+2)^5}$.
2) Користуючись схемою Горнера, розкласти за степенями $x-2$ многочлен $x^4-9x^3+29x^2-38x+17$. Знайти значення $f(x)$ та його похідних при $x=2$.
3) Чому дорівнює показник кратності кореня -1 для многочлена $3x^4+14x^3+24x^2+18x+5$?

ВАРІАНТ 2.

1) Користуючись схемою Горнера, розкласти на простіші дроби дріб $\frac{x^3-7x^2+14x-7}{(x-3)^5}$.
2) Користуючись схемою Горнера, розкласти за степенями $x-2$ многочлен $x^4-9x^3+29x^2-38x+15$. Знайти значення $f(x)$ та його похідних при $x=2$.
3) Чому дорівнює показник кратності кореня -1 для многочлена $3x^4-10x^3+14x^2-10x+3$?

ВАРІАНТ 3.

1) Користуючись схемою Горнера, розкласти на простіші дроби дріб $\frac{x^3+5x^2+7x+3}{(x+2)^5}$.
2) Користуючись схемою Горнера, розкласти за степенями $x+2$ многочлен $x^4+7x^3+19x^2+23x+9$. Знайти значення $f(x)$ та його похідних при $x=-2$.
3) Чому дорівнює показник кратності кореня -1 для многочлена $2x^4-9x^3+15x^2-11x+3$?

ВАРІАНТ 4.

1) Користуючись схемою Горнера, розкласти на простіші дроби дріб $\frac{x^3-7x^2+15x-8}{(x-2)^5}$.
2) Користуючись схемою Горнера, розкласти за степенями $x+2$ многочлен $x^4+7x^3+17x^2+15x+1$. Знайти значення $f(x)$ та його похідних при $x=-2$.
3) Чому дорівнює показник кратності кореня -1 для многочлена $2x^4+10x^3+18x^2+14x+4$?

ВАРІАНТ 5.

1) Користуючись схемою Горнера, розкласти на простіші дроби дріб $\frac{x^3+7x^2+17x+15}{(x+2)^5}$.
2) Користуючись схемою Горнера, розкласти за степенями $x-3$ многочлен $x^4-10x^3+37x^2-58x+31$. Знайти значення $f(x)$ та його похідних при $x=3$.
3) Чому дорівнює показник кратності кореня -1 для многочлена $3x^4+11x^3+16x^2+11x+3$?

ВАРІАНТ 6.

1) Користуючись схемою Горнера, розкласти на простіші дроби дріб $\frac{x^3+5x^2+9x+7}{(x+2)^5}$.
2) Користуючись схемою Горнера, розкласти за степенями $x-2$ многочлен $x^4-7x^3+19x^2-25x+16$. Знайти значення $f(x)$ та його похідних при $x=2$.
3) Чому дорівнює показник кратності кореня -1 для многочлена $2x^4+6x^3+4x^2-2x-2$?

ВАРІАНТ 7.

1) Користуючись схемою Горнера, розкласти на простіші дроби дріб $\frac{x^3+5x^2+9x+7}{(x+2)^5}$.
2) Користуючись схемою Горнера, розкласти за степенями $x-2$ многочлен $x^4-6x^3+14x^2-17x+11$. Знайти значення $f(x)$ та його похідних при $x=2$.
3) Чому дорівнює показник кратності кореня -1 для многочлена $3x^4+14x^3+24x^2+18x+5$?

ВАРІАНТ 8.

1) Користуючись схемою Горнера, розкласти на простіші дроби дріб $\frac{x^3+5x^2+7x+1}{(x+2)^5}$.
2) Користуючись схемою Горнера, розкласти за степенями $x+2$ многочлен $x^4+7x^3+19x^2+26x+17$. Знайти значення $f(x)$ та його похідних при $x=-2$.
3) Чому дорівнює показник кратності кореня -1 для многочлена $3x^4-13x^3+22x^2-17x+5$?

ВАРІАНТ 9.

1) Користуючись схемою Горнера, розкласти на простіші дроби дріб $\frac{x^3-8x^2+20x-16}{(x-3)^5}$.

2) Користуючись схемою Горнера, розкласти за степенями $x-3$ многочлен $x^4-11x^3+46x^2-88x+68$. Знайти значення $f(x)$ та його похідних при $x=3$.
3) Чому дорівнює показник кратності кореня -1 для многочлена $2x^4-7x^3+9x^2-5x+1$?

ВАРІАНТ 10.
1) Користуючись схемою Горнера, розкласти на простіші дроби дріб $\frac{x^3-8x^2+22x-20}{(x-3)^5}$.
2) Користуючись схемою Горнера, розкласти за степенями $x+2$ многочлен $x^4+7x^3+19x^2+23x+9$. Знайти значення $f(x)$ та його похідних при $x=-2$.
3) Чому дорівнює показник кратності кореня -1 для многочлена $3x^4-10x^3+12x^2-6x+1$?

Тема 10. Вектори. Лінійні операції над векторами. Основні афінні формули

ВАРІАНТ 1.

1. Три вектори $\overline{JK} = \overline{j}$, $\overline{KL} = \overline{k}$ і $\overline{LJ} = \overline{l}$ є сторонами трикутника. З допомогою $\overline{j}$, $\overline{k}$ і $\overline{l}$ виразити вектори, що суміщаються з медіанами трикутника: $\overline{JM}$, $\overline{KN}$ і $\overline{LO}$.
2. В трикутнику попередньої задачі виразити всі медіани тільки через два вектори: $\overline{k}$ і $\overline{l}$.
3. Розкласти вектор $\overline{v} = 3\overline{c} - \overline{d} - 7\overline{e}$ за трьома некомпланарними векторами $\overline{w} = -3\overline{c} - \overline{d} + 7\overline{e}$, $\overline{x} = -5\overline{c} + 7\overline{d} + 3\overline{e}$ і $\overline{y} = -5\overline{c} + 6\overline{d} + 3\overline{e}$.
4. Дано три вершини паралелограма $G(-2, 3)$, $H(-2, 0)$ і $I(-3, 1)$. Знайти четверту вершину J протилежну до вершини H.
5. Відрізок між точками $G(3, 1)$ і $H(-1, -2)$ розділено на п'ять рівних частин точками P_1, P_2, P_3 і P_4 (позначеними у напрямку від G до H). Визначити координати точок поділу.

ВАРІАНТ 2.

1. Три вектори $\overline{DE} = \overline{d}$, $\overline{EF} = \overline{e}$ і $\overline{FD} = \overline{f}$ є сторонами трикутника. З допомогою $\overline{d}$, $\overline{e}$ і $\overline{f}$ виразити вектори, що суміщаються з медіанами трикутника: $\overline{DJ}$, $\overline{EK}$ і $\overline{FL}$.
2. В трикутнику попередньої задачі виразити всі медіани тільки через два вектори: $\overline{d}$ і $\overline{e}$.
3. Розкласти вектор $\overline{v} = 4\overline{d} - \overline{e} - 8\overline{f}$ за трьома некомпланарними векторами $\overline{u} = -\overline{d} - \overline{e} + 5\overline{f}$, $\overline{v} = -6\overline{d} + 3\overline{e} + 4\overline{f}$ і $\overline{w} = 7\overline{d} - 6\overline{e} + 5\overline{f}$.
4. Дано три вершини паралелограма $H(3, -1)$, $I(-3, -3)$ і $J(0, 0)$. Знайти четверту вершину K протилежну до вершини I.
5. Відрізок між точками $A(3, -1)$ і $B(2, 3)$ розділено на п'ять рівних частин точками K_1, K_2, K_3 і K_4 (позначеними у напрямку від A до B). Визначити координати точок поділу.

ВАРІАНТ 3.

1. Три вектори $\overline{PQ} = \overline{j}$, $\overline{QR} = \overline{k}$ і $\overline{RP} = \overline{l}$ є сторонами трикутника. З допомогою $\overline{j}$, $\overline{k}$ і $\overline{l}$ виразити вектори, що суміщаються з медіанами трикутника: $\overline{PM}$, $\overline{QN}$ і $\overline{RO}$.
2. В трикутнику попередньої задачі виразити всі медіани тільки через два вектори: $\overline{j}$ і $\overline{l}$.
3. Розкласти вектор $\overline{v} = 2\overline{e} - \overline{g}$ за трьома некомпланарними векторами $\overline{x} = 2\overline{e} + \overline{f} + 5\overline{g}$, $\overline{y} = 2\overline{e} + \overline{f}$ і $\overline{z} = -6\overline{e} - 2\overline{f} - 4\overline{g}$.
4. Дано три вершини паралелограма $L(3, -1)$, $M(-1, 2)$ і $N(2, -3)$. Знайти четверту вершину O протилежну до вершини M.

5. Відрізок між точками $F(0,-1)$ і $G(-3,-3)$ розділено на п'ять рівних частин точками O_1, O_2, O_3 і O_4 (позначеними у напрямку від F до G). Визначити координати точок поділу.

ВАРІАНТ 4.
1. Три вектори $\overline{DE}=\overline{j}$, $\overline{EF}=\overline{k}$ і $\overline{FD}=\overline{l}$ є сторонами трикутника. З допомогою $\overline{j}$, $\overline{k}$ і $\overline{l}$ виразити вектори, що суміщаються з медіанами трикутника: $\overline{DP}$, $\overline{EQ}$ і $\overline{FR}$.
2. В трикутнику попередньої задачі виразити всі медіани тільки через два вектори: $\overline{j}$ і $\overline{l}$.
3. Розкласти вектор $\overline{v}=-2\overline{g}-4\overline{h}-7\overline{i}$ за трьома некомпланарними векторами $\overline{x}=4\overline{g}-2\overline{h}+3\overline{i}$, $\overline{y}=-\overline{g}-\overline{i}$ і $\overline{z}=\overline{g}-6\overline{h}-5\overline{i}$.
4. Дано три вершини паралелограма $D(2,0)$, $E(-1,-1)$ і $F(3,-3)$. Знайти четверту вершину G протилежну до вершини E.
5. Відрізок між точками $A(-1,0)$ і $B(3,-1)$ розділено на п'ять рівних частин точками I_1, I_2, I_3 і I_4 (позначеними у напрямку від A до B). Визначити координати точок поділу.

ВАРІАНТ 5.
1. Три вектори $\overline{DE}=\overline{f}$, $\overline{EF}=\overline{g}$ і $\overline{FD}=\overline{h}$ є сторонами трикутника. З допомогою $\overline{f}$, $\overline{g}$ і $\overline{h}$ виразити вектори, що суміщаються з медіанами трикутника: $\overline{DM}$, $\overline{EN}$ і $\overline{FO}$.
2. В трикутнику попередньої задачі виразити всі медіани тільки через два вектори: $\overline{f}$ і $\overline{g}$.
3. Розкласти вектор $\overline{v}=-5\overline{a}+2\overline{b}+4\overline{c}$ за трьома некомпланарними векторами $\overline{o}=-6\overline{a}+\overline{b}+6\overline{c}$, $\overline{p}=-2\overline{a}+2\overline{b}+3\overline{c}$ і $\overline{q}=-3\overline{a}-4\overline{b}+2\overline{c}$.
4. Дано три вершини паралелограма $C(-3,-2)$, $D(3,2)$ і $E(-2,1)$. Знайти четверту вершину F протилежну до вершини D.
5. Відрізок між точками $E(-3,-3)$ і $F(2,-2)$ розділено на п'ять рівних частин точками K_1, K_2, K_3 і K_4 (позначеними у напрямку від E до F). Визначити координати точок поділу.

ВАРІАНТ 6.
1. Три вектори $\overline{DE}=\overline{e}$, $\overline{EF}=\overline{f}$ і $\overline{FD}=\overline{g}$ є сторонами трикутника. З допомогою $\overline{e}$, $\overline{f}$ і $\overline{g}$ виразити вектори, що суміщаються з медіанами трикутника: $\overline{DA}$, $\overline{EB}$ і $\overline{FC}$.
2. В трикутнику попередньої задачі виразити всі медіани тільки через два вектори: $\overline{f}$ і $\overline{g}$.
3. Розкласти вектор $\overline{v}=-2\overline{e}+6\overline{f}-2\overline{g}$ за трьома некомпланарними векторами $\overline{u}=5\overline{e}-6\overline{f}+4\overline{g}$, $\overline{v}=-2\overline{e}+6\overline{f}-\overline{g}$ і $\overline{w}=4\overline{e}-3\overline{f}+4\overline{g}$.
4. Дано три вершини паралелограма $A(-3,-2)$, $B(2,-2)$ і $C(-3,-1)$.

Знайти четверту вершину D протилежну до вершини B.
5. Відрізок між точками $I(-1,0)$ і $J(1,2)$ розділено на п'ять рівних частин точками P_1, P_2, P_3 і P_4 (позначеними у напрямку від I до J). Визначити координати точок поділу.

ВАРІАНТ 7.
1. Три вектори $\overline{AB}=\overline{g}$, $\overline{BC}=\overline{h}$ і $\overline{CA}=\overline{i}$ є сторонами трикутника. З допомогою $\overline{g}$, $\overline{h}$ і $\overline{i}$ виразити вектори, що суміщаються з медіанами трикутника: $\overline{AJ}$, $\overline{BK}$ і $\overline{CL}$.
2. В трикутнику попередньої задачі виразити всі медіани тільки через два вектори: $\overline{h}$ і $\overline{i}$.
3. Розкласти вектор $\overline{v}=2\overline{c}+7\overline{d}-3\overline{e}$ за трьома некомпланарними векторами $\overline{r}=-\overline{d}+4\overline{e}$, $\overline{s}=-\overline{c}-2\overline{d}+3\overline{e}$ і $\overline{t}=3\overline{c}+7\overline{d}+2\overline{e}$.
4. Дано три вершини паралелограма $K(-2,0)$, $L(3,1)$ і $M(2,-1)$. Знайти четверту вершину N протилежну до вершини L.
5. Відрізок між точками $D(-2,1)$ і $E(-1,3)$ розділено на п'ять рівних частин точками M_1, M_2, M_3 і M_4 (позначеними у напрямку від D до E). Визначити координати точок поділу.

ВАРІАНТ 8.
1. Три вектори $\overline{DE}=\overline{h}$, $\overline{EF}=\overline{i}$ і $\overline{FD}=\overline{j}$ є сторонами трикутника. З допомогою $\overline{h}$, $\overline{i}$ і $\overline{j}$ виразити вектори, що суміщаються з медіанами трикутника: $\overline{DJ}$, $\overline{EK}$ і $\overline{FL}$.
2. В трикутнику попередньої задачі виразити всі медіани тільки через два вектори: $\overline{h}$ і $\overline{i}$.
3. Розкласти вектор $\overline{v}=\overline{b}+\overline{c}+6\overline{d}$ за трьома некомпланарними векторами $\overline{v}=-3\overline{b}-3\overline{c}+3\overline{d}$, $\overline{w}=-\overline{b}-3\overline{c}+4\overline{d}$ і $\overline{x}=-2\overline{b}-\overline{c}+4\overline{d}$.
4. Дано три вершини паралелограма $O(-1,2)$, $P(1,0)$ і $Q(1,3)$. Знайти четверту вершину R протилежну до вершини P.
5. Відрізок між точками $G(-3,0)$ і $H(0,2)$ розділено на п'ять рівних частин точками P_1, P_2, P_3 і P_4 (позначеними у напрямку від G до H). Визначити координати точок поділу.

ВАРІАНТ 9.
1. Три вектори $\overline{MN}=\overline{a}$, $\overline{NO}=\overline{b}$ і $\overline{OM}=\overline{c}$ є сторонами трикутника. З допомогою $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ виразити вектори, що суміщаються з медіанами трикутника: $\overline{MD}$, $\overline{NE}$ і $\overline{OF}$.
2. В трикутнику попередньої задачі виразити всі медіани тільки через два вектори: $\overline{b}$ і $\overline{c}$.
3. Розкласти вектор $\overline{v}=-9\overline{c}$ за трьома некомпланарними векторами $\overline{s}=-2\overline{b}+5\overline{c}-2\overline{d}$, $\overline{t}=6\overline{b}+5\overline{d}$ і $\overline{u}=5\overline{b}-2\overline{c}+4\overline{d}$.

4. Дано три вершини паралелограма $K(3,-2)$, $L(-1,-3)$ і $M(-3,2)$. Знайти четверту вершину N протилежну до вершини L.
5. Відрізок між точками $F(-2,0)$ і $G(2,2)$ розділено на п'ять рівних частин точками O_1, O_2, O_3 і O_4 (позначеними у напрямку від F до G). Визначити координати точок поділу.

ВАРІАНТ 10.
1. Три вектори $\overline{ST}=\overline{b}$, $\overline{TU}=\overline{c}$ і $\overline{US}=\overline{d}$ є сторонами трикутника. З допомогою $\overline{b}$, $\overline{c}$ і $\overline{d}$ виразити вектори, що суміщаються з медіанами трикутника: $\overline{SG}$, $\overline{TH}$ і $\overline{UI}$.
2. В трикутнику попередньої задачі виразити всі медіани тільки через два вектори: $\overline{b}$ і $\overline{c}$.
3. Розкласти вектор $\overline{v}=3\overline{e}+4\overline{f}$ за трьома некомпланарними векторами $\overline{x}=5\overline{d}-5\overline{e}-4\overline{f}$, $\overline{y}=-2\overline{d}-2\overline{e}-2\overline{f}$ і $\overline{z}=7\overline{d}+2\overline{f}$.
4. Дано три вершини паралелограма $M(0,-1)$, $N(3,1)$ і $O(-1,-2)$. Знайти четверту вершину P протилежну до вершини N.
5. Відрізок між точками $A(0,-1)$ і $B(1,3)$ розділено на п'ять рівних частин точками H_1, H_2, H_3 і H_4 (позначеними у напрямку від A до B). Визначити координати точок поділу.

Тема 11. Скалярний, векторний та мішаний добуток векторів.

ВАРІАНТ 1.
1. Обчислити довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{B} = 3\overline{f} + 2\overline{g}$ і $\overline{C} = -\overline{f} + 2\overline{g}$, що виходить із їх спільного початку, при умові, що $|\overline{f}| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $|\overline{g}| = \frac{2}{3}$ і $(\widehat{\overline{f}, \overline{g}}) = \frac{\pi}{4}$.
2. Перевірити, чи трикутник з вершинами $H(-1, 0)$, $I(0, 1)$ і $J(1, 1)$ — прямокутний.
3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\overline{HI} = -\overline{o} - 2\overline{p}$ і $\overline{HK} = \overline{o} + 4\overline{p}$, де $|\overline{o}| = 3$, $|\overline{p}| = 4$ і $(\widehat{\overline{o}, \overline{p}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах: $\overline{G} = -\overline{S} - 4\overline{T} - 4\overline{U}$, $\overline{H} = -\overline{T} - \overline{U}$ і $\overline{I} = 3\overline{S} - 2\overline{T}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на $\overline{G}$ і $\overline{H}$. Крім того, відомо, що вектори $\overline{S}$, $\overline{T}$ і $\overline{U}$ — взаємно перпендикулярні орти.
5. Перевірити, чи компланарні вектори: $\overline{s} = -2\overline{e} - 2\overline{f} + 4\overline{g}$, $\overline{t} = 2\overline{e} + 3\overline{f}$ і $\overline{u} = \overline{f} + 4\overline{g}$; де $\overline{e}$, $\overline{f}$, $\overline{g}$ — взаємно перпендикулярні орти.

ВАРІАНТ 2.
1. Обчислити довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{H} = -4\overline{f} + 2\overline{g}$ і $\overline{I} = 2\overline{f} - 4\overline{g}$, що виходить із їх спільного початку, при умові, що $|\overline{f}| = \sqrt{2}$, $|\overline{g}| = 1$ і $(\widehat{\overline{f}, \overline{g}}) = \frac{\pi}{4}$.
2. Перевірити, чи трикутник з вершинами $G(0, -1)$, $H(1, 0)$ і $I(2, -1)$ — прямокутний.
3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\overline{GH} = -\overline{t} - 2\overline{u}$ і $\overline{GJ} = \overline{t} - 3\overline{u}$, де $|\overline{t}| = 2$, $|\overline{u}| = 4$ і $(\widehat{\overline{t}, \overline{u}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах: $\overline{C} = \overline{L} - \overline{M} + \overline{N}$, $\overline{D} = -3\overline{L} + 3\overline{M} - 2\overline{N}$ і $\overline{E} = -3\overline{M}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на $\overline{C}$ і $\overline{D}$. Крім того, відомо, що вектори $\overline{L}$, $\overline{M}$ і $\overline{N}$ — взаємно перпендикулярні орти.
5. Перевірити, чи компланарні вектори: $\overline{u} = 3\overline{e} - 3\overline{g}$, $\overline{v} = -2\overline{e} + 4\overline{f} + 2\overline{g}$ і $\overline{w} = -\overline{e} - 4\overline{f} + \overline{g}$; де $\overline{e}$, $\overline{f}$, $\overline{g}$ — взаємно перпендикулярні орти.

ВАРІАНТ 3.
1. Обчислити довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{F} = \overline{f} - 4\overline{g}$ і $\overline{G} = 2\overline{f} + \overline{g}$, що виходить із їх спільного початку, при умові, що $|\overline{f}| = \sqrt{2}$, $|\overline{g}| = 1$ і $(\widehat{\overline{f}, \overline{g}}) = \frac{\pi}{4}$.
2. Перевірити, чи трикутник з вершинами $I(1, 2)$, $J(1, -1)$ і $K(2, 2)$ — прямокутний.
3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\overline{AB} =$

$-2\overline{m}+2\overline{n}$ і $\overline{AD}=\overline{m}+4\overline{n}$, де $|\overline{m}|=6$, $|\overline{n}|=5$ і $(\widehat{\overline{m},\overline{n}})=\frac{5\pi}{6}$.
4. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах: $\overline{E}=-3\overline{M}-2\overline{N}-2\overline{O}$, $\overline{F}=-\overline{M}$ і $\overline{G}=3\overline{M}+\overline{N}+2\overline{O}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на $\overline{E}$ і $\overline{F}$. Крім того, відомо, що вектори $\overline{M}$, $\overline{N}$ і $\overline{O}$ — взаємно перпендикулярні орти.
5. Перевірити, чи компланарні вектори: $\overline{p}=-5\overline{e}+3\overline{f}+2\overline{g}$, $\overline{q}=-4\overline{e}+2\overline{f}+4\overline{g}$ і $\overline{r}=\overline{e}-\overline{f}+2\overline{g}$; де $\overline{e}$, $\overline{f}$, $\overline{g}$ — взаємно перпендикулярні орти.

ВАРІАНТ 4.
1. Обчислити довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{F}=\overline{f}+2\overline{g}$ і $\overline{G}=-4\overline{f}-4\overline{g}$, що виходить із їх спільного початку, при умові, що $|\overline{f}|=\frac{3\sqrt{2}}{2}$, $|\overline{g}|=1$ і $(\widehat{\overline{f},\overline{g}})=\frac{\pi}{4}$.
2. Перевірити, чи трикутник з вершинами $H(0,0)$, $I(-1,-1)$ і $J(1,-1)$ — прямокутний.
3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\overline{JK}=2\overline{t}-2\overline{u}$ і $\overline{JM}=-2\overline{t}-3\overline{u}$, де $|\overline{t}|=5$, $|\overline{u}|=4$ і $(\widehat{\overline{t},\overline{u}})=\frac{5\pi}{6}$.
4. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах: $\overline{E}=-2\overline{M}-\overline{O}$, $\overline{F}=-\overline{M}-\overline{N}$ і $\overline{G}=3\overline{M}-3\overline{N}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на $\overline{E}$ і $\overline{F}$. Крім того, відомо, що вектори $\overline{M}$, $\overline{N}$ і $\overline{O}$ — взаємно перпендикулярні орти.
5. Перевірити, чи компланарні вектори: $\overline{s}=-4\overline{a}+\overline{b}+3\overline{c}$, $\overline{t}=\overline{a}+\overline{b}-2\overline{c}$ і $\overline{u}=3\overline{a}-2\overline{b}-\overline{c}$; де $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — взаємно перпендикулярні орти.

ВАРІАНТ 5.
1. Обчислити довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{E}=2\overline{b}-2\overline{c}$ і $\overline{F}=4\overline{b}+\overline{c}$, що виходить із їх спільного початку, при умові, що $|\overline{b}|=\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $|\overline{c}|=\frac{3}{2}$ і $(\widehat{\overline{b},\overline{c}})=\frac{\pi}{4}$.
2. Перевірити, чи трикутник з вершинами $I(1,2)$, $J(1,1)$ і $K(-1,1)$ — прямокутний.
3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\overline{EF}=4\overline{m}-2\overline{n}$ і $\overline{EH}=2\overline{m}-4\overline{n}$, де $|\overline{m}|=3$, $|\overline{n}|=4$ і $(\widehat{\overline{m},\overline{n}})=\frac{5\pi}{6}$.
4. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах: $\overline{H}=2\overline{O}+4\overline{P}+\overline{Q}$, $\overline{I}=-\overline{O}-\overline{P}$ і $\overline{J}=-3\overline{O}+3\overline{P}-2\overline{Q}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на $\overline{H}$ і $\overline{I}$. Крім того, відомо, що вектори $\overline{O}$, $\overline{P}$ і $\overline{Q}$ — взаємно перпендикулярні орти.
5. Перевірити, чи компланарні вектори: $\overline{w}=-2\overline{a}-\overline{b}+2\overline{c}$, $\overline{x}=\overline{a}-3\overline{b}+\overline{c}$ і $\overline{y}=3\overline{a}-2\overline{b}-\overline{c}$; де $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ — взаємно перпендикулярні орти.

ВАРІАНТ 6.

1. Обчислити довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{C} = -2\overline{b} + \overline{c}$ і $\overline{D} = -3\overline{b} - 2\overline{c}$, що виходить із їх спільного початку, при умові, що $|\overline{b}| = \sqrt{2}$, $|\overline{c}| = 1$ і $(\widehat{\overline{b}, \overline{c}}) = \frac{\pi}{4}$.
2. Перевірити, чи трикутник з вершинами $C(-1, 2)$, $D(1, 1)$ і $E(0, -1)$ — прямокутний.
3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\overline{GH} = -2\overline{s} + 4\overline{t}$ і $\overline{GJ} = -4\overline{s} + 3\overline{t}$, де $|\overline{s}| = 4$, $|\overline{t}| = 2$ і $(\widehat{\overline{s}, \overline{t}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах: $\overline{G} = \overline{S} - 2\overline{T} + \overline{U}$, $\overline{H} = \overline{S} + \overline{U}$ і $\overline{I} = -\overline{S} + 3\overline{T} - 2\overline{U}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на $\overline{G}$ і $\overline{H}$. Крім того, відомо, що вектори $\overline{S}$, $\overline{T}$ і $\overline{U}$ — взаємно перпендикулярні орти.
5. Перевірити, чи компланарні вектори: $\overline{o} = -3\overline{i} - 3\overline{j} - 2\overline{k}$, $\overline{p} = 4\overline{i} + \overline{j} + 3\overline{k}$ і $\overline{q} = -\overline{i} + 2\overline{j} - \overline{k}$; де $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ — взаємно перпендикулярні орти.

ВАРІАНТ 7.

1. Обчислити довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{J} = -\overline{d} - \overline{e}$ і $\overline{K} = 2\overline{d} + 2\overline{e}$, що виходить із їх спільного початку, при умові, що $|\overline{d}| = \sqrt{2}$, $|\overline{e}| = \frac{3}{2}$ і $(\widehat{\overline{d}, \overline{e}}) = \frac{\pi}{4}$.
2. Перевірити, чи трикутник з вершинами $F(1, -1)$, $G(1, 1)$ і $H(0, -1)$ — прямокутний.
3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\overline{BC} = 2\overline{s} + \overline{t}$ і $\overline{BE} = 3\overline{s} - 2\overline{t}$, де $|\overline{s}| = 4$, $|\overline{t}| = 2$ і $(\widehat{\overline{s}, \overline{t}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах: $\overline{I} = 3\overline{S} - 4\overline{T} - 2\overline{U}$, $\overline{J} = -2\overline{S} + 2\overline{T} + \overline{U}$ і $\overline{K} = \overline{S} + 4\overline{T} + 3\overline{U}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на $\overline{I}$ і $\overline{J}$. Крім того, відомо, що вектори $\overline{S}$, $\overline{T}$ і $\overline{U}$ — взаємно перпендикулярні орти.
5. Перевірити, чи компланарні вектори: $\overline{v} = 2\overline{d} - 3\overline{e} + 3\overline{f}$, $\overline{w} = -2\overline{d} + 2\overline{e}$ і $\overline{x} = -4\overline{d} + 2\overline{e} + 4\overline{f}$; де $\overline{d}$, $\overline{e}$, $\overline{f}$ — взаємно перпендикулярні орти.

ВАРІАНТ 8.

1. Обчислити довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{B} = -3\overline{d} + \overline{e}$ і $\overline{C} = 4\overline{d} + 3\overline{e}$, що виходить із їх спільного початку, при умові, що $|\overline{d}| = \sqrt{2}$, $|\overline{e}| = 1$ і $(\widehat{\overline{d}, \overline{e}}) = \frac{\pi}{4}$.
2. Перевірити, чи трикутник з вершинами $H(-1, 2)$, $I(0, 1)$ і $J(1, 1)$ — прямокутний.
3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\overline{GH} = -4\overline{l} + 3\overline{m}$ і $\overline{GJ} = -3\overline{l} + 2\overline{m}$, де $|\overline{l}| = 5$, $|\overline{m}| = 2$ і $(\widehat{\overline{l}, \overline{m}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах: $\overline{C} = -\overline{K} - 2\overline{L} + \overline{M}$, $\overline{D} = 3\overline{K} + 4\overline{L} - 3\overline{M}$ і $\overline{E} = -3\overline{K} - 3\overline{L} + 4\overline{M}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на $\overline{C}$ і $\overline{D}$. Крім

того, відомо, що вектори $\overline{K}$, $\overline{L}$ і $\overline{M}$ — взаємно перпендикулярні орти.
5. Перевірити, чи компланарні вектори: $\overline{q} = 2\overline{e} + 2\overline{f}$, $\overline{r} = \overline{d} - 3\overline{e} + 2\overline{f}$ і $\overline{s} = -\overline{d} + \overline{e} - 4\overline{f}$; де $\overline{d}$, $\overline{e}$, $\overline{f}$ — взаємно перпендикулярні орти.

ВАРІАНТ 9.
1. Обчислити довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{D} = -\overline{i} - 3\overline{j}$ і $\overline{E} = -\overline{i} - 2\overline{j}$, що виходить із їх спільного початку, при умові, що $|\overline{i}| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $|\overline{j}| = 1$ і $(\widehat{\overline{i}, \overline{j}}) = \frac{\pi}{4}$.
2. Перевірити, чи трикутник з вершинами $I(-1, 2)$, $J(0, 1)$ і $K(-1, 1)$ — прямокутний.
3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\overline{EF} = \overline{l} + 2\overline{m}$ і $\overline{EH} = -\overline{l} + 4\overline{m}$, де $|\overline{l}| = 4$, $|\overline{m}| = 3$ і $(\widehat{\overline{l}, \overline{m}}) = \frac{\pi}{6}$.
4. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах: $\overline{A} = \overline{Q} + \overline{R}$, $\overline{B} = \overline{P} - \overline{Q} - 3\overline{R}$ і $\overline{C} = -\overline{P} - \overline{Q} - 4\overline{R}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на $\overline{A}$ і $\overline{B}$. Крім того, відомо, що вектори $\overline{P}$, $\overline{Q}$ і $\overline{R}$ — взаємно перпендикулярні орти.
5. Перевірити, чи компланарні вектори: $\overline{r} = \overline{b} + 6\overline{c} - \overline{d}$, $\overline{s} = 3\overline{b} + 4\overline{c} - 2\overline{d}$ і $\overline{t} = -2\overline{b} + 2\overline{c} + \overline{d}$; де $\overline{b}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ — взаємно перпендикулярні орти.

ВАРІАНТ 10.
1. Обчислити довжину діагоналі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{A} = \overline{h} - 2\overline{i}$ і $\overline{B} = \overline{h} - 4\overline{i}$, що виходить із їх спільного початку, при умові, що $|\overline{h}| = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $|\overline{i}| = 1$ і $(\widehat{\overline{h}, \overline{i}}) = \frac{\pi}{4}$.
2. Перевірити, чи трикутник з вершинами $C(1, 2)$, $D(1, 1)$ і $E(-1, 2)$ — прямокутний.
3. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах: $\overline{IJ} = -3\overline{u} + 2\overline{v}$ і $\overline{IL} = -3\overline{u} + \overline{v}$, де $|\overline{u}| = 3$, $|\overline{v}| = 4$ і $(\widehat{\overline{u}, \overline{v}}) = \frac{5\pi}{6}$.
4. Обчислити висоту паралелепіпеда, побудованого на трьох векторах: $\overline{E} = 4\overline{R} - 2\overline{S} - \overline{T}$, $\overline{F} = 3\overline{R} - 2\overline{S} - \overline{T}$ і $\overline{G} = -3\overline{R} + \overline{S} - \overline{T}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на $\overline{E}$ і $\overline{F}$. Крім того, відомо, що вектори $\overline{R}$, $\overline{S}$ і $\overline{T}$ — взаємно перпендикулярні орти.
5. Перевірити, чи компланарні вектори: $\overline{t} = 2\overline{c} - 5\overline{d} + 3\overline{e}$, $\overline{u} = 2\overline{d} - 2\overline{e}$ і $\overline{v} = -\overline{c} + \overline{d} - 4\overline{e}$; де $\overline{c}$, $\overline{d}$, $\overline{e}$ — взаємно перпендикулярні орти.

Тема 12. Рівняння прямої на площині. Кут між двома прямими на площині.

ВАРІАНТ 1.
1. Обчислити кут між прямими $y = \frac{3}{4}x - 5$, $y = \frac{1}{3}x$.
2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(0, -2)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) бісектрисі координатного кута; 3) прямій $y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.
3. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма: $5x + y - 18 = 0$, $x - 11y + 30 = 0$ і точка перетину його діагоналей $M(-2, 0)$. Написати рівняння двох інших сторін паралелограма.
4. Дано вершини трикутника: $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$ і $C(4, -1)$. Обчислити довжини його висот.
5. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$ і проходить від точки $P(1, -1)$ на відстані $\delta = \frac{3}{5}$.

ВАРІАНТ 2.
1. Обчислити кут між прямими $y = -\frac{1}{3}x - \frac{5}{3}$, $y = -x + 1$.
2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-3, 0)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) бісектрисі координатного кута; 3) прямій $y = 3x$.
3. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма: $x + 3y - 6 = 0$, $x - y + 2 = 0$ і точка перетину його діагоналей $M(-3, -3)$. Написати рівняння двох інших сторін паралелограма.
4. Дано вершини трикутника: $A(-1, -1)$, $B(4, 2)$ і $C(3, -2)$. Обчислити довжини його висот.
5. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = \frac{1}{3}x - \frac{16}{3}$ і проходить від точки $P(0, -2)$ на відстані $\delta = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

ВАРІАНТ 3.
1. Обчислити кут між прямими $y = -\frac{1}{2}x + 2$, $y = \frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$.
2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4, 4)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) бісектрисі координатного кута; 3) прямій $y = 2x + 2$.
3. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма: $3x + 5y - 9 = 0$, $3x - y + 9 = 0$ і точка перетину його діагоналей $M(0, 0)$. Написати рівняння двох інших сторін паралелограма.
4. Дано вершини трикутника: $A(3, 3)$, $B(4, 0)$ і $C(2, -3)$. Обчислити довжини його висот.
5. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = 4x + 20$ і проходить від точки $P(-2, 0)$ на відстані $\delta = \frac{6\sqrt{17}}{17}$.

ВАРІАНТ 4.
1. Обчислити кут між прямими $y = -\frac{1}{3}x - 2$, $y = \frac{1}{2}x$.
2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1, 0)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) бісектрисі координатного кута; 3) прямій $y = -\frac{1}{3}x$.
3. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма: $x - y - 3 = 0$, $2x - y - 4 = 0$ і точка перетину його діагоналей $M(4, 3)$. Написати рівняння двох інших сторін паралелограма.
4. Дано вершини трикутника: $A(1, -1)$, $B(1, -3)$ і $C(4, 2)$. Обчислити довжини його висот.
5. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = -\frac{1}{2}x - \frac{17}{2}$ і проходить від точки $P(-1, -2)$ на відстані $\delta = \frac{6\sqrt{5}}{5}$.

ВАРІАНТ 5.
1. Обчислити кут між прямими $y = 2x + 6$, $y = 3x - 14$.
2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1, -2)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) бісектрисі координатного кута; 3) прямій $y = x + 3$.
3. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма: $x + 2y - 5 = 0$, $2x + y + 2 = 0$ і точка перетину його діагоналей $M(1, -1)$. Написати рівняння двох інших сторін паралелограма.
4. Дано вершини трикутника: $A(4, 3)$, $B(2, -2)$ і $C(4, -3)$. Обчислити довжини його висот.
5. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = -3x + 4$ і проходить від точки $P(1, -1)$ на відстані $\delta = \frac{\sqrt{10}}{10}$.

ВАРІАНТ 6.
1. Обчислити кут між прямими $y = -x + 2$, $y = -4x + 10$.
2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(1, 4)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) бісектрисі координатного кута; 3) прямій $y = x - 2$.
3. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма: $2x + 3y - 6 = 0$, $2x - y + 10 = 0$ і точка перетину його діагоналей $M(-1, 4)$. Написати рівняння двох інших сторін паралелограма.
4. Дано вершини трикутника: $A(-3, 2)$, $B(-2, -2)$ і $C(-2, 1)$. Обчислити довжини його висот.
5. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$ і проходить від точки $P(1, 1)$ на відстані $\delta = \frac{\sqrt{13}}{13}$.

ВАРІАНТ 7.
1. Обчислити кут між прямими $y = -\frac{4}{3}x + \frac{4}{3}$, $y = 2x$.

2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(0,0)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) бісектрисі координатного кута; 3) прямій $y=-x+5$.
3. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма: $6x+y-21=0$, $2x-y-3=0$ і точка перетину його діагоналей $M(4,1)$. Написати рівняння двох інших сторін паралелограма.
4. Дано вершини трикутника: $A(4,4)$, $B(-3,-1)$ і $C(2,1)$. Обчислити довжини його висот.
5. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $y=-\frac{1}{2}x-5$ і проходить від точки $P(0,-1)$ на відстані $\delta=\frac{4\sqrt{5}}{5}$.

ВАРІАНТ 8.
1. Обчислити кут між прямими $y=-4x+4$, $y=-x+4$.
2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(4,3)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) бісектрисі координатного кута; 3) прямій $y=-\frac{1}{4}x+\frac{11}{4}$.
3. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма: $5x+4y-2=0$, $7x+8y-10=0$ і точка перетину його діагоналей $M(4,-3)$. Написати рівняння двох інших сторін паралелограма.
4. Дано вершини трикутника: $A(-2,1)$, $B(4,-2)$ і $C(3,2)$. Обчислити довжини його висот.
5. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $y=x+4$ і проходить від точки $P(-2,-2)$ на відстані $\delta=\sqrt{2}$.

ВАРІАНТ 9.
1. Обчислити кут між прямими $y=x+2$, $y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$.
2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-1,-1)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) бісектрисі координатного кута; 3) прямій $y=2x+2$.
3. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма: $3x-2y+1=0$, $x+2y+3=0$ і точка перетину його діагоналей $M(-1,1)$. Написати рівняння двох інших сторін паралелограма.
4. Дано вершини трикутника: $A(-1,0)$, $B(4,0)$ і $C(1,-1)$. Обчислити довжини його висот.
5. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $y=x-4$ і проходить від точки $P(2,2)$ на відстані $\delta=\sqrt{2}$.

ВАРІАНТ 10.
1. Обчислити кут між прямими $y=-\frac{4}{3}x$, $y=-2x-3$.
2. Написати рівняння прямої, яка проходить через точку $A(-3,1)$ і паралельна: 1) осі абсцис; 2) бісектрисі координатного кута; 3) пря-

мій $y = 2x - 6$.
3. Дано рівняння двох суміжних сторін паралелограма: $4x - 5y - 7 = 0$, $2x + 7y + 25 = 0$ і точка перетину його діагоналей $M(-3, 0)$. Написати рівняння двох інших сторін паралелограма.
4. Дано вершини трикутника: $A(0, 1)$, $B(3, 2)$ і $C(1, 4)$. Обчислити довжини його висот.
5. Скласти рівняння прямої, яка паралельна прямій $y = -\frac{3}{2}x + 2$ і проходить від точки $P(0, 1)$ на відстані $\delta = \frac{\sqrt{13}}{13}$.

Тема 13. Площина в просторі.

ВАРІАНТ 1.

1. Написати рівняння площини паралельної до осі Ox, що проходить через дві точки $A(2,-2,3)$ і $B(2,-2,0)$.
2. Площина $3x+4y+6z-12=0$ разом з координатними площинами утворює деякий тетраедр. Обчислити ребро куба, який можна помістити в середині цього тетраедра так, щоб три його грані лежали на координатних площинах, а протилежна до початку координат вершина лежала на даній площині.
3. Три грані тетраедра, який розміщений в другому октанті ($x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), лежать на координатних площинах. Написати рівняння четвертої грані, знаючи довжини ребер, що її обмежують: $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 4\sqrt{2}$, $CA = 4\sqrt{2}$ ($A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$).
4. Знайти площину, знаючи, що точка $P(-3,-4,4)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на цю площину.
5. Через вісь z провести площину, що утворює з площиною $5x+5y+\sqrt{130}z-5=0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

ВАРІАНТ 2.

1. Написати рівняння площини паралельної до осі Ox, що проходить через дві точки $A(4,4,-2)$ і $B(3,5,3)$.
2. Площина $x-y+z-3=0$ разом з координатними площинами утворює деякий тетраедр. Обчислити ребро куба, який можна помістити в середині цього тетраедра так, щоб три його грані лежали на координатних площинах, а протилежна до початку координат вершина лежала на даній площині.
3. Три грані тетраедра, який розміщений в другому октанті ($x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), лежать на координатних площинах. Написати рівняння четвертої грані, знаючи довжини ребер, що її обмежують: $AB = 3\sqrt{2}$, $BC = 3\sqrt{2}$, $CA = 3\sqrt{2}$ ($A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$).
4. Знайти площину, знаючи, що точка $P(4,3,-2)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на цю площину.
5. Через вісь z провести площину, що утворює з площиною $5x+5y+\sqrt{130}z-5=0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

ВАРІАНТ 3.

1. Написати рівняння площини паралельної до осі Ox, що проходить через дві точки $A(-3,1,-4)$ і $B(1,-3,0)$.
2. Площина $4x+4y+3z+12=0$ разом з координатними площи-

нами утворює деякий тетраедр. Обчислити ребро куба, який можна помістити в середині цього тетраедра так, щоб три його грані лежали на координатних площинах, а протилежна до початку координат вершина лежала на даній площині.
3. Три грані тетраедра, який розміщений в другому октанті ($x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), лежать на координатних площинах. Написати рівняння четвертої грані, знаючи довжини ребер, що її обмежують: $AB = \sqrt{13}$, $BC = \sqrt{13}$, $CA = 3\sqrt{2}$ ($A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$).
4. Знайти площину, знаючи, що точка $P(4,2,2)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на цю площину.
5. Через вісь z провести площину, що утворює з площиною $5x + 5y + \sqrt{130}z - 4 = 0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

ВАРІАНТ 4.
1. Написати рівняння площини паралельної до осі Ox, що проходить через дві точки $A(-2,-1,4)$ і $B(1,0,-3)$.
2. Площина $4x - 6y - 3z + 12 = 0$ разом з координатними площинами утворює деякий тетраедр. Обчислити ребро куба, який можна помістити в середині цього тетраедра так, щоб три його грані лежали на координатних площинах, а протилежна до початку координат вершина лежала на даній площині.
3. Три грані тетраедра, який розміщений в другому октанті ($x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), лежать на координатних площинах. Написати рівняння четвертої грані, знаючи довжини ребер, що її обмежують: $AB = 2\sqrt{5}$, $BC = 4\sqrt{2}$, $CA = 2\sqrt{5}$ ($A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$).
4. Знайти площину, знаючи, що точка $P(4,4,-4)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на цю площину.
5. Через вісь z провести площину, що утворює з площиною $5x + 5y + \sqrt{110}z - 3 = 0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

ВАРІАНТ 5.
1. Написати рівняння площини паралельної до осі Ox, що проходить через дві точки $A(-2,-2,1)$ і $B(-2,3,4)$.
2. Площина $3x - 2y - 3z + 6 = 0$ разом з координатними площинами утворює деякий тетраедр. Обчислити ребро куба, який можна помістити в середині цього тетраедра так, щоб три його грані лежали на координатних площинах, а протилежна до початку координат вершина лежала на даній площині.
3. Три грані тетраедра, який розміщений в другому октанті ($x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), лежать на координатних площинах. Написати рівняння четвертої грані, знаючи довжини ребер, що її обмежують: $AB = 5$,

$BC = 5$, $CA = 3\sqrt{2}$ ($A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$).
4. Знайти площину, знаючи, що точка $P(4, -3, 3)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на цю площину.
5. Через вісь z провести площину, що утворює з площиною $5x+5y+\sqrt{130}z-1=0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

ВАРІАНТ 6.
1. Написати рівняння площини паралельної до осі Ox, що проходить через дві точки $A(-1, -3, 0)$ і $B(-2, -3, -4)$.
2. Площина $2x + 3y + 3z - 6 = 0$ разом з координатними площинами утворює деякий тетраедр. Обчислити ребро куба, який можна помістити в середині цього тетраедра так, щоб три його грані лежали на координатних площинах, а протилежна до початку координат вершина лежала на даній площині.
3. Три грані тетраедра, який розміщений в другому октанті ($x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), лежать на координатних площинах. Написати рівняння четвертої грані, знаючи довжини ребер, що її обмежують: $AB = 2\sqrt{5}$, $BC = \sqrt{13}$, $CA = 5$ ($A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$).
4. Знайти площину, знаючи, що точка $P(4, -2, 4)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на цю площину.
5. Через вісь z провести площину, що утворює з площиною $5x+5y+\sqrt{130}z-7=0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

ВАРІАНТ 7.
1. Написати рівняння площини паралельної до осі Ox, що проходить через дві точки $A(4, 4, 1)$ і $B(3, -4, 5)$.
2. Площина $6x + 4y - 3z - 12 = 0$ разом з координатними площинами утворює деякий тетраедр. Обчислити ребро куба, який можна помістити в середині цього тетраедра так, щоб три його грані лежали на координатних площинах, а протилежна до початку координат вершина лежала на даній площині.
3. Три грані тетраедра, який розміщений в другому октанті ($x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), лежать на координатних площинах. Написати рівняння четвертої грані, знаючи довжини ребер, що її обмежують: $AB = \sqrt{13}$, $BC = 5$, $CA = 2\sqrt{5}$ ($A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$).
4. Знайти площину, знаючи, що точка $P(4, -3, -4)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на цю площину.
5. Через вісь z провести площину, що утворює з площиною $5x+5y+\sqrt{130}z-5=0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

ВАРІАНТ 8.

1. Написати рівняння площини паралельної до осі Ox, що проходить через дві точки $A(3, 0, 3)$ і $B(3, -3, 1)$.
2. Площина $3x - 4y - 6z + 12 = 0$ разом з координатними площинами утворює деякий тетраедр. Обчислити ребро куба, який можна помістити в середині цього тетраедра так, щоб три його грані лежали на координатних площинах, а протилежна до початку координат вершина лежала на даній площині.
3. Три грані тетраедра, який розміщений в другому октанті ($x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), лежать на координатних площинах. Написати рівняння четвертої грані, знаючи довжини ребер, що її обмежують: $AB = 5$, $BC = 3\sqrt{2}$, $CA = 5$ ($A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$).
4. Знайти площину, знаючи, що точка $P(-4, 4, -3)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на цю площину.
5. Через вісь z провести площину, що утворює з площиною $5x + 5y + \sqrt{130}z - 4 = 0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

ВАРІАНТ 9.
1. Написати рівняння площини паралельної до осі Ox, що проходить через дві точки $A(1, 4, -1)$ і $B(0, 3, -1)$.
2. Площина $2x - y - 2z + 4 = 0$ разом з координатними площинами утворює деякий тетраедр. Обчислити ребро куба, який можна помістити в середині цього тетраедра так, щоб три його грані лежали на координатних площинах, а протилежна до початку координат вершина лежала на даній площині.
3. Три грані тетраедра, який розміщений в другому октанті ($x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), лежать на координатних площинах. Написати рівняння четвертої грані, знаючи довжини ребер, що її обмежують: $AB = 2\sqrt{5}$, $BC = 4\sqrt{2}$, $CA = 2\sqrt{5}$ ($A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$).
4. Знайти площину, знаючи, що точка $P(-2, 3, -4)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на цю площину.
5. Через вісь z провести площину, що утворює з площиною $5x + 5y + \sqrt{110}z - 1 = 0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

ВАРІАНТ 10.
1. Написати рівняння площини паралельної до осі Ox, що проходить через дві точки $A(-2, -1, 2)$ і $B(3, -1, -1)$.
2. Площина $2x + 2y - z - 4 = 0$ разом з координатними площинами утворює деякий тетраедр. Обчислити ребро куба, який можна помістити в середині цього тетраедра так, щоб три його грані лежали на координатних площинах, а протилежна до початку координат вершина лежала на даній площині.

3. Три грані тетраедра, який розміщений в другому октанті ($x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$), лежать на координатних площинах. Написати рівняння четвертої грані, знаючи довжини ребер, що її обмежують: $AB = 2\sqrt{2}$, $BC = 2\sqrt{2}$, $CA = 2\sqrt{2}$ ($A \in Ox$, $B \in Oy$, $C \in Oz$).
4. Знайти площину, знаючи, що точка $P(-4, 4, -4)$ є основою перпендикуляра, який опущений з початку координат на цю площину.
5. Через вісь z провести площину, що утворює з площиною $5x + 5y + \sqrt{130}z - 2 = 0$ кут $\frac{\pi}{3}$.

Тема 14. Пряма в просторі. Взаємне розташування прямої та площини в просторі.

ВАРІАНТ 1.
1. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(2,-1,-2)$ паралельно прямій

$$\begin{cases} x-y-5=0, \\ y+2z-4=0. \end{cases}$$

2. Із початку координат провести перпендикуляр до прямої

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{-1}.$$

3. Із точки $M(-10,16,-14)$ опустити перпендикуляр на площину $4x-7y+8z+6=0$.
4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(-2,2,2)$ і паралельна до прямих $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$, $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-1}{-1}$.
5. Знайти відстань від точки $P(0,-2,-1)$ до прямої $\frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-1}{-1}$.

ВАРІАНТ 2.
1. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(0,1,1)$ паралельно прямій

$$\begin{cases} 2x+y-2=0, \\ y+2z+5=0. \end{cases}$$

2. Із початку координат провести перпендикуляр до прямої

$$\frac{x-11}{5}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{-1}.$$

3. Із точки $M(2,3,-4)$ опустити перпендикуляр на площину $2x+3y-2z-4=0$.
4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(-2,-2,2)$ і паралельна до прямих $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{-2}$, $\frac{x}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-4}$.
5. Знайти відстань від точки $P(0,1,1)$ до прямої $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z}{-1}$.

ВАРІАНТ 3.
1. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(-2,-1,2)$ паралельно прямій

$$\begin{cases} x-y+2z-5=0, \\ x+2y-2z-2=0. \end{cases}$$

2. Із початку координат провести перпендикуляр до прямої

$$\frac{x-5}{1}=\frac{y+13}{-4}=\frac{z+17}{-6}.$$

3. Із точки $M(-14,-13,5)$ опустити перпендикуляр на площину $16x+12y-3z-14=0$.
4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(-2,-2,0)$ і паралельна до прямих $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{4}=\frac{z}{-2}$, $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-2}$.

5. Знайти відстань від точки $P(0,-2,2)$ до прямої $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{1}$.

ВАРІАНТ 4.

1. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку$M(0,0,0)$ паралельно прямій
$$\begin{cases} y+z-2=0, \\ x-2y+z+2=0. \end{cases}$$
2. Із початку координат провести перпендикуляр до прямої
$$\frac{x-11}{3}=\frac{y+4}{-2}=\frac{z+5}{-2}.$$
3. Із точки $M(7,2,-8)$ опустити перпендикуляр на площину $3x+2y-3z-5=0$.
4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(0,0,2)$ і паралельна до прямих $\frac{x+2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{1}$, $\frac{x}{3}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{-1}$.
5. Знайти відстань від точки $P(1,1,2)$ до прямої $\frac{x-2}{2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-1}{2}$.

ВАРІАНТ 5.

1. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку$M(-2,2,-2)$ паралельно прямій
$$\begin{cases} y+z+5=0, \\ 2x-2y-z+5=0. \end{cases}$$
2. Із початку координат провести перпендикуляр до прямої
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+4}{-1}=\frac{z+4}{-1}.$$
3. Із точки $M(5,4,-8)$ опустити перпендикуляр на площину $7x+3y-6z-1=0$.
4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(1,2,1)$ і паралельна до прямих $\frac{x+2}{4}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{3}$, $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$.
5. Знайти відстань від точки $P(0,1,0)$ до прямої $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{-4}=\frac{z-2}{3}$.

ВАРІАНТ 6.

1. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку$M(1,0,-1)$ паралельно прямій
$$\begin{cases} 2x+y+z+3=0, \\ x+2y-z+1=0. \end{cases}$$
2. Із початку координат провести перпендикуляр до прямої
$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-7}{2}.$$
3. Із точки $M(-22,10,-6)$ опустити перпендикуляр на площину $11x-5y+4z-8=0$.
4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(-1,2,-1)$ і паралельна до прямих $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z+1}{-1}$, $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-4}$.
5. Знайти відстань від точки $P(2,2,2)$ до прямої $\frac{x+2}{3}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z+2}{4}$.

ВАРІАНТ 7.

1. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(1,-2,-2)$ паралельно прямій

$$\begin{cases} 2x+z-2=0, \\ 2x-y-2z-1=0. \end{cases}$$

2. Із початку координат провести перпендикуляр до прямої

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+5}{-3}=\frac{z+6}{-2}.$$

3. Із точки $M(-5,-5,3)$ опустити перпендикуляр на площину $3x+2y-z=0$.

4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(0,1,-2)$ і паралельна до прямих $\frac{x+1}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{3}$, $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z}{3}$.

5. Знайти відстань від точки $P(-1,-2,-1)$ до прямої $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-1}$.

ВАРІАНТ 8.

1. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(0,2,0)$ паралельно прямій

$$\begin{cases} 2x-2y-z-2=0, \\ x+y-2z-1=0. \end{cases}$$

2. Із початку координат провести перпендикуляр до прямої

$$\frac{x-13}{4}=\frac{y+7}{-3}=\frac{z+5}{-1}.$$

3. Із точки $M(2,6,-11)$ опустити перпендикуляр на площину $x+4y-5z+3=0$.

4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(2,2,1)$ і паралельна до прямих $\frac{x+2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{2}$, $\frac{x+2}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-2}$.

5. Знайти відстань від точки $P(-2,1,-1)$ до прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-2}=\frac{z+2}{-4}$.

ВАРІАНТ 9.

1. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку $M(0,0,-1)$ паралельно прямій

$$\begin{cases} 2x+y-z+1=0, \\ 2x+z-5=0. \end{cases}$$

2. Із початку координат провести перпендикуляр до прямої

$$\frac{x}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+9}{-4}.$$

3. Із точки $M(-3,0,11)$ опустити перпендикуляр на площину $x-y-5z+4=0$.

4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(1,2,-2)$ і паралельна до прямих $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z-1}{-1}$, $\frac{x+2}{4}=\frac{y-2}{-3}=\frac{z+1}{1}$.

5. Знайти відстань від точки $P(-1,2,1)$ до прямої $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{3}$.

ВАРІАНТ 10.

1. Скласти канонічне рівняння прямої, що проходить через точку$M(-1,-2,2)$ паралельно прямій

$$\begin{cases} 2x+y+z-3=0, \\ x-y+5=0. \end{cases}$$

2. Із початку координат провести перпендикуляр до прямої

$$\frac{x-13}{4}=\frac{y+5}{-1}=\frac{z-7}{3}.$$

3. Із точки $M(7,-17,3)$ опустити перпендикуляр на площину $3x-8y+z-12=0$.

4. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $P(2,0,0)$ і паралельна до прямих $\frac{x-2}{3}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+2}{-1}$, $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-2}$.

5. Знайти відстань від точки $P(0,-1,1)$ до прямої $\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{-1}$.

Література

1. *Андрійчук В. І., Забавський Б. В.* Лінійна алгебра. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008.
2. *Безущак О. О., Ганющкін О. Г.* Завдання для практичних занять з лінійної алгебри (векторні простори) для студентів університетів. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010, 257 с.
3. *Булдигін В. В., Алєксєєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б.* Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Навчальний посібник. – Київ: ТВіМС, 2011, 224 с.
4. *Власенко К. В.* Вища математика. Векторна алгебра й аналітична геометрія. Навчальний посібник до практичних занять та самостійної роботи. – Краматорськ: ДДМА, 2009, 80 с.
5. *Кадильникова Т. М., Кочєткова І. Б., Сушко Л. Ф., Білова О. В.* Аналітична геометрія у просторі. Навчальний посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012, 48 с.
6. *Кодубовський О. А., Кодубовська О. Л., Плесканьова Л. Г.* Аналітична геометрія. Частина 1. Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині та в просторі. Навчальний посібник. – Словянськ, 2010, 84 с.
7. *Панасенко О. Б.* Лекції з лінійної алгебри. – Вінниця: ТОВ "Нілан-ЛТД", 2015, 222 с.
8. *Стороженко І. П.* Вища математика. Навчальний посібник в двох частинах. Частина 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. – Харків, 2019, 80 с.
9. *Шапочка І. В.* Лінійна алгебра. Навчальний посібник для індивідуальних робіт. – Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2020, 95 с.
10. *Яременко Ю. В., Лутченко Л. І.* Аналітична геометрія. ч.2. Навчально-методичний посібник. – Кіровоград: "Антураж А", 2005, 116 с.

ТИЛИЩАК Олександр Андрійович, ЮРЧЕНКО Наталія Василівна

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ

З АЛГЕБРИ

ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Частина 1