Міністерство освіти і науки України
Державний вищий навчальний заклад
"Ужгородський національний університет"

Бортош М. Ю., Тилищак О. А.,
Юрченко Н. В.

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ
З АЛГЕБРИ
ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ
Частина 2

Ужгород — 2021

Збірник завдань з алгебри та аналітичної геометрії Частина 2 / Бортош М. Ю., Тилищак О. А., Юрченко Н. В. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т., 2021. – 61 с.

Відповідальний за випуск: завідувач кафедри алгебри ДВНЗ "УжНУ"Шапочка І.В.

Рецензент: Брила А.Ю., кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рекомендовано до друку Науково-методичною комісією Факультету математики та цифрових технологій ДВНЗ "УжНУ", протокол №6 від 5 квітня 2021 р.

ЗМІСТ

Передмова

У збірнику завдань наведені умови завдань для самостійної роботи студентів з ряду тем лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Посібник складається з чотирнадцяти параграфів. В перших трьох параграфах завдання по тематиці лінійного простору над довільним полем та основними поняттями, пов'язаними з лінійним простором такими як: базис, матриця переходу, підпростір. В наступних трьох параграфах завдання по лінійним відображенням, способам задання лінійного відображення, поняття ядра та образа лінійного відображення, а також дії над лінійними відображеннями. В сьомому параграфі йде мова про лінійні оператори, власні вектори та власні значення лінійного оператора. А у дев'ятому та десятому параграфах увага акцентується на ортогональних та симетричних операторах евклідового простору. Серед тем є такі, що пов'язані з нормальними формами матриць,з квадратичними формами та їх канонічним видом. Останні три параграфи стосуються понять кривих другого порядку та поверхонь другого порядку, пропонуються різного типу завдання, в тому числі завдань щодо зведення їх до канонічного виду.

В межах кожного параграфу пропонуються по десять варіантів завдань для можливості індивідуальної роботи студентів.

Тема 1. Лінійний простір. Лінійна залежність векторів. Базис. Координати вектора в базисі

ВАРІАНТ 1.
Довести, що система векторів $a_1 = (-1, 1, 2, -3)$, $a_2 = (0, -2, -1, 2)$, $a_3 = (-1, 3, 0, -2)$, $a_4 = (1, -2, -1, 3)$ є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Знайти формули для координат вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ в цьому базисі. Якими є координати вектора $c = (-2, -1, 4, -5) \in \mathbb{R}^4$ в базисі a_1, a_2, a_3, a_4?

ВАРІАНТ 2.
Довести, що система векторів $a_1 = (2, -1, -2, 3)$, $a_2 = (-1, 2, 2, -2)$, $a_3 = (0, 1, -1, 1)$, $a_4 = (2, -1, 1, 1)$ є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Знайти формули для координат вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ в цьому базисі. Якими є координати вектора $c = (5, -2, 0, 4) \in \mathbb{R}^4$ в базисі a_1, a_2, a_3, a_4?

ВАРІАНТ 3.
Довести, що система векторів $a_1 = (-1, -1, 2, 2)$, $a_2 = (-2, 0, 1, 2)$, $a_3 = (-3, 3, -1, 0)$, $a_4 = (2, -2, 1, -1)$ є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Знайти формули для координат вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ в цьому базисі. Якими є координати вектора $c = (-2, 4, -2, -3) \in \mathbb{R}^4$ в базисі a_1, a_2, a_3, a_4?

ВАРІАНТ 4.
Довести, що система векторів $a_1 = (2, 1, 0, -1)$, $a_2 = (-2, -3, 0, -2)$, $a_3 = (-1, -1, -1, 2)$, $a_4 = (-1, 0, -1, 3)$ є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Знайти формули для координат вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ в цьому базисі. Якими є координати вектора $c = (4, 2, 2, -6) \in \mathbb{R}^4$ в базисі a_1, a_2, a_3, a_4?

ВАРІАНТ 5.
Довести, що система векторів $a_1 = (-2, -3, -1, 2)$, $a_2 = (-2, -1, 0, 1)$, $a_3 = (0, 0, -1, -1)$, $a_4 = (-3, -3, -3, 1)$ є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Знайти формули для координат вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ в цьому базисі. Якими є координати вектора $c = (-1, -1, 2, 2) \in \mathbb{R}^4$ в базисі a_1, a_2, a_3, a_4?

ВАРІАНТ 6.
Довести, що система векторів $a_1 = (0, -1, -1, 1)$, $a_2 = (3, -3, -2, -3)$,

$a_3 = (2, -2, -2, 1)$, $a_4 = (2, -3, -2, 0)$ є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Знайти формули для координат вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ в цьому базисі. Якими є координати вектора $c = (6, -9, -7, 2) \in \mathbb{R}^4$ в базисі a_1, a_2, a_3, a_4?

ВАРІАНТ 7.
Довести, що система векторів $a_1 = (-1, 1, -2, 2)$, $a_2 = (-1, 3, -3, -1)$, $a_3 = (-1, 0, -1, 2)$, $a_4 = (-1, 2, -2, -3)$ є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Знайти формули для координат вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ в цьому базисі. Якими є координати вектора $c = (-5, 8, -11, 4) \in \mathbb{R}^4$ в базисі a_1, a_2, a_3, a_4?

ВАРІАНТ 8.
Довести, що система векторів $a_1 = (0, -1, -1, -1)$, $a_2 = (1, 1, 0, 0)$, $a_3 = (2, 1, 1, -2)$, $a_4 = (-2, 2, 1, 3)$ є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Знайти формули для координат вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ в цьому базисі. Якими є координати вектора $c = (2, -1, -2, -1) \in \mathbb{R}^4$ в базисі a_1, a_2, a_3, a_4?

ВАРІАНТ 9.
Довести, що система векторів $a_1 = (0, -1, 1, -2)$, $a_2 = (0, 0, 2, -2)$, $a_3 = (-2, 1, 1, 1)$, $a_4 = (-1, 2, 2, 1)$ є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Знайти формули для координат вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ в цьому базисі. Якими є координати вектора $c = (-3, 1, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$ в базисі a_1, a_2, a_3, a_4?

ВАРІАНТ 10.
Довести, що система векторів $a_1 = (-2, -1, 1, 1)$, $a_2 = (2, -1, -2, -3)$, $a_3 = (3, 3, -2, 0)$, $a_4 = (0, 0, -1, -1)$ є базисом векторного простору $\mathbb{R}^4$ над полем дійсних чисел $\mathbb{R}$. Знайти формули для координат вектора $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ в цьому базисі. Якими є координати вектора $c = (-6, -1, 2, 3) \in \mathbb{R}^4$ в базисі a_1, a_2, a_3, a_4?

Тема 2. Зв'язок координат вектора в різних базисах. Матриця переходу від одного базиса до іншого. Формули перетворення координат

ВАРІАНТ 1.
Довести, що системи векторів $a_1 = (-2,-3,-1)$, $a_2 = (-3,1,1)$, $a_3 = (0,-2,-1)$ та $b_1 = (-2,4,2)$, $b_2 = (-4,1,1)$, $b_3 = (-1,-7,-3)$ є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (5,-12,-6)$ в обох базисах і потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

ВАРІАНТ 2.
Довести, що системи векторів $a_1 = (1,2,-1)$, $a_2 = (-1,-1,1)$, $a_3 = (2,1,-1)$ та $b_1 = (-2,0,1)$, $b_2 = (4,3,-3)$, $b_3 = (-4,-1,2)$ є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (-10,-4,6)$ в обох базисах і потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

ВАРІАНТ 3.
Довести, що системи векторів $a_1 = (2,3,1)$, $a_2 = (-1,-1,-1)$, $a_3 = (-2,-3,-2)$ та $b_1 = (-2,-2,-1)$, $b_2 = (-6,-8,-4)$, $b_3 = (-1,-1,0)$ є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (-7,-9,-5)$ в обох базисах і потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

ВАРІАНТ 4.
Довести, що системи векторів $a_1 = (-1,2,-1)$, $a_2 = (-1,2,0)$, $a_3 = (1,-1,3)$ та $b_1 = (-4,6,-8)$, $b_2 = (5,-9,5)$, $b_3 = (-3,5,-4)$ є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (-2,2,-7)$ в обох базисах і потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

ВАРІАНТ 5.
Довести, що системи векторів $a_1 = (3,-2,-1)$, $a_2 = (-2,2,1)$, $a_3 = (-2,-3,-1)$ та $b_1 = (-4,-1,0)$, $b_2 = (1,3,1)$, $b_3 = (3,3,1)$ є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (0,5,2)$ в обох базисах і потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

ВАРІАНТ 6.
Довести, що системи векторів $a_1 = (-1,0,2)$, $a_2 = (2,2,-1)$, $a_3 = (2,3,1)$ та $b_1 = (1,1,0)$, $b_2 = (-1,-1,1)$, $b_3 = (1,2,2)$ є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (1,2,1)$ в обох базисах і потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

ВАРІАНТ 7.
Довести, що системи векторів $a_1 = (1,1,-1)$, $a_2 = (2,1,-1)$, $a_3 = (-1,-2,3)$ та $b_1 = (-4,-3,4)$, $b_2 = (4,4,-5)$, $b_3 = (5,5,-6)$ є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (-3,-2,3)$ в обох базисах і потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

ВАРІАНТ 8.
Довести, що системи векторів $a_1 = (1,-3,2)$, $a_2 = (3,-3,-1)$, $a_3 = (0,-1,1)$ та $b_1 = (3,-2,-2)$, $b_2 = (-4,8,-3)$, $b_3 = (2,2,-5)$ є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (-1,-8,10)$ в обох базисах і потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

ВАРІАНТ 9.
Довести, що системи векторів $a_1 = (2,3,3)$, $a_2 = (2,2,1)$, $a_3 = (-1,-2,-3)$ та $b_1 = (6,6,2)$, $b_2 = (0,-2,-5)$, $b_3 = (5,6,4)$ є базиса-

ми векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (-1, -2, -3)$ в обох базисах і потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

ВАРІАНТ 10.

Довести, що системи векторів $a_1 = (-1, -2, 0)$, $a_2 = (-2, -3, 2)$, $a_3 = (1, 3, 1)$ та $b_1 = (1, 1, -2)$, $b_2 = (1, 2, -1)$, $b_3 = (2, 4, -1)$ є базисами векторного простору $\mathbb{R}^3$. Знайти матрицю переходу та формули перетворення координат при переході від першого до другого базису. Знайти безпосередньо координати вектора $c = (4, 7, -4)$ в обох базисах і потім перевірити одержаний результат за допомогою формул перетворення координат.

Тема 3. Підпростори лінійного простору. Дії над підпросторами

ВАРІАНТ 1.
Знайти розмірності й базиси суми L_1+L_2, а також перетину $L_1\cap L_2$ лінійних підпросторів L_1 та L_2 простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1-2x_2-2x_3+2x_4+6x_5=0,\\ 2x_1-3x_2-x_3-4x_4+2x_5=0,\\ x_1-2x_2-2x_3-x_4+3x_5=0,\\ -5x_2-3x_3-2x_4+8x_5=0 \end{cases}$$

а $L_2=\langle a_1,a_2\rangle$ — лінійна оболонка, натягнута на систему векторів $a_1=(1,-1,0,1,1)$, $a_2=(2,0,3,1,0)$.

ВАРІАНТ 2.
Знайти розмірності й базиси суми L_1+L_2, а також перетину $L_1\cap L_2$ лінійних підпросторів L_1 та L_2 простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+x_3-4x_4+x_5=0,\\ -x_1+x_2+x_3-3x_4=0,\\ 3x_1-2x_2+2x_3+3x_4-4x_5=0,\\ -2x_1+3x_2+2x_3-7x_4+x_5=0 \end{cases}$$

а $L_2=\langle a_1,a_2\rangle$ — лінійна оболонка, натягнута на систему векторів $a_1=(-1,0,1,-1,1)$, $a_2=(2,-6,0,-6,4)$.

ВАРІАНТ 3.
Знайти розмірності й базиси суми L_1+L_2, а також перетину $L_1\cap L_2$ лінійних підпросторів L_1 та L_2 простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -x_1+x_2-3x_3-2x_4-3x_5=0,\\ -x_1-3x_2-x_3-5x_5=0,\\ x_1-3x_2+2x_3+x_4=0,\\ -x_1-5x_2-2x_3-x_4-8x_5=0 \end{cases}$$

а $L_2=\langle a_1,a_2\rangle$ — лінійна оболонка, натягнута на систему векторів $a_1=(-1,0,1,1,-1)$, $a_2=(8,2,-4,2,0)$.

ВАРІАНТ 4.
Знайти розмірності й базиси суми L_1+L_2, а також перетину $L_1\cap L_2$

лінійних підпросторів L_1 та L_2 простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 - 6x_5 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 5x_5 = 0 \end{cases}$$

а $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ — лінійна оболонка, натягнута на систему векторів $a_1 = (-1, 0, -1, -1, 1)$, $a_2 = (-1, -2, -3, -2, 0)$.

ВАРІАНТ 5.

Знайти розмірності й базиси суми $L_1 + L_2$, а також перетину $L_1 \cap L_2$ лінійних підпросторів L_1 та L_2 простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

а $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ — лінійна оболонка, натягнута на систему векторів $a_1 = (-1, -1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (-4, 4, -4, 0, 6)$.

ВАРІАНТ 6.

Знайти розмірності й базиси суми $L_1 + L_2$, а також перетину $L_1 \cap L_2$ лінійних підпросторів L_1 та L_2 простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 - 3x_5 = 0, \\ -x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 5x_5 = 0, \\ -4x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - 7x_5 = 0 \end{cases}$$

а $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ — лінійна оболонка, натягнута на систему векторів $a_1 = (-1, 1, -1, -1, 0)$, $a_2 = (-2, 4, -4, 1, -1)$.

ВАРІАНТ 7.

Знайти розмірності й базиси суми $L_1 + L_2$, а також перетину $L_1 \cap L_2$ лінійних підпросторів L_1 та L_2 простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 3x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 9x_4 + 6x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 9x_4 + 8x_5 = 0 \end{cases}$$

а $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ — лінійна оболонка, натягнута на систему векторів $a_1 = (-1, 1, 1, 0, 1)$, $a_2 = (-2, 0, -4, -1, 1)$.

ВАРІАНТ 8.

Знайти розмірності й базиси суми $L_1 + L_2$, а також перетину $L_1 \cap L_2$ лінійних підпросторів L_1 та L_2 простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 - 4x_5 = 0, \\ -x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_2 + x_3 - 2x_5 = 0 \end{cases}$$

а $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ — лінійна оболонка, натягнута на систему векторів $a_1 = (-1, -1, 1, 0, -1)$, $a_2 = (-4, 2, 2, -2, 0)$.

ВАРІАНТ 9.

Знайти розмірності й базиси суми $L_1 + L_2$, а також перетину $L_1 \cap L_2$ лінійних підпросторів L_1 та L_2 простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 - 6x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

а $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ — лінійна оболонка, натягнута на систему векторів $a_1 = (1, -1, 0, 1, -1)$, $a_2 = (-2, -2, -2, -4, 4)$.

ВАРІАНТ 10.

Знайти розмірності й базиси суми $L_1 + L_2$, а також перетину $L_1 \cap L_2$ лінійних підпросторів L_1 та L_2 простору $\mathbb{R}^5$, де L_1 — простір розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 6x_4 + 3x_5 = 0, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0, \\ -2x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

а $L_2 = \langle a_1, a_2 \rangle$ — лінійна оболонка, натягнута на систему векторів $a_1 = (-1, 1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (-2, -2, -6, -2, -2)$.

Тема 4. Лінійні відображення лінійних просторів. Ядро та образ лінійного відображення

ВАРІАНТ 1.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожен вектор $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ переводить у вектор $\varphi(x)=(-x_1+x_2-2x_3, -2x_1-2x_2-2x_3, -x_1-2x_2-x_3)\in\mathbb{R}^3$. Довести, що φ є лінійним оператором. Знайти формули для координат образу вектора у канонічному базисі e_1, e_2, e_3 простору $\mathbb{R}^3$; образи векторів $a = (1, 1, 1)$, e_1, e_2, e_3 та матрицю оператора φ у цьому ж базисі.

ВАРІАНТ 2.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожен вектор $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ переводить у вектор $\varphi(x)=(-x_1-2x_2-x_3, -x_1-2x_2-2x_3, -x_1+x_2) \in \mathbb{R}^3$. Довести, що φ є лінійним оператором. Знайти формули для координат образу вектора у канонічному базисі e_1, e_2, e_3 простору $\mathbb{R}^3$; образи векторів $a = (0, 1, -1)$, e_1, e_2, e_3 та матрицю оператора φ у цьому ж базисі.

ВАРІАНТ 3.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожен вектор $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ переводить у вектор $\varphi(x)=(x_1 + x_2 - x_3, -x_2 - 2x_3, x_1 + x_2 - 2x_3) \in \mathbb{R}^3$. Довести, що φ є лінійним оператором. Знайти формули для координат образу вектора у канонічному базисі e_1, e_2, e_3 простору $\mathbb{R}^3$; образи векторів $a = (1, -1, -1)$, e_1, e_2, e_3 та матрицю оператора φ у цьому ж базисі.

ВАРІАНТ 4.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожен вектор $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ переводить у вектор $\varphi(x) = (2x_2 + 2x_3, 2x_1 - x_2, 2x_1 - 2x_2 + x_3) \in \mathbb{R}^3$. Довести, що φ є лінійним оператором. Знайти формули для координат образу вектора у канонічному базисі e_1, e_2, e_3 простору $\mathbb{R}^3$; образи векторів $a = (-1, -1, 1)$, e_1, e_2, e_3 та матрицю оператора φ у цьому ж базисі.

ВАРІАНТ 5.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожен вектор $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ переводить у вектор $\varphi(x) = (-2x_1 + x_2, -x_1 + x_2 - x_3, -2x_1 + x_2 - 2x_3) \in \mathbb{R}^3$. Довести, що φ є лінійним оператором. Знайти формули для координат образу вектора у канонічному базисі e_1, e_2, e_3 простору $\mathbb{R}^3$; образи векторів $a = (0, -1, -1)$, e_1, e_2, e_3 та матрицю оператора φ у цьому ж базисі.

ВАРІАНТ 6.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожен вектор $x=(x_1,\, x_2,\, x_3)\in\mathbb{R}^3$ переводить у вектор $\varphi(x)=(-2x_1+2x_2-2x_3, 2x_1, -x_1-2x_2+x_3)\in\mathbb{R}^3$. Довести, що φ є лінійним оператором. Знайти формули для координат образу вектора у канонічному базисі $e_1,\, e_2,\, e_3$ простору $\mathbb{R}^3$; образи векторів $a = (1, 1, 0)$, $e_1,\, e_2,\, e_3$ та матрицю оператора φ у цьому ж базисі.

ВАРІАНТ 7.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожен вектор $x=(x_1,\, x_2,\, x_3)\in\mathbb{R}^3$ переводить у вектор $\varphi(x)=(2x_1+x_2-x_3, 2x_1+2x_2-2x_3, x_2-2x_3)\in\mathbb{R}^3$. Довести, що φ є лінійним оператором. Знайти формули для координат образу вектора у канонічному базисі $e_1,\, e_2,\, e_3$ простору $\mathbb{R}^3$; образи векторів $a = (1, 0, 1)$, $e_1,\, e_2,\, e_3$ та матрицю оператора φ у цьому ж базисі.

ВАРІАНТ 8.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожен вектор $x=(x_1,\, x_2,\, x_3) \in \mathbb{R}^3$ переводить у вектор $\varphi(x)=(-x_2, -x_1-2x_2+2x_3, -2x_1-2x_2-2x_3)\in\mathbb{R}^3$. Довести, що φ є лінійним оператором. Знайти формули для координат образу вектора у канонічному базисі $e_1,\, e_2,\, e_3$ простору $\mathbb{R}^3$; образи векторів $a = (-1, 0, -1)$, $e_1,\, e_2,\, e_3$ та матрицю оператора φ у цьому ж базисі.

ВАРІАНТ 9.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожен вектор $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ переводить у вектор $\varphi(x) = (-x_1 - 2x_2 + 2x_3, -2x_1 - x_2 - x_3, x_2 - 2x_3) \in \mathbb{R}^3$. Довести, що φ є лінійним оператором. Знайти формули для координат образу вектора у канонічному базисі $e_1,\, e_2,\, e_3$ простору $\mathbb{R}^3$; образи векторів $a=(1, 0, 1), e_1, e_2, e_3$ та матрицю оператора φ у цьому ж базисі.

ВАРІАНТ 10.
Відображення $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ кожен вектор $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ переводить у вектор $\varphi(x)=(-2x_1-x_2-x_3, -x_1+2x_2-x_3, -x_1+2x_2+x_3)\in\mathbb{R}^3$. Довести,що$\varphi$є лінійним оператором. Знайти формули для координат образу вектора у канонічному базисі $e_1,\, e_2,\, e_3$ простору $\mathbb{R}^3$; образи векторів $a=(1, 0, 1), e_1, e_2, e_3$ та матрицю оператора φ у цьому ж базисі.

Індивідуальна робота №5

ВАРІАНТ 1.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 7 & -2 & 7 \\ -2 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти базиси і розмірності підпросторів $\operatorname{Im}\varphi$ та $\operatorname{Ker}\varphi$. Переконатися у тому, що $\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$.

ВАРІАНТ 2.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 & -4 \\ -5 & 2 & 10 & -2 \\ 6 & -2 & 3 & -4 \\ 5 & -1 & 10 & -7 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти базиси і розмірності підпросторів $\operatorname{Im}\varphi$ та $\operatorname{Ker}\varphi$. Переконатися у тому, що $\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$.

ВАРІАНТ 3.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 17 & -13 & 1 & -3 \\ 18 & -14 & 1 & -3 \\ -18 & 3 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти базиси і розмірності підпросторів $\operatorname{Im}\varphi$ та $\operatorname{Ker}\varphi$. Переконатися у тому, що $\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$.

ВАРІАНТ 4.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 4 \\ -4 & -1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти базиси і розмірності підпросторів $\operatorname{Im}\varphi$ та $\operatorname{Ker}\varphi$. Переконатися у тому, що $\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$.

ВАРІАНТ 5.

Нехай $A = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 11 & -1 \\ 6 & -6 & -12 & 3 \\ -4 & 5 & 11 & -1 \\ 6 & -6 & -12 & 3 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти базиси і розмірності підпросторів $\mathrm{Im}\,\varphi$ та $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Переконатися у тому, що $\dim\mathrm{Im}\,\varphi + \dim\mathrm{Ker}\,\varphi = \dim\mathbb{R}^4$.

ВАРІАНТ 6.

Нехай $A = \begin{pmatrix} -8 & 1 & -9 & 4 \\ -2 & 1 & -3 & 2 \\ 10 & -2 & 12 & -6 \\ 9 & -3 & 12 & -7 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти базиси і розмірності підпросторів $\mathrm{Im}\,\varphi$ та $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Переконатися у тому, що $\dim\mathrm{Im}\,\varphi + \dim\mathrm{Ker}\,\varphi = \dim\mathbb{R}^4$.

ВАРІАНТ 7.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -2 \\ 11 & -4 & 7 & -8 \\ -7 & 3 & -4 & 6 \\ -8 & 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти базиси і розмірності підпросторів $\mathrm{Im}\,\varphi$ та $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Переконатися у тому, що $\dim\mathrm{Im}\,\varphi + \dim\mathrm{Ker}\,\varphi = \dim\mathbb{R}^4$.

ВАРІАНТ 8.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 11 & 4 \\ -5 & -1 & -8 & -3 \\ -5 & -1 & -8 & -3 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти базиси і розмірності підпросторів $\mathrm{Im}\,\varphi$ та $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Переконатися у тому, що $\dim\mathrm{Im}\,\varphi + \dim\mathrm{Ker}\,\varphi = \dim\mathbb{R}^4$.

ВАРІАНТ 9.

Нехай $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & 4 \\ -2 & -5 & 2 & -6 \\ 1 & 6 & -2 & 7 \\ 2 & 8 & -2 & 9 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти базиси і розмірності підпросторів $\mathrm{Im}\,\varphi$ та $\mathrm{Ker}\,\varphi$. Переконатися у тому, що $\dim\mathrm{Im}\,\varphi + \dim\mathrm{Ker}\,\varphi = \dim\mathbb{R}^4$.

ВАРІАНТ 10.

Нехай $A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 & -9 \\ 1 & 3 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у базисі c_1, c_2, c_3, c_4. Знайти базиси і розмірності підпросторів $\operatorname{Im}\varphi$ та $\operatorname{Ker}\varphi$. Переконатися у тому, що $\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim \mathbb{R}^4$.

Тема 5. Матриця лінійного відображення. Зміна матриці лінійного відображення при заміні базисів

ВАРІАНТ 1.
Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що переводить вектори базису $a_1 = (2, 3, 1)$, $a_2 = (-2, 1, 1)$, $a_3 = (-2, 2, 1)$ цього простору відповідно у вектори $b_1 = (-6, 4, 3)$, $b_2 = (6, -5, -3)$, $b_3 = (-2, -6, -3)$. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

ВАРІАНТ 2.
Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що переводить вектори базису $a_1 = (-1, 0, 1)$, $a_2 = (1, -1, 2)$, $a_3 = (-2, 1, 0)$ цього простору відповідно у вектори $b_1 = (-1, -1, 4)$, $b_2 = (-2, 1, -2)$, $b_3 = (-2, 2, -3)$. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

ВАРІАНТ 3.
Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що переводить вектори базису $a_1 = (2, 0, 3)$, $a_2 = (2, -1, 3)$, $a_3 = (1, 3, 3)$ цього простору відповідно у вектори $b_1 = (0, -7, -3)$, $b_2 = (-7, 5, -9)$, $b_3 = (5, 2, 9)$. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

ВАРІАНТ 4.
Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що переводить вектори базису $a_1 = (-1, 0, 3)$, $a_2 = (1, 3, -2)$, $a_3 = (0, 1, 3)$ цього простору відповідно у вектори $b_1 = (-1, -2, -3)$, $b_2 = (1, -2, -9)$, $b_3 = (0, -2, 2)$. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

ВАРІАНТ 5.
Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що переводить вектори базису $a_1 = (2, 1, -2)$, $a_2 = (-2, 1, -1)$, $a_3 = (0, 0, 1)$ цього простору відповідно у вектори $b_1 = (4, -2, 4)$, $b_2 = (6, 1, -2)$, $b_3 = (6, -1, 0)$. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

ВАРІАНТ 6.
Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що переводить вектори базису $a_1 = (-2, 2, 0)$, $a_2 = (2, -1, 2)$, $a_3 = (-1, 1, -2)$ цього простору відповідно у вектори $b_1 = (5, -3, 6)$, $b_2 = (1, -3, -2)$, $b_3 = (-7, 5, -2)$. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

ВАРІАНТ 7.

Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що переводить вектори базису $a_1=(-1,2,1)$, $a_2=(3,-2,-2)$, $a_3=(0,2,2)$ цього простору відповідно у вектори $b_1=(8,-4,-2)$, $b_2=(2,0,2)$, $b_3=(4,-4,-3)$. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

ВАРІАНТ 8.
Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що переводить вектори базису $a_1=(1,0,1)$, $a_2=(3,-2,2)$, $a_3=(-2,0,2)$ цього простору відповідно у вектори $b_1=(-3,2,-6)$, $b_2=(7,-2,2)$, $b_3=(1,-4,7)$. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

ВАРІАНТ 9.
Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що переводить вектори базису $a_1=(1,3,1)$, $a_2=(1,2,-2)$, $a_3=(0,-1,-2)$ цього простору відповідно у вектори $b_1=(-1,1,9)$, $b_2=(2,8,6)$, $b_3=(-1,-1,3)$. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

ВАРІАНТ 10.
Побудувати лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ такий, що переводить вектори базису $a_1=(0,1,-1)$, $a_2=(0,3,-1)$, $a_3=(1,-1,3)$ цього простору відповідно у вектори $b_1=(-2,3,-5)$, $b_2=(-2,7,-9)$, $b_3=(2,2,4)$. Знайти матрицю оператора φ у базисі a_1, a_2, a_3.

Тема 6. Дії над лінійними відображеннями

ВАРІАНТ 1.
Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ переводить вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ у вектор
$\varphi(x) = (x_2 + x_3, -x_1 - 2x_3, -2x_1 - 2x_2 - 2x_3)$,

$$A_\psi = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

— матриця лінійного оператора ψ цього ж простору у базисі
$a_1 = (2, -1, 0)$, $a_2 = (1, 1, -2)$, $a_3 = (2, 1, -2)$. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів φ, ψ, $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

ВАРІАНТ 2.
Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ переводить вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ у вектор
$\varphi(x) = (2x_2 + 2x_3, -2x_1 + 2x_2 + x_3, -2x_1 + x_2)$,

$$A_\psi = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

— матриця лінійного оператора ψ цього ж простору у базисі
$a_1 = (3, 1, 1)$, $a_2 = (2, 0, 0)$, $a_3 = (3, 2, 1)$. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів φ, ψ, $\varphi+\psi$, $\varphi-\psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

ВАРІАНТ 3.
Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ переводить вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ у вектор
$\varphi(x) = (-x_1 - 2x_2 - 2x_3, 2x_1, -x_1 + 2x_2 + 2x_3)$,

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

— матриця лінійного оператора ψ цього ж простору у базисі
$a_1 = (1, -1, 1)$, $a_2 = (3, -1, 2)$, $a_3 = (-2, 1, -1)$. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів φ, ψ, $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

ВАРІАНТ 4.
Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ переводить вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ у вектор
$\varphi(x) = (-x_1 + x_2 - x_3, -2x_1 - x_2 - x_3, -2x_2 - 2x_3)$,

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

— матриця лінійного оператора ψ цього ж простору у базисі
$a_1 = (2, 2, 3)$, $a_2 = (-1, -1, -2)$, $a_3 = (0, 1, 0)$. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів φ, ψ, $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

ВАРІАНТ 5.
Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ переводить вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ у вектор
$\varphi(x) = (-x_2 - 2x_3, -x_1 + 2x_2 - x_3, 2x_2 + x_3)$,

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

— матриця лінійного оператора ψ цього ж простору у базисі
$a_1 = (1, 2, -2)$, $a_2 = (1, 2, -1)$, $a_3 = (0, 1, -1)$. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів φ, ψ, $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

ВАРІАНТ 6.
Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ переводить вектор $x = (x_1, x_2, x_3)$ у вектор
$\varphi(x) = (2x_1 + 2x_3, -2x_1 - 2x_2 + 2x_3, -x_2 + x_3)$,

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -4 & 4 & -2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

— матриця лінійного оператора ψ цього ж простору у базисі
$a_1 = (-1, -2, 3)$, $a_2 = (2, 2, -2)$, $a_3 = (1, 1, 0)$. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів φ, ψ, $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

ВАРІАНТ 7.
Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ переводить вектор $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ у вектор
$\varphi(x) = (x_1 - x_2 - 2x_3, x_1 + x_2 - 2x_3, 2x_2 - x_3)$,

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & -4 \\ -4 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

— матриця лінійного оператора ψ цього ж простору у базисі
$a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (-1, 0, 1)$, $a_3 = (-2, -1, 1)$. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів φ, ψ, $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

ВАРІАНТ 8.
Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ переводить вектор $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ у вектор
$\varphi(x) = (-2x_1 - 2x_2 - x_3, x_1 + 2x_2, x_1 - x_2)$,

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

— матриця лінійного оператора ψ цього ж простору у базисі
$a_1 = (-2, 1, 0)$, $a_2 = (-1, 2, 1)$, $a_3 = (-2, 3, 2)$. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів φ, ψ, $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

ВАРІАНТ 9.
Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ переводить вектор $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ у вектор
$\varphi(x) = (-x_2 + 2x_3, -2x_1 + x_2 - x_3, 2x_1 - x_2)$,

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

— матриця лінійного оператора ψ цього ж простору у базисі
$a_1 = (-1, 1, -1)$, $a_2 = (3, -2, -2)$, $a_3 = (3, -2, -1)$. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів φ, ψ, $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

ВАРІАНТ 10.
Нехай лінійний оператор φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ переводить вектор $x = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ у вектор
$\varphi(x) = (x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_3, 2x_1 - 2x_2 + 2x_3)$,

$$A_\psi = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

— матриця лінійного оператора ψ цього ж простору у базисі
$a_1 = (1, 3, 2),\ a_2 = (2, 2, 3),\ a_3 = (-1, 0, -1)$. Знайти у канонічному базисі простору $\mathbb{R}^3$ матриці лінійних операторів φ, ψ, $\varphi + \psi$, $\varphi - \psi$, $\varphi\psi$, $\psi\varphi$.

Тема 7. Характеристичний многочлен. Власні вектори та власні значення лінійного оператора

ВАРІАНТ 1.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & -5 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & -2 & -8 & 0 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Знайти в цьому ж базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися в тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори лінійного оператора φ.

ВАРІАНТ 2.

Нехай $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 0 \\ -7 & -5 & -3 & 0 \\ -8 & -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Знайти в цьому ж базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися в тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори лінійного оператора φ.

ВАРІАНТ 3.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 7 & 0 \\ 4 & 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Знайти в цьому ж базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися в тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори лінійного оператора φ.

ВАРІАНТ 4.

Нехай $A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -3 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Знайти в цьому ж базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися в тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори лінійного оператора φ.

ВАРІАНТ 5.

Нехай $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -5 & -4 \\ 3 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Знайти в цьому ж базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися в тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори лінійного оператора φ.

ВАРІАНТ 6.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & -2 & -2 & 0 \\ 7 & 2 & -5 & 1 \\ -6 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Знайти в цьому ж базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися в тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори лінійного оператора φ.

ВАРІАНТ 7.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & 4 & -1 \\ 3 & 4 & 7 & -4 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Знайти в цьому ж базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися в тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори лінійного оператора φ.

ВАРІАНТ 8.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & -3 & 2 \\ 4 & -8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Знайти в цьому ж базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися в тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори лінійного оператора φ.

ВАРІАНТ 9.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ

векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Знайти в цьому ж базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися в тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори лінійного оператора φ.

ВАРІАНТ 10.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -3 & 6 \\ -2 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Знайти в цьому ж базисі матриці лінійних операторів φ^2, φ^3, φ^4 і переконатися в тому, що $f(\varphi) = 0$, де f — характеристичний многочлен оператора φ. Знайти всі власні значення і власні вектори лінійного оператора φ.

Індивідуальна робота №9

ВАРІАНТ 1.

Нехай
$$A_1 = \begin{pmatrix} -6 & -6 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 9 & 6 & 7 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} -7 & -3 & -3 \\ 9 & 5 & 3 \\ 9 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -4 & 5 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$
— матриці відповідно лінійних операторів φ_1, φ_2 та φ_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі. Довести, що простор $\mathbb{R}^3$ має два базиси, кожен з яких складається з власних векторів відповідно операторів φ_1 і φ_2. Знайти ці базиси і матриці відповідних операторів у цих базисах. Довести, що в просторі $\mathbb{R}^3$ не існує базису, який би складався з власних векторів оператора φ_3.

ВАРІАНТ 2.

Нехай
$$A_1 = \begin{pmatrix} -5 & -4 & -2 \\ 3 & 3 & 1 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$
— матриці відповідно лінійних операторів φ_1, φ_2 та φ_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі. Довести, що простор $\mathbb{R}^3$ має два

базиси, кожен з яких складається з власних векторів відповідно операторів φ_1 і φ_2. Знайти ці базиси і матриці відповідних операторів у цих базисах. Довести, що в просторі $\mathbb{R}^3$ не існує базису, який би складався з власних векторів оператора φ_3.

ВАРІАНТ 3.

Нехай
$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 8 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & -4 & -2 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -9 & 6 & 3 \\ -8 & 6 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$
— матриці відповідно лінійних операторів φ_1, φ_2 та φ_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі. Довести, що простор $\mathbb{R}^3$ має два базиси, кожен з яких складається з власних векторів відповідно операторів φ_1 і φ_2. Знайти ці базиси і матриці відповідних операторів у цих базисах. Довести, що в просторі $\mathbb{R}^3$ не існує базису, який би складався з власних векторів оператора φ_3.

ВАРІАНТ 4.

Нехай
$$A_1 = \begin{pmatrix} -7 & -8 & 8 \\ 2 & 3 & -2 \\ -4 & -4 & 5 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 2 & -4 & -5 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 8 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$
— матриці відповідно лінійних операторів φ_1, φ_2 та φ_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі. Довести, що простор $\mathbb{R}^3$ має два базиси, кожен з яких складається з власних векторів відповідно операторів φ_1 і φ_2. Знайти ці базиси і матриці відповідних операторів у цих базисах. Довести, що в просторі $\mathbb{R}^3$ не існує базису, який би складався з власних векторів оператора φ_3.

ВАРІАНТ 5.

Нехай
$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 2 \\ -8 & -9 & -2 \\ 8 & 9 & 2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -7 & 6 \\ 3 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

— матриці відповідно лінійних операторів φ_1, φ_2 та φ_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі. Довести, що простор $\mathbb{R}^3$ має два базиси, кожен з яких складається з власних векторів відповідно операторів φ_1 і φ_2. Знайти ці базиси і матриці відповідних операторів у цих базисах. Довести, що в просторі $\mathbb{R}^3$ не існує базису, який би складався з власних векторів оператора φ_3.

ВАРІАНТ 6.

Нехай
$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -2 \\ 8 & -2 & -4 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 9 \\ -1 & -1 & 3 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -8 & -7 \\ 1 & -6 & -5 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

— матриці відповідно лінійних операторів φ_1, φ_2 та φ_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі. Довести, що простор $\mathbb{R}^3$ має два базиси, кожен з яких складається з власних векторів відповідно операторів φ_1 і φ_2. Знайти ці базиси і матриці відповідних операторів у цих базисах. Довести, що в просторі $\mathbb{R}^3$ не існує базису, який би складався з власних векторів оператора φ_3.

ВАРІАНТ 7.

Нехай
$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ -2 & -4 & -8 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \; A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ -3 & 1 & -6 \\ -4 & -2 & -4 \end{pmatrix}$$

— матриці відповідно лінійних операторів φ_1, φ_2 та φ_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі. Довести, що простор $\mathbb{R}^3$ має два базиси, кожен з яких складається з власних векторів відповідно операторів φ_1 і φ_2. Знайти ці базиси і матриці відповідних операторів у цих базисах. Довести, що в просторі $\mathbb{R}^3$ не існує базису, який би складався з власних векторів оператора φ_3.

ВАРІАНТ 8.

Нехай
$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 4 & 7 & -1 \\ 4 & 8 & -2 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -5 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$
— матриці відповідно лінійних операторів φ_1, φ_2 та φ_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі. Довести, що простор $\mathbb{R}^3$ має два базиси, кожен з яких складається з власних векторів відповідно операторів φ_1 і φ_2. Знайти ці базиси і матриці відповідних операторів у цих базисах. Довести, що в просторі $\mathbb{R}^3$ не існує базису, який би складався з власних векторів оператора φ_3.

ВАРІАНТ 9.

Нехай
$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ -3 & -1 & 3 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -1 & 6 & 4 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$
— матриці відповідно лінійних операторів φ_1, φ_2 та φ_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі. Довести, що простор $\mathbb{R}^3$ має два базиси, кожен з яких складається з власних векторів відповідно операторів φ_1 і φ_2. Знайти ці базиси і матриці відповідних операторів у цих базисах. Довести, що в просторі $\mathbb{R}^3$ не існує базису, який би складався з власних векторів оператора φ_3.

ВАРІАНТ 10.

Нехай
$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -2 \\ -2 & 0 & -4 \\ -2 & -3 & -1 \end{pmatrix},$$
$$A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 4 \\ 4 & -1 & -4 \\ -4 & 4 & 7 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ -5 & 5 & 6 \\ 7 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$
— матриці відповідно лінійних операторів φ_1, φ_2 та φ_3 векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі. Довести, що простор $\mathbb{R}^3$ має два базиси, кожен з яких складається з власних векторів відповідно операторів φ_1 і φ_2. Знайти ці базиси і матриці відповідних операторів

у цих базисах. Довести, що в просторі $\mathbb{R}^3$ не існує базису, який би складався з власних векторів оператора φ_3.

Тема 8. Подібність матриць над полем. Нормальні форми матриць

ВАРІАНТ 1.
Знайти нормальні форми Жордана матриць
$$A_1=\begin{pmatrix}4&-4&-2\\8&-8&-4\\-4&4&2\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}1&2&2\\3&7&7\\-4&-9&-9\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}-1&-6&-1\\-1&2&-1\\3&6&3\end{pmatrix}.$$
Нехай A_3 — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Знайти який-небудь базис простору $\mathbb{R}^3$, матриця оператора φ в якому має жорданову нормальну форму.

ВАРІАНТ 2.
Знайти нормальні форми Жордана матриць
$$A_1=\begin{pmatrix}-2&2&2\\3&-3&-3\\-4&4&4\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}7&5&4\\-5&-3&-4\\-4&-4&-2\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}2&-6&3\\1&3&1\\-1&5&-2\end{pmatrix}.$$
Нехай A_3 — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Знайти який-небудь базис простору $\mathbb{R}^3$, матриця оператора φ в якому має жорданову нормальну форму.

ВАРІАНТ 3.
Знайти нормальні форми Жордана матриць
$$A_1=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&-2&1\\-4&2&-3\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}6&2&5\\-2&1&-4\\-6&-3&-4\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}0&-2&-2\\6&7&5\\-6&-5&-3\end{pmatrix}.$$
Нехай A_3 — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Знайти який-небудь базис простору $\mathbb{R}^3$, матриця оператора φ в якому має жорданову нормальну форму.

ВАРІАНТ 4.
Знайти нормальні форми Жордана матриць
$$A_1=\begin{pmatrix}-1&2&-2\\-4&5&-4\\-4&4&-3\end{pmatrix},\ A_2=\begin{pmatrix}9&-3&7\\6&-1&6\\-7&3&-5\end{pmatrix},\ A_3=\begin{pmatrix}4&-3&-5\\-4&7&9\\4&-5&-7\end{pmatrix}.$$

Нехай A_3 — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Знайти який-небудь базис простору $\mathbb{R}^3$, матриця оператора φ в якому має жорданову нормальну форму.

ВАРІАНТ 5.
Знайти нормальні форми Жордана матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & -2 \\ -2 & -1 & -4 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} -6 & 3 & -9 \\ -3 & 6 & 0 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Нехай A_3 — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Знайти який-небудь базис простору $\mathbb{R}^3$, матриця оператора φ в якому має жорданову нормальну форму.

ВАРІАНТ 6.
Знайти нормальні форми Жордана матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ -2 & -4 & -6 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 & -5 \\ -3 & 4 & 4 \\ 6 & -4 & -6 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2 \\ 7 & -4 & -5 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Нехай A_3 — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Знайти який-небудь базис простору $\mathbb{R}^3$, матриця оператора φ в якому має жорданову нормальну форму.

ВАРІАНТ 7.
Знайти нормальні форми Жордана матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -6 & -6 & 2 \\ -6 & -6 & 2 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ -3 & 3 & 8 \\ 2 & -2 & -6 \end{pmatrix}, \ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Нехай A_3 — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Знайти який-небудь базис простору $\mathbb{R}^3$, матриця оператора φ в якому має жорданову нормальну форму.

ВАРІАНТ 8.

Знайти нормальні форми Жордана матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} -7 & -7 & -2 \\ 6 & 6 & 2 \\ -6 & -7 & -3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -5 \\ 6 & 3 & 3 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 4 \\ -5 & -4 & -4 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Нехай A_3 — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Знайти який-небудь базис простору $\mathbb{R}^3$, матриця оператора φ в якому має жорданову нормальну форму.

ВАРІАНТ 9.

Знайти нормальні форми Жордана матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ -2 & -2 & -3 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нехай A_3 — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Знайти який-небудь базис простору $\mathbb{R}^3$, матриця оператора φ в якому має жорданову нормальну форму.

ВАРІАНТ 10.

Знайти нормальні форми Жордана матриць

$$A_1 = \begin{pmatrix} -9 & 3 & -3 \\ -9 & 3 & -3 \\ 9 & -3 & 3 \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ -8 & 7 & -4 \\ 1 & 8 & -2 \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -8 \\ 0 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -5 \end{pmatrix}.$$

Нехай A_3 — матриця лінійного оператора φ векторного простору $\mathbb{R}^3$ у канонічному базисі цього простору. Знайти який-небудь базис простору $\mathbb{R}^3$, матриця оператора φ в якому має жорданову нормальну форму.

Тема 9. Евклідів простір. Ортогональність в евклідовому просторі

ВАРІАНТ 1.
Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$
Знайти ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$ та проекції вектора $c = (3, 6, -1, 2)$ на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^\perp$.

ВАРІАНТ 2.
Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$
Знайти ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$ та проекції вектора $c = (5, -2, -5, -1)$ на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^\perp$.

ВАРІАНТ 3.
Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$
Знайти ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$ та проекції вектора $c = (-2, -3, -3, -4)$ на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^\perp$.

ВАРІАНТ 4.
Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$
Знайти ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$ та проекції вектора $c = (-2, 3, -1, 6)$ на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^\perp$.

ВАРІАНТ 5.
Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} -x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0, \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$
Знайти ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$ та проекції вектора $c = (3, -1, 5, -4)$ на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^\perp$.

ВАРІАНТ 6.
Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$
Знайти ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$ та проекції вектора $c = (6, -2, 6, -1)$ на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^\perp$.

ВАРІАНТ 7.
Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0. \end{cases}$$
Знайти ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$ та проекції вектора $c = (-4, 4, 2, -5)$ на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^\perp$.

ВАРІАНТ 8.
Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи рівнянь
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0, \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$
Знайти ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$ та проекції вектора $c = (-5, -3, 7, 3)$ на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^\perp$.

ВАРІАНТ 9.
Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Знайти ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$ та проекції вектора $c = (2, 1, 10, 10)$ на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^\perp$.

ВАРІАНТ 10.
Підпростір L евклідового простору $\mathbb{R}^4$ є простором розв'язків системи рівнянь

$$\begin{cases} -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 0, \\ -x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Знайти ортогональне доповнення $L^\perp$ підпростору L в $\mathbb{R}^4$ та проекції вектора $c = (5, -5, 2, 4)$ на підпростір L та на його ортогональне доповнення $L^\perp$.

Індивідуальна робота №12

ВАРІАНТ 1.
1. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$ ортонормувати задану систему векторів $a_1 = (2, -1, 3, 4)$, $a_2 = (-6, 2, -6, -7)$, $a_3 = (0, 5, -5, -10)$, $a_4 = (-1, -3, -11, -7)$.
2. В евклідовому просторі $C^2_{[-2,0]}$ всіх функцій квадрат яких є інтегровним, ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ (скалярний добуток двох довільних функцій f, g із простору $C^2_{[-2,0]}$ визначається так $(f, g) = \int_{-2}^{0} f(x)g(x)dx$).

ВАРІАНТ 2.
1. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$ ортонормувати задану систему векторів $a_1 = (6, 4, -2, -2)$, $a_2 = (11, 8, -7, -4)$, $a_3 = (4, 6, -8, 2)$, $a_4 = (10, 4, 0, 8)$.
2. В евклідовому просторі $C^2_{[1,3]}$ всіх функцій квадрат яких є інтегровним, ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ (скалярний добуток двох довільних функцій f, g із простору $C^2_{[1,3]}$ визначається так $(f, g) = \int_{1}^{3} f(x)g(x)dx$).

ВАРІАНТ 3.
1. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$ ортонормувати задану систему векторів $a_1 = (-3, -1, -1, 2)$, $a_2 = (-2, -4, -1, 2)$, $a_3 = (-8, 4, 0, 5)$, $a_4 = (-4, -8, 3, -1)$.

2. В евклідовому просторі $C^2_{[3,4]}$ всіх функцій квадрат яких є інтегровним, ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ (скалярний добуток двох довільних функцій f, g із простору $C^2_{[3,4]}$ визначається так $(f, g) = \int_3^4 f(x)g(x)dx$).

ВАРІАНТ 4.
1. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$ ортонормувати задану систему векторів a_1=$(3, -2, -1, 4)$, a_2=$(3, 2, -1, 6)$, a_3=$(2, 2, -4, 6)$, a_4=$(-10, -2, 10, -6)$.
2. В евклідовому просторі $C^2_{[-1,1]}$ всіх функцій квадрат яких є інтегровним, ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ (скалярний добуток двох довільних функцій f, g із простору $C^2_{[-1,1]}$ визначається так $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)dx$).

ВАРІАНТ 5.
1. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$ ортонормувати задану систему векторів $a_1 = (4, 2, -2, 4)$, $a_2 = (6, 8, -4, 8)$, $a_3 = (6, 8, 0, 10)$, $a_4 = (4, -8, 8, -6)$.
2. В евклідовому просторі $C^2_{[-2,3]}$ всіх функцій квадрат яких є інтегровним, ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ (скалярний добуток двох довільних функцій f, g із простору $C^2_{[-2,3]}$ визначається так $(f, g) = \int_{-2}^3 f(x)g(x)dx$).

ВАРІАНТ 6.
1. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$ ортонормувати задану систему векторів a_1=$(-1, 4, 2, -3)$, a_2=$(-1, 7, 2, 1)$, a_3=$(4, -5, -3, 10)$, a_4=$(8, 3, -11, 4)$.
2. В евклідовому просторі $C^2_{[3,4]}$ всіх функцій квадрат яких є інтегровним, ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ (скалярний добуток двох довільних функцій f, g із простору $C^2_{[3,4]}$ визначається так $(f, g) = \int_3^4 f(x)g(x)dx$).

ВАРІАНТ 7.
1. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$ ортонормувати задану систему векторів a_1=$(-1, 1, 2, -2)$, a_2=$(-1, 3, 1, -2)$, a_3=$(-4, -2, 6, -3)$, a_4=$(-1, 1, -3, 8)$.
2. В евклідовому просторі $C^2_{[-2,2]}$ всіх функцій квадрат яких є інтегровним, ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ (скалярний добуток двох довільних функцій f, g із простору $C^2_{[-2,2]}$ визначається так $(f, g) = \int_{-2}^2 f(x)g(x)dx$).

ВАРІАНТ 8.
1. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$ ортонормувати задану систему векторів $a_1 = (-6, -2, -2, -4)$, $a_2 = (-11, -7, -4, -8)$, $a_3 = (7, -1, 6, 2)$, $a_4 = (-7, -9, -8, 4)$.
2. В евклідовому просторі $C^2_{[-1,1]}$ всіх функцій квадрат яких є інтегровним, ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ (скалярний добуток двох довільних функцій f, g із простору $C^2_{[-1,1]}$ визначається так $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx$).

ВАРІАНТ 9.
1. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$ ортонормувати задану систему векторів $a_1 = (-2, 1, 1, 2)$, $a_2 = (-2, 1, 3, 1)$, $a_3 = (-3, -1, 3, 1)$, $a_4 = (6, 2, 4, -2)$.
2. В евклідовому просторі $C^2_{[1,2]}$ всіх функцій квадрат яких є інтегровним, ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ (скалярний добуток двох довільних функцій f, g із простору $C^2_{[1,2]}$ визначається так $(f, g) = \int_{1}^{2} f(x)g(x)dx$).

ВАРІАНТ 10.
1. В евклідовому просторі $\mathbb{R}^4$ ортонормувати задану систему векторів $a_1=(1, 1, 3, -3)$, $a_2=(-2, 1, -7, 6)$, $a_3=(5, 5, 5, -5)$, $a_4=(-9, -7, -1, 7)$.
2. В евклідовому просторі $C^2_{[-2,3]}$ всіх функцій квадрат яких є інтегровним, ортогоналізувати систему многочленів $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$, $p_4 = x^3$ (скалярний добуток двох довільних функцій f, g із простору $C^2_{[-2,3]}$ визначається так $(f, g) = \int_{-2}^{3} f(x)g(x)dx$).

Тема 10. Ортогональні та симетричні оператори евклідового простору

ВАРІАНТ 1.

Нехай $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ є ортогональним оператором. А також, що в просторі $\mathbb{R}^4$ існує ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ. Знайти матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 2.

Нехай $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ є ортогональним оператором. А також, що в просторі $\mathbb{R}^4$ існує ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ. Знайти матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 3.

Нехай $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ є ортогональним оператором. А також, що в просторі $\mathbb{R}^4$ існує ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ. Знайти матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 4.

Нехай $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ є ортогональним оператором. А також, що в просторі $\mathbb{R}^4$ існує ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ.

Знайти матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 5.

Нехай $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ є ортогональним оператором. А також, що в просторі $\mathbb{R}^4$ існує ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ. Знайти матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 6.

Нехай $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ є ортогональним оператором. А також, що в просторі $\mathbb{R}^4$ існує ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ. Знайти матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 7.

Нехай $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ є ортогональним оператором. А також, що в просторі $\mathbb{R}^4$ існує ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ. Знайти матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 8.

Нехай $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ є ортогональним оператором. А також, що в просторі $\mathbb{R}^4$ існує ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ. Знайти матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 9.

Нехай $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ є ортогональним оператором. А також, що в просторі $\mathbb{R}^4$ існує ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ. Знайти матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 10.

Нехай $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ є ортогональним оператором. А також, що в просторі $\mathbb{R}^4$ існує ортонормований базис, який складається з власних векторів оператора φ. Знайти матрицю оператора φ у цьому базисі.

Індивідуальна робота №14

ВАРІАНТ 1.

Нехай $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ — симетричний оператор. Знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів оператора φ і матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 2.

Нехай $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -7 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -7 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ — симетричний оператор. Знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів оператора φ і матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 3.

Нехай $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -5 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ — симетричний оператор. Знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів оператора φ і матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 4.

Нехай $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ — симетричний оператор. Знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів оператора φ і матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 5.

Нехай $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 & -3 \\ 3 & 5 & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 5 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ — симетричний оператор. Знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів оператора φ і матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 6.

Нехай $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 5 & 5 & -5 \\ 5 & 7 & -5 & 5 \\ 5 & -5 & 7 & 5 \\ -5 & 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ — симетричний оператор. Знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів оператора φ і матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 7.

Нехай $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ — симетричний оператор. Знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів оператора φ і матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 8.

Нехай $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 & -3 \\ -3 & 1 & -3 & -3 \\ -3 & -3 & 1 & -3 \\ -3 & -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ — симетричний оператор. Знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів оператора φ і матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 9.

Нехай $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -7 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -7 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -7 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ — симетричний оператор. Знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів оператора φ і матрицю оператора φ у цьому базисі.

ВАРІАНТ 10.

Нехай $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 4 & -4 & -4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \\ -4 & 4 & 4 & -4 \\ -4 & 4 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ — матриця лінійного оператора φ евклідового простору $\mathbb{R}^4$ у канонічному базисі. Довести, що φ — симетричний оператор. Знайти ортонормований базис простору $\mathbb{R}^4$, який складається з власних векторів оператора φ і матрицю оператора φ у цьому базисі.

Тема 11. Квадратичні форми. Канонічний вид квадратичної форми. Нормальний вид квадратичної форми над полем $\mathbb{R}$ та $\mathbb{C}$

ВАРІАНТ 1.
а. Знайти нормальний вигляд квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 - 6x_1x_3 - 2x_2x_3$ відповідно над полями дійсних та комплексних чисел і перетворення невідомих, що зводить форму f до цих виглядів.
б. Чи є квадратична форма $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T AX$, задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -6 & -1 & -1 & -2 & 4 \\ -1 & -4 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & 0 & -1 & -7 \end{pmatrix},$$

додатно, від'ємно визначеною чи знакозмінною?

ВАРІАНТ 2.
а. Знайти нормальний вигляд квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$ відповідно над полями дійсних та комплексних чисел і перетворення невідомих, що зводить форму f до цих виглядів.
б. Чи є квадратична форма $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T AX$, задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 0 & -3 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & -1 & -7 & -1 \\ -3 & 2 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

додатно, від'ємно визначеною чи знакозмінною?

ВАРІАНТ 3.
а. Знайти нормальний вигляд квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ відповідно над полями дійсних та комплексних чисел і перетворення невідомих, що зводить форму f до цих виглядів.
б. Чи є квадратична форма $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T AX$, задана ма-

трицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & -2 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

додатно, від'ємно визначеною чи знакозмінною?

ВАРІАНТ 4.

а. Знайти нормальний вигляд квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + 6x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 10x_2x_3$ відповідно над полями дійсних та комплексних чисел і перетворення невідомих, що зводить форму f до цих виглядів.

б. Чи є квадратична форма $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T AX$, задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & 1 \\ -3 & -2 & 5 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 6 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

додатно, від'ємно визначеною чи знакозмінною?

ВАРІАНТ 5.

а. Знайти нормальний вигляд квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ відповідно над полями дійсних та комплексних чисел і перетворення невідомих, що зводить форму f до цих виглядів.

б. Чи є квадратична форма $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T AX$, задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

додатно, від'ємно визначеною чи знакозмінною?

ВАРІАНТ 6.

а. Знайти нормальний вигляд квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$ відповідно над полями дійсних

та комплексних чисел і перетворення невідомих, що зводить форму f до цих виглядів.
б. Чи є квадратична форма $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T AX$, задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

додатно, від'ємно визначеною чи знакозмінною?

ВАРІАНТ 7.
а. Знайти нормальний вигляд квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 10x_2x_3$ відповідно над полями дійсних та комплексних чисел і перетворення невідомих, що зводить форму f до цих виглядів.
б. Чи є квадратична форма $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T AX$, задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & 3 & 6 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

додатно, від'ємно визначеною чи знакозмінною?

ВАРІАНТ 8.
а. Знайти нормальний вигляд квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_2x_3$ відповідно над полями дійсних та комплексних чисел і перетворення невідомих, що зводить форму f до цих виглядів.
б. Чи є квадратична форма $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T AX$, задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix},$$

додатно, від'ємно визначеною чи знакозмінною?

ВАРІАНТ 9.

а. Знайти нормальний вигляд квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 6x_2x_3$ відповідно над полями дійсних та комплексних чисел і перетворення невідомих, що зводить форму f до цих виглядів.

б. Чи є квадратична форма $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T AX$, задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & -3 & 4 & -1 \\ -1 & -3 & -6 & 4 & -3 \\ -2 & 4 & 4 & -7 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

додатно, від'ємно визначеною чи знакозмінною?

ВАРІАНТ 10.

а. Знайти нормальний вигляд квадратичної форми $f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$ відповідно над полями дійсних та комплексних чисел і перетворення невідомих, що зводить форму f до цих виглядів.

б. Чи є квадратична форма $g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = X^T AX$, задана матрицею

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & 6 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},$$

додатно, від'ємно визначеною чи знакозмінною?

Тема 12. Криві другого порядку

Еліпс

ВАРІАНТ 1.
1. Відстань від одного з фокусів еліпса до кінців його більшої осі відповідно рівні 9 і 5. Скласти канонічне рівняння цього еліпса.
2. Сторона ромба рівна 8 і висота $\frac{3\sqrt{55}}{4}$. Через дві протилежні його вершини проходить еліпс, фокуси якого суміщаються з двома іншими вершинами ромба. Скласти рівняння еліпса, взявши діагоналі ромба за осі координат.
3. Прямі $x = \pm\frac{145}{9}$ є директрисами еліпса, мала піввісь якого рівна 8. Знайти рівняння цього еліпса.

ВАРІАНТ 2.
1. Відстань від одного з фокусів еліпса до кінців його більшої осі відповідно рівні 11 і 3. Скласти канонічне рівняння цього еліпса.
2. Сторона ромба рівна 4 і висота $\frac{3\sqrt{7}}{2}$. Через дві протилежні його вершини проходить еліпс, фокуси якого суміщаються з двома іншими вершинами ромба. Скласти рівняння еліпса, взявши діагоналі ромба за осі координат.
3. Прямі $x = \pm 5$ є директрисами еліпса, мала піввісь якого рівна 2. Знайти рівняння цього еліпса.

ВАРІАНТ 3.
1. Відстань від одного з фокусів еліпса до кінців його більшої осі відповідно рівні 11 і 1. Скласти канонічне рівняння цього еліпса.
2. Сторона ромба рівна 3 і висота $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. Через дві протилежні його вершини проходить еліпс, фокуси якого суміщаються з двома іншими вершинами ромба. Скласти рівняння еліпса, взявши діагоналі ромба за осі координат.
3. Прямі $x = \pm 12$ є директрисами еліпса, мала піввісь якого рівна $3\sqrt{3}$. Знайти рівняння цього еліпса.

ВАРІАНТ 4.
1. Відстань від одного з фокусів еліпса до кінців його більшої осі відповідно рівні 3 і 1. Скласти канонічне рівняння цього еліпса.
2. Сторона ромба рівна 5 і висота $\frac{4\sqrt{6}}{5}$. Через дві протилежні його вершини проходить еліпс, фокуси якого суміщаються з двома іншими вершинами ромба. Скласти рівняння еліпса, взявши діагоналі

ромба за осі координат.

3. Прямі $x = \pm\frac{9\sqrt{2}}{2}$ є директрисами еліпса, мала піввісь якого рівна 2. Знайти рівняння цього еліпса.

ВАРІАНТ 5.

1. Відстань від одного з фокусів еліпса до кінців його більшої осі відповідно рівні 13 і 5. Скласти канонічне рівняння цього еліпса.

2. Сторона ромба рівна 4 і висота $\frac{3\sqrt{7}}{2}$. Через дві протилежні його вершини проходить еліпс, фокуси якого суміщаються з двома іншими вершинами ромба. Скласти рівняння еліпса, взявши діагоналі ромба за осі координат.

3. Прямі $x = \pm 32$ є директрисами еліпса, мала піввісь якого рівна $2\sqrt{15}$. Знайти рівняння цього еліпса.

ВАРІАНТ 6.

1. Відстань від одного з фокусів еліпса до кінців його більшої осі відповідно рівні 16 і 2. Скласти канонічне рівняння цього еліпса.

2. Сторона ромба рівна 7 і висота $\frac{20\sqrt{6}}{7}$. Через дві протилежні його вершини проходить еліпс, фокуси якого суміщаються з двома іншими вершинами ромба. Скласти рівняння еліпса, взявши діагоналі ромба за осі координат.

3. Прямі $x = \pm 25$ є директрисами еліпса, мала піввісь якого рівна $2\sqrt{6}$. Знайти рівняння цього еліпса.

ВАРІАНТ 7.

1. Відстань від одного з фокусів еліпса до кінців його більшої осі відповідно рівні 15 і 5. Скласти канонічне рівняння цього еліпса.

2. Сторона ромба рівна 5 і висота $\frac{24}{5}$. Через дві протилежні його вершини проходить еліпс, фокуси якого суміщаються з двома іншими вершинами ромба. Скласти рівняння еліпса, взявши діагоналі ромба за осі координат.

3. Прямі $x = \pm\frac{8\sqrt{3}}{3}$ є директрисами еліпса, мала піввісь якого рівна 2. Знайти рівняння цього еліпса.

ВАРІАНТ 8.

1. Відстань від одного з фокусів еліпса до кінців його більшої осі відповідно рівні 3 і 1. Скласти канонічне рівняння цього еліпса.

2. Сторона ромба рівна 8 і висота $\frac{7\sqrt{15}}{4}$. Через дві протилежні його вершини проходить еліпс, фокуси якого суміщаються з двома іншими вершинами ромба. Скласти рівняння еліпса, взявши діагоналі ромба за осі координат.

3. Прямі $x = \pm\frac{85}{9}$ є директрисами еліпса, мала піввісь якого рівна 2. Знайти рівняння цього еліпса.

ВАРІАНТ 9.

1. Відстань від одного з фокусів еліпса до кінців його більшої осі відповідно рівні 14 і 4. Скласти канонічне рівняння цього еліпса.

2. Сторона ромба рівна 6 і висота $\frac{8\sqrt{5}}{3}$. Через дві протилежні його вершини проходить еліпс, фокуси якого суміщаються з двома іншими вершинами ромба. Скласти рівняння еліпса, взявши діагоналі ромба за осі координат.

3. Прямі $x = \pm\frac{16\sqrt{7}}{7}$ є директрисами еліпса, мала піввісь якого рівна 3. Знайти рівняння цього еліпса.

ВАРІАНТ 10.

1. Відстань від одного з фокусів еліпса до кінців його більшої осі відповідно рівні 12 і 8. Скласти канонічне рівняння цього еліпса.

2. Сторона ромба рівна 10 і висота $\frac{3\sqrt{91}}{5}$. Через дві протилежні його вершини проходить еліпс, фокуси якого суміщаються з двома іншими вершинами ромба. Скласти рівняння еліпса, взявши діагоналі ромба за осі координат.

3. Прямі $x = \pm 9$ є директрисами еліпса, мала піввісь якого рівна $2\sqrt{5}$. Знайти рівняння цього еліпса.

Гіпербола

ВАРІАНТ 1.

1. Скласти рівняння гіперболи, осі якої суміщаються з осями координат, якщо дійсна піввісь рівна $3\sqrt{2}$ і гіпербола проходить через точку $M(-2\sqrt{5}, \sqrt{2})$.

2. Обчислити півосі гіперболи, якщо її асимптоти задаються рівняннями $y = \pm\frac{\sqrt{15}}{15}x$ і фокуси знаходяться на відстані 4 від центра.

ВАРІАНТ 2.

1. Скласти рівняння гіперболи, осі якої суміщаються з осями координат, якщо дійсна піввісь рівна $\sqrt{62}$ і гіпербола проходить через точку $M(-\sqrt{66}, -\sqrt{2})$.

2. Обчислити півосі гіперболи, якщо її асимптоти задаються рівняннями $y = \pm x$ і фокуси знаходяться на відстані 2 від центра.

ВАРІАНТ 3.

1. Скласти рівняння гіперболи, осі якої суміщаються з осями координ-

нат, якщо дійсна піввісь рівна $3\sqrt{5}$ і гіпербола проходить через точку $M(3\sqrt{6}, -\sqrt{3})$.
2. Обчислити півосі гіперболи, якщо її асимптоти задаються рівняннями $y = \pm\frac{\sqrt{46}}{2}x$ і фокуси знаходяться на відстані 10 від центра.

ВАРІАНТ 4.
1. Скласти рівняння гіперболи, осі якої суміщаються з осями координат, якщо дійсна піввісь рівна $\sqrt{38}$ і гіпербола проходить через точку $M(-\sqrt{42}, -\sqrt{2})$.
2. Обчислити півосі гіперболи, якщо її асимптоти задаються рівняннями $y = \pm\frac{7\sqrt{2}}{8}x$ і фокуси знаходяться на відстані 9 від центра.

ВАРІАНТ 5.
1. Скласти рівняння гіперболи, осі якої суміщаються з осями координат, якщо дійсна піввісь рівна $\sqrt{78}$ і гіпербола проходить через точку $M(9, 1)$.
2. Обчислити півосі гіперболи, якщо її асимптоти задаються рівняннями $y = \pm\frac{\sqrt{65}}{5}x$ і фокуси знаходяться на відстані 6 від центра.

ВАРІАНТ 6.
1. Скласти рівняння гіперболи, осі якої суміщаються з осями координат, якщо дійсна піввісь рівна 4 і гіпербола проходить через точку $M(3\sqrt{2}, -1)$.
2. Обчислити півосі гіперболи, якщо її асимптоти задаються рівняннями $y = \pm\frac{\sqrt{7}}{7}x$ і фокуси знаходяться на відстані 4 від центра.

ВАРІАНТ 7.
1. Скласти рівняння гіперболи, осі якої суміщаються з осями координат, якщо дійсна піввісь рівна 2 і гіпербола проходить через точку $M(-\sqrt{7}, -\sqrt{3})$.
2. Обчислити півосі гіперболи, якщо її асимптоти задаються рівняннями $y = \pm\frac{\sqrt{87}}{29}x$ і фокуси знаходяться на відстані 8 від центра.

ВАРІАНТ 8.
1. Скласти рівняння гіперболи, осі якої суміщаються з осями координат, якщо дійсна піввісь рівна 6 і гіпербола проходить через точку $M(2\sqrt{11}, -\sqrt{2})$.
2. Обчислити півосі гіперболи, якщо її асимптоти задаються рівняннями $y = \pm\frac{\sqrt{33}}{4}x$ і фокуси знаходяться на відстані 7 від центра.

ВАРІАНТ 9.
1. Скласти рівняння гіперболи, осі якої суміщаються з осями координат, якщо дійсна піввісь рівна $3\sqrt{2}$ і гіпербола проходить через точку $M(-\sqrt{19}, -1)$.
2. Обчислити півосі гіперболи, якщо її асимптоти задаються рівняннями $y = \pm\frac{\sqrt{1023}}{33}x$ і фокуси знаходяться на відстані 8 від центра.

ВАРІАНТ 10.
1. Скласти рівняння гіперболи, осі якої суміщаються з осями координат, якщо дійсна піввісь рівна $2\sqrt{31}$ і гіпербола проходить через точку $M(-8\sqrt{2}, -1)$.
2. Обчислити півосі гіперболи, якщо її асимптоти задаються рівняннями $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}x$ і фокуси знаходяться на відстані 3 від центра.

Парабола

ВАРІАНТ 1.
1. На параболі $y^2 = 10x$ вибрано точку $M(x, y)$, яка віддалена від директриси на відстані $d = \frac{7}{2}$. Обчислити відстань від цієї точки до вершини параболи.
2. Струя води, яку випускає фонтан, приймає вигляд параболи, параметр якої $p = 0,25$ *м*. Визначити висоту струї, якщо відомо, що вона падає в басейн на відстані $4,2$ *м* від місця виходу.

ВАРІАНТ 2.
1. На параболі $y^2 = 4x$ вибрано точку $M(x, y)$, яка віддалена від директриси на відстані $d = \frac{11}{2}$. Обчислити відстань від цієї точки до вершини параболи.
2. Струя води, яку випускає фонтан, приймає вигляд параболи, параметр якої $p = 0,1$ *м*. Визначити висоту струї, якщо відомо, що вона падає в басейн на відстані 4 *м* від місця виходу.

ВАРІАНТ 3.
1. На параболі $y^2 = 8x$ вибрано точку $M(x, y)$, яка віддалена від директриси на відстані $d = \frac{15}{2}$. Обчислити відстань від цієї точки до вершини параболи.
2. Струя води, яку випускає фонтан, приймає вигляд параболи, параметр якої $p = 0,5$ *м*. Визначити висоту струї, якщо відомо, що вона падає в басейн на відстані 4 *м* від місця виходу.

ВАРІАНТ 4.

1. На параболі $y^2 = 8x$ вибрано точку $M(x, y)$, яка віддалена від директриси на відстані $d = \frac{13}{2}$. Обчислити відстань від цієї точки до вершини параболи.
2. Струя води, яку випускає фонтан, приймає вигляд параболи, параметр якої $p = 0,5$ *м*. Визначити висоту струї, якщо відомо, що вона падає в басейн на відстані 4 *м* від місця виходу.

ВАРІАНТ 5.
1. На параболі $y^2 = 10x$ вибрано точку $M(x, y)$, яка віддалена від директриси на відстані $d = \frac{19}{4}$. Обчислити відстань від цієї точки до вершини параболи.
2. Струя води, яку випускає фонтан, приймає вигляд параболи, параметр якої $p = 0,25$ *м*. Визначити висоту струї, якщо відомо, що вона падає в басейн на відстані $4,4$ *м* від місця виходу.

ВАРІАНТ 6.
1. На параболі $y^2 = 2x$ вибрано точку $M(x, y)$, яка віддалена від директриси на відстані $d = 2$. Обчислити відстань від цієї точки до вершини параболи.
2. Струя води, яку випускає фонтан, приймає вигляд параболи, параметр якої $p = 0,25$ *м*. Визначити висоту струї, якщо відомо, що вона падає в басейн на відстані 4 *м* від місця виходу.

ВАРІАНТ 7.
1. На параболі $y^2 = 2x$ вибрано точку $M(x, y)$, яка віддалена від директриси на відстані $d = \frac{11}{2}$. Обчислити відстань від цієї точки до вершини параболи.
2. Струя води, яку випускає фонтан, приймає вигляд параболи, параметр якої $p = 0,5$ *м*. Визначити висоту струї, якщо відомо, що вона падає в басейн на відстані $4,4$ *м* від місця виходу.

ВАРІАНТ 8.
1. На параболі $y^2 = 8x$ вибрано точку $M(x, y)$, яка віддалена від директриси на відстані $d = \frac{13}{2}$. Обчислити відстань від цієї точки до вершини параболи.
2. Струя води, яку випускає фонтан, приймає вигляд параболи, параметр якої $p = 0,25$ *м*. Визначити висоту струї, якщо відомо, що вона падає в басейн на відстані 4 *м* від місця виходу.

ВАРІАНТ 9.
1. На параболі $y^2 = 2x$ вибрано точку $M(x, y)$, яка віддалена від

директриси на відстані $d = \frac{9}{2}$. Обчислити відстань від цієї точки до вершини параболи.
2. Струя води, яку випускає фонтан, приймає вигляд параболи, параметр якої $p = 0,25$ *м*. Визначити висоту струї, якщо відомо, що вона падає в басейн на відстані $4,2$ *м* від місця виходу.

ВАРІАНТ 10.
1. На параболі $y^2 = 10x$ вибрано точку $M(x, y)$, яка віддалена від директриси на відстані $d = \frac{13}{2}$. Обчислити відстань від цієї точки до вершини параболи.
2. Струя води, яку випускає фонтан, приймає вигляд параболи, параметр якої $p = 0,1$ *м*. Визначити висоту струї, якщо відомо, що вона падає в басейн на відстані $3,2$ *м* від місця виходу.

Тема 13. Поверхні другого порядку

ВАРІАНТ 1.

1. Скласти рівняння циліндричної поверхні, знаючи, що вона проходить через криву $x^2+3y^2+3z^2+4x-6z+4=0$, $x-2y+2z=0$, а її твірні а) паралельні до осі Ox; б) паралельні до прямої $\frac{x}{1}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{1}$.
2. Скласти рівняння конічної поверхні, напрямна якої задана рівняннями $x^2+y^2+z^2+4x-2y+4=0$, $x-y-z+3=0$, а її вершина знаходиться а) в початку координат; б) в точці $V(2,2,-1)$.
3. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $\frac{x+2}{1}=\frac{y+1}{2}=\frac{z+2}{-2}$ а) навколо осі Oz; б) навколо прямої $x=-2$, $z=1$.

ВАРІАНТ 2.

1. Скласти рівняння циліндричної поверхні, знаючи, що вона проходить через криву $6x^2+3y^2+2z^2-12y+6=0$, $x+y-z-2=0$, а її твірні а) паралельні до осі Oy; б) паралельні до прямої $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-1}{-1}$.
2. Скласти рівняння конічної поверхні, напрямна якої задана рівняннями $x^2+2y^2+z^2-4x+8y+10=0$, $x-y-z-4=0$, а її вершина знаходиться а) в початку координат; б) в точці $V(1,0,2)$.
3. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{1}$ а) навколо осі Ox; б) навколо прямої $x=1$, $z=-2$.

ВАРІАНТ 3.

1. Скласти рівняння циліндричної поверхні, знаючи, що вона проходить через криву $3x^2+2y^2+6z^2-8y+12z+8=0$, $2x+y+2z=0$, а її твірні а) паралельні до осі Oz; б) паралельні до прямої $\frac{x}{2}=\frac{y+1}{-1}=\frac{z-2}{1}$.
2. Скласти рівняння конічної поверхні, напрямна якої задана рівняннями $3x^2+2y^2+2z^2+6x-3=0$, $x+2y+2z+1=0$, а її вершина знаходиться а) в початку координат; б) в точці $V(-2,-2,0)$.
3. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$ а) навколо осі Oy; б) навколо прямої $x=-1$, $y=-1$.

ВАРІАНТ 4.

1. Скласти рівняння циліндричної поверхні, знаючи, що вона проходить через криву $3x^2+y^2+z^2+12x+4y+13=0$, $2x+y-2z+6=0$, а її твірні а) паралельні до осі Oy; б) паралельні до прямої $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{-1}$.
2. Скласти рівняння конічної поверхні, напрямна якої задана рівняннями $3x^2+2y^2+2z^2+12x+8y+14=0$, $2x-y-2z+2=0$, а її вершина

знаходиться а) в початку координат; б) в точці $V(-1,-1,0)$.
3. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $\frac{x+2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-1}{-1}$ а) навколо осі Oy; б) навколо прямої $y = 2$, $z = -1$.

ВАРІАНТ 5.
1. Скласти рівняння циліндричної поверхні, знаючи, що вона проходить через криву $x^2+y^2+z^2-4x+2z+4 = 0$, $2x+y-z-5 = 0$, а її твірні а) паралельні до осі Ox; б) паралельні до прямої $\frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{-1}$.
2. Скласти рівняння конічної поверхні, напрямна якої задана рівняннями $2x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 12y - 12z + 12 = 0$, $2x + y - 2z + 3 = 0$, а її вершина знаходиться а) в початку координат; б) в точці $V(-2,-1,2)$.
3. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-1}{1}$ а) навколо осі Oy; б) навколо прямої $x = 1$, $y = -1$.

ВАРІАНТ 6.
1. Скласти рівняння циліндричної поверхні, знаючи, що вона проходить через криву $2x^2+3y^2+6z^2-4x-12z+2 = 0$, $2x-y+2z-4 = 0$, а її твірні а) паралельні до осі Oy; б) паралельні до прямої $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{1}$.
2. Скласти рівняння конічної поверхні, напрямна якої задана рівняннями $x^2+2y^2+z^2-4x+4z+6 = 0$, $2x+2y-z-6 = 0$, а її вершина знаходиться а) в початку координат; б) в точці $V(-1,-2,-1)$.
3. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$ а) навколо осі Oy; б) навколо прямої $y = 2$, $z = -2$.

ВАРІАНТ 7.
1. Скласти рівняння циліндричної поверхні, знаючи, що вона проходить через криву $3x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6x + 4z - 1 = 0$, $x - y - z = 0$, а її твірні а) паралельні до осі Oz; б) паралельні до прямої $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z}{1}$.
2. Скласти рівняння конічної поверхні, напрямна якої задана рівняннями $3x^2+y^2+z^2-4y+2z+2 = 0$, $x+2y-2z-6 = 0$, а її вершина знаходиться а) в початку координат; б) в точці $V(-1,1,-1)$.
3. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{1}$ а) навколо осі Oz; б) навколо прямої $y = -2$, $z = -1$.

ВАРІАНТ 8.
1. Скласти рівняння циліндричної поверхні, знаючи, що вона проходить через криву $x^2+y^2+z^2+4x+2 = 0$, $x+y-z+2 = 0$, а її твірні а) паралельні до осі Ox; б) паралельні до прямої $\frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.
2. Скласти рівняння конічної поверхні, напрямна якої задана рівняннями $x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4x + 4z + 4 = 0$, $x + y - z + 1 = 0$, а її вершина

знаходиться а) в початку координат; б) в точці $V(-2,-1,0)$.
3. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $\frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{2}$ а) навколо осі Ox; б) навколо прямої $x=-1$, $z=-1$.

ВАРІАНТ 9.
1. Скласти рівняння циліндричної поверхні, знаючи, що вона проходить через криву $3x^2+6y^2+2z^2+6x+8z+5=0$, $x-y-z-1=0$, а її твірні а) паралельні до осі Oz; б) паралельні до прямої $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{1}$.
2. Скласти рівняння конічної поверхні, напрямна якої задана рівняннями $x^2+y^2+z^2+4x+2y+2=0$, $2x+y+z+5=0$, а її вершина знаходиться а) в початку координат; б) в точці $V(0,1,2)$.
3. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $\frac{x+1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$ а) навколо осі Oz; б) навколо прямої $x=-1$, $z=-1$.

ВАРІАНТ 10.
1. Скласти рівняння циліндричної поверхні, знаючи, що вона проходить через криву $3x^2+2y^2+6z^2+6x-12z+3=0$, $2x-y+z+1=0$, а її твірні а) паралельні до осі Ox; б) паралельні до прямої $\frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$.
2. Скласти рівняння конічної поверхні, напрямна якої задана рівняннями $3x^2+2y^2+6z^2+12x+12z+12=0$, $x+y+z+3=0$, а її вершина знаходиться а) в початку координат; б) в точці $V(-1,-1,-1)$.
3. Скласти рівняння поверхні, утвореної обертанням прямої $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$ а) навколо осі Oy; б) навколо прямої $y=2$, $z=-2$.

Тема 14. Зведення рівняння поверхні 2-го порядку до канонічного вигляду

ВАРІАНТ 1.
Визначити тип поверхні, заданої рівнянням $-x^2+5y^2-z^2-2xy-10xz+2yz+6=0$, знайти її канонічне рівняння та канонічну систему координат.

ВАРІАНТ 2.
Визначити тип поверхні, заданої рівнянням $4x^2+y^2+4z^2+4xy-10xz+4yz-9=0$, знайти її канонічне рівняння та канонічну систему координат.

ВАРІАНТ 3.
Визначити тип поверхні, заданої рівнянням $-4x^2+5y^2+5z^2+4xy+4xz-14yz+18=0$, знайти її канонічне рівняння та канонічну систему координат.

ВАРІАНТ 4.
Визначити тип поверхні, заданої рівнянням $4x^2+y^2+z^2-8xy-8xz+14yz+18=0$, знайти її канонічне рівняння та канонічну систему координат.

ВАРІАНТ 5.
Визначити тип поверхні, заданої рівнянням $2x^2-4y^2+2z^2+4xy-8xz+4yz+3=0$, знайти її канонічне рівняння та канонічну систему координат.

ВАРІАНТ 6.
Визначити тип поверхні, заданої рівнянням $2x^2+2y^2+2xy+2xz-2yz-1=0$, знайти її канонічне рівняння та канонічну систему координат.

ВАРІАНТ 7.
Визначити тип поверхні, заданої рівнянням $x^2+4y^2+4z^2+8xy-8xz-2yz-9=0$, знайти її канонічне рівняння та канонічну систему координат.

ВАРІАНТ 8.
Визначити тип поверхні, заданої рівнянням $x^2+y^2+6xy+4xz-4yz+4=0$, знайти її канонічне рівняння та канонічну систему координат.

ВАРІАНТ 9.
Визначити тип поверхні, заданої рівнянням $x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 8xy + 8xz + 2yz + 9 = 0$, знайти її канонічне рівняння та канонічну систему координат.

ВАРІАНТ 10.
Визначити тип поверхні, заданої рівнянням $-2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz - 4yz + 2 = 0$, знайти її канонічне рівняння та канонічну систему координат.

Література

1. *Андрійчук В. І., Забавський Б. В.* Лінійна алгебра. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2008.
2. *Безущак О. О., Ганющкін О. Г.* Завдання для практичних занять з лінійної алгебри (векторні простори) для студентів університетів. – Київ: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2010, 257 с.
3. *Булдигін В. В., Алєксеєва І. В., Гайдей В. О., Диховичний О. О., Коновалова Н. Р., Федорова Л. Б.* Лінійна алгебра та аналітична геометрія. Навчальний посібник. – Київ: ТВіМС, 2011, 224 с.
4. *Власенко К. В.* Вища математика. Векторна алгебра й аналітична геометрія. Навчальний посібник до практичних занять та самостійної роботи. – Краматорськ: ДДМА, 2009, 80 с.
5. *Кадильникова Т. М., Кочєткова І. Б., Сушко Л. Ф., Білова О. В.* Аналітична геометрія у просторі. Навчальний посібник. – Дніпропетровськ: НМетАУ, 2012, 48 с.
6. *Кодубовський О. А., Кодубовська О. Л., Плесканьова Л. Г.* Аналітична геометрія. Частина 1. Елементи векторної алгебри. Метод координат на площині та в просторі. Навчальний посібник. – Словянськ, 2010, 84 с.
7. *Панасенко О. Б.* Лекції з лінійної алгебри. – Вінниця: ТОВ "Нілан-ЛТД", 2015, 222 с.
8. *Стороженко І. П.* Вища математика. Навчальний посібник в двох частинах. Частина 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. – Харків, 2019, 80 с.
9. *Шапочка І. В.* Лінійна алгебра. Навчальний посібник для індивідуальних робіт. – Ужгород: Видавництво УжНУ "Говерла", 2020, 95 с.
10. *Яременко Ю. В., Лутченко Л. І.* Аналітична геометрія. ч.2. Навчально-методичний посібник. – Кіровоград: "Антураж А", 2005, 116 с.

БОРТОШ Марія Юліївна, ТИЛИЩАК Олександр Андрійович,
ЮРЧЕНКО Наталія Василівна

ЗБІРНИК ЗАВДАНЬ

З АЛГЕБРИ

ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Частина 2