МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра теорії ймовірностей і математичного аналізу

О.О. Синявська, Г.І. Сливка-Тилищак, А.М. Тегза

ЧИСЛОВІ ТА ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання типових індивідуальних завдань
з математичного аналізу для студентів
факультету математики та цифрових технологій.

Ужгород – 2023

Методичні вказівки до виконання типових індивідуальних завдань з математичного аналізу для студентів факультету математики та цифрових технологій/*Укладачі: О.О. Синявська, Г.І. Сливка-Тилищак, А.М. Тегза.* Ужгород: ДВНЗ "УжНУ 2023. – 59с.

У методичних вказівках наведено рекомендації для виконання індивідуальних робіт з математичного аналізу з тем: «Чилові ряди», «Функціональні ряди», «Степеневі ряди», а також завдання для самостійної роботи студентів.

Методичні вказівки розроблено для студентів факультету математики та цифрових технологій всіх спеціальностей.

Рекомендовано до друку засіданням кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу, протокол №11 від 16 червня 2023 року.

Рекомендовано до друку науково-методичною комісією факультету математики та цифрових технологій ДВНЗ "УжНУ протокол №10 від 20 червня 2023 року.

Рецензенти:
канд. фіз.мат. наук, доц. Кучінка К.Й.
канд. фіз.-мат. наук, доц. Варга Я.В.

Числові ряди. Основні поняття. Збіжність та сума ряду.

Теоретичні питання

1. ***Поняття суми і збіжності рядів. Залишок ряду. Необхідна умова збіжності. Критерій Коші збіжності числового ряду.***

Означення. *Числовим рядом називається нескінченна послідовність* $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n,\ \ldots$ *чисел, з'єднаних знаком додавання:*

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

Числа $a_1,\ a_2,\ \ldots, a_n,\ \ldots$ називаються членами ряду, а член a_n – загальним членом ряду або n – й член ряду. Ряд вважається заданим, якщо відомий його загальний член $a_n = f(n), \quad n \in \mathbb{N}$, тобто задана функція натурального аргументу.

Розглянемо суми

$$S_1 = a_1,$$
$$S_2 = a_1 + a_2,$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3,$$
$$\ldots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

Означення. *Сума n перших членів ряду S_n називається n-частковою сумою ряду (1).*

Означення. *Ряд називається збіжним, якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S.$$

Число S називається сумою ряду. Записують це так:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S < \infty.$$

Якщо границя послідовності часткових сум не існує або дорівнює $\pm\infty$, то ряд називається розбіжним.

Означення. *Якщо відкинути n перших членів ряду, то одержимо ряд, який називається залишком ряду (1) після n-го члена і позначають r_n, тобто*

$$r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+m} + \cdots .$$

Якщо ряд (1) збігається, то збігається і його залишок і, навпаки, якщо збігається залишок, то збігається й ряд (1).

Теорема (необхідна ознака збіжності ряду). *Якщо ряд (1) збіжний, то його загальний член $a_n \to 0$ при $n \to \infty$, тобто*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Наслідок. *Якщо границя загального члена ряду (1) при $n \to \infty$ не дорівнює нулю, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається.*

Критерій Коші збіжності числового ряду. *Для того щоб числовий ряд (1) був збіжним, необхідно і достатньо щоб*

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n,\ m\ > N(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |S_n - S_m| < \varepsilon,$$

або

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \quad \forall n\ > N(\varepsilon),\ \ \forall p = 1, 2, \ldots \quad \Rightarrow \quad |S_{n+p} - S_n| < \varepsilon.$$

2. ***Ознаки порівняння збіжності числових рядів.***

Ознака порівняння. *Нехай задані два ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ причому члени одного ряду не перевищують членів іншого:*

$$a_n \leq b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тоді:

а) *якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, то збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;*

б) *якщо розбігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, то розбігається і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Зауваження. "Еталонні" ряди, які часто використовують для порівняння:

1) геометричний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a \cdot q^{n-1}$ збіжний при $|q| < 1$ і розбіжний, якщо $|q| \geq 1$;

2) гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – розбіжний.

3) узагальнений гармонічний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ – збіжний для $p > 1$, розбіжний якщо $p \leq 1$.

Гранична ознака порівняння. *Нехай задані два ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n, \quad b_n > 0$ *Якщо існує скінченна границя відношення їх загальних членів* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k \neq 0$, *то ряди одночасно збігаються, або розбігаються.*

Теорема. *Нехай задані два ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$. *Якщо виконується нерівність:*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Тоді:

а) *якщо збігається ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, *то збігається ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$;

б) *якщо розбігається ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, *то розбігається і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

3. ***Ознаки збіжності числових рядів з додатніми членами.***

Ознака Д'Аламбера. *Нехай для ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n \geq 0$ *існує границя відношення* $n+1$*-го члена до* n*-го члена:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Тоді:

а) *якщо* $l < 1$, *то ряд збігається;*

б) *якщо* $l > 1$, *то ряд розбігається;*

в) *якщо* $l = 1$, *то ознака не дає відповіді: ряд може збігатися, або розбігатися. Для дослідження треба використати інші ознаки.*

Зауваження. Ознака Д'Аламбера зручна практиці тоді, коли загальний член ряду містить показникову функцію або вирази з факторіалами

Радикальна ознака Коші. *Нехай для ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$ *існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l.$$

Тоді:

а) *якщо* $l < 1$, *то ряд збігається;*

б) *якщо* $l > 1$, *то ряд розбігається;*

в) *якщо* $l = 1$, *то ознака не дає відповіді: ряд може збігатися, або розбігатися. Для дослідження треба використати інші ознаки.*

Інтегральна ознака Коші. *Нехай члени ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \quad a_n > 0$ *додатні і не зростають, тобто* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1} \geq \ldots$ *і нехай* $f(x)$ *така неперервна і незростаюча функція, що* $f(1) = a_1$, $f(2) = a_2$, $\ldots f(n) = a_n, \ldots$ *Тоді для збіжності ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *необхідно і достатньо, щоб збігався невласний інтеграл* $\int\limits_1^{\infty} f(x)dx$.

Ознака Раабе. *Нехай для ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \; a_n > 0$ *існує границя*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = r.$$

Якщо $r > 1$, то ряд є збіжним, якщо $r < 1$, то – розбіжним.

Ознака Куммера. *Нехай* $\{c_n\}$ *довільна послідовність додатних чисел така, що ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_n}$ *розбіжний. Утворимо послідовність* $K_n = c_n \frac{a_n}{a_n+1} - c_{n+1}$. *Нехай* $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = K$. *Якщо* $K > 0$ *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \; a_n > 0$ *є збіжним, якщо* $K < 0$, *то цей ряд розбіжний.*

Ознака Бертрана. *Нехай маємо числовий ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \; a_n > 0$. *Утворимо послідовність* $B_n = \ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right)$. *Нехай існує границя* $\lim\limits_{n\to\infty} B_n = B$. *Якщо* $B > 1$, *то ряд є збіжним, якщо* $B < 1$, *то – розбіжним.*

Ознака Гаусса. *Нехай для числового ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n, \; a_n > 0$ *виконується співвідношення*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lambda + \frac{\mu}{n} + \frac{\theta_n}{n^2},$$

де λ *та* μ*– стал, а* θ_n *обмежена величина* $|\theta_n| \leq L$. *Ряд збіжний, якщо* $\lambda > 1$ *або* $\lambda = 1, \; \mu > 1$, *і ряд розбіжний, якщо* $\lambda < 1$ *або* $\lambda = 1, \; \mu \leq 1$.

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Користуючись означенням збіжності числового ряду, довести збіжність числових рядів і знайти їх суми:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Розв'язок. *1) Розкладемо загальний член ряду на суму найпростіших дробів:*

$$a_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3n+1)-(3n-2)}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Знайдемо часткову суму даного ряду:

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

$$S_n = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right).$$

Тоді

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) = \frac{1}{3}.$$

Отже, ряд збігається і його сума дорівнює $\frac{1}{3}$.

2) Представимо загальний член ряду a_n *у вигляді*

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2},$$

де A, B, C *— невизначені коефіцієнти. Використовуючи відомі методи відшукання невизначених коефіцієнтів, отримаємо*

$$A = \frac{1}{2}, \qquad B = -1, \qquad C = \frac{1}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{2}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Тоді

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{} - \frac{2}{+1} + \frac{1}{+2}\right).$$

Вираз $\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}$ *запишемо у вигляді*

$$\frac{1}{n}-\frac{2}{n+1}+\frac{1}{n+2}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}=$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right).$$

Отже

$$S_n=a_1+a_2+\dots+a_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\right).$$

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{1}{4}.$$

Отже, ряд збігається і його сума дорівнює $\frac{1}{4}$.

Завдання 2. *Дослідити на збіжність ряди:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n+2}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2^n}{n^2}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$.

Розв'язок. *1) Перевіримо необхідну умову збіжності числового ряду:*

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+2}=2\neq 0.$$

Отже, необхідна умова збіжності ряду не виконується, тому даний ряд є розбіжним.

2) Для даного ряду необхідна умова збіжності виконується:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0,$$

проте ряд є розбіжним, оскільки

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}=n\frac{1}{\sqrt{n}}=\sqrt{n},$$

тобто $S_n>\sqrt{n}$, *звідки* $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\infty$.

3) Доведемо збіжність даного ряду за допомогою критерію Коші. Знайдемо число $N(\varepsilon)$, що при $n > N(\varepsilon)$ і довільному $p > 0$ буде виконуватися нерівність $|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon$ для довільного $\varepsilon > 0$.

$$|S_{n+p} - S_n| = \left|\frac{\cos 2^{n+1}}{(n+1)^2} + \frac{\cos 2^{n+2}}{(n+2)^2} + \dots + \frac{\cos 2^{n+p}}{(n+p)^2}\right| \leq \left|\frac{\cos 2^{n+1}}{(n+1)^2}\right|$$

$$+ \left|\frac{\cos 2^{n+2}}{(n+2)^2}\right| + \dots + \left|\frac{\cos 2^{n+p}}{(n+p)^2}\right| \leq \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \dots + \frac{1}{(n+p)^2}.$$

Використавши, що

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

будемо мати

$$|S_{n+p} - S_n| < \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \dots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+p-1} - \frac{1}{n+p} =$$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Поклавши $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$, згідно критерію Коші, отримаємо, що даний ряд є збіжним.

4) Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n} = 1,$$

то не виконується необхідна умова збіжності ряду, тому даний ряд є розбіжним.

Завдання 3. *За допомогою ознак порівняння дослідити на збіжність ряди:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}}$; *3.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{\pi}{3n}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$; *4.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt{n^2-1}\right)$.

Розв'язок. *1. Оцінимо загальний член даного ряду*

$$\frac{n^n}{(2n+1)^n\sqrt{n+1}} < \frac{n^n}{(2n+1)^n} = \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{1}{2^n}.$$

Ця рівність виконується для всіх n. Отже, члени заданого ряду менші від членів збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$, що є геометричним рядом зі знаменником $q=\frac{1}{2}<1$. На основі ознаки порівняння рядів даний ряд збігається.

2. *Оскільки $\frac{1}{\ln(n+1)}>\frac{1}{n+1}$, $n=1,2,\dots$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$ розбіжний як гармонічний, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$ також розбіжний.*

3. *Застосуємо граничну ознаку порівняння. Оскільки*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n}}{\frac{1}{n}}=\frac{\pi}{3}\neq 0$$

і гармонічний ряд розбіжний, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{3n}$ також розбіжний.

4. *Перетворимо загальний член ряду, помноживши чисельник і знаменник на спряжений вираз до даного:*

$$\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2-1}\right)=\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}.$$

Оскільки $\frac{2}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt{n^2-1}}\sim\frac{1}{n}$, при $n\to\infty$, то досліджуваний ряд є розбіжним як і гармонічний ряд.

Завдання 4. *Використовуючи різні ознаки збіжності числових рядів, дослідити на збіжність ряди:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\frac{1}{7^n}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^n n!}{n^n}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^3(n+1)}$.

Розв'язок. *1. Для дослідження збіжності даного ряду використаємо ознаку Даламбера:*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\div\frac{3^n n!}{n^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}}=$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=3\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=3\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{3}{e}>1.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$, то даний ряд розбіжним.

2. Для дослідження збіжності даного ряду використаємо ознаку Коші:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\cdot\frac{1}{7^n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{7}=$$

$$=\frac{1}{7}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{e}{7}<1.$$

Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}<1$, *то даний ряд є збіжним.*

3. Для дослідження збіжності даного ряду використаємо ознаку Раабе:

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}-1\right).$$

Зробимо заміну $x=\frac{1}{n}$, *тоді* $x\to 0$ *при* $n\to\infty$ *і використаємо для знаходження границі правило Лопіталя.*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-e}{xe}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}-e}{xe}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)}\left(-\frac{\ln(1+x)}{x^2}+\frac{1}{x(1+x)}\right)}{e}=\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1-\ln(1+x)-\frac{1+x}{1+x}}{2x+3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{1+x}}{2+6x}=-\frac{1}{2}<1.$$

Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<1$, *то даний ряд є розбіжним.*

4. Функція $\varphi(x)=\frac{1}{(x+1)\ln^3(x+1)}$ *при* $x\geq 1$ *додатна, неперервна і монотонно спадна. Тому, досліджуючи ряд на збіжність, можна використати інтегральну ознаку збіжності Коші. Маємо*

$$\int\limits_1^\infty\frac{dx}{(x+1)\ln^3(x+1)}=\int\limits_1^\infty\frac{d(\ln(x+1))}{\ln^3(x+1)}=-\lim_{b\to\infty}\frac{1}{2\ln^2(x+1)}\bigg|_1^b=$$

$$=-\lim_{b\to\infty}\left(\frac{1}{2\ln^2(b+1)}-\frac{1}{2\ln^2 2}\right)=\frac{1}{2\ln^2 2}.$$

Оскільки невласний інтеграл збігається, то даний ряд також збігається.

Завдання 5. *Довести, що* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} = 0$.

Розв'язок. *Розглянемо числовий ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ *і дослідимо його на збіжність. За ознакою Даламбера*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left((n+1)!\right)^2 \cdot 2^{n^2}}{(n!)^2 \cdot 2^{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = 0 < 1$$

ряд є збіжним, отже, його загальний член прямує до нуля (необхідна умова збіжності ряду). Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}} = 0$.

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. *Користуючись означенням збіжності числового ряду, довести збіжність числових рядів і знайти їх суми:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+5^n}{5^n}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)$;
4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{4n-2}{(n^2-1)(n-2)}$;
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+3n+2}$;
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+3)^2n^2}$;
7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-2}$;
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+2^n}{6^n}$;
9. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n-2}{(n-1)n(n+1)}$;
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{9}{9n^2+21n-8}$;
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2}$;
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+6}{n(n+1)(n+2)}$;
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{9n^{+}3n-2}$;
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4n}{(n-1)^2(n+1)^2}$.

Завдання 2. *Дослідити на збіжність ряди*

1. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{n} \cos\frac{n\pi}{2}$; (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{7^n}$;

2. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos^n \frac{2\pi n}{3}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n^2}$;

3. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[3\left(1-\frac{1}{n}\right)+2(-1)^n\right]$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n!}{(n+1)(n+2)}$;

4. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{2n-1}\right)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-n}-1}{(n+1)^2}$;

5. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\sin^2 \frac{n\pi}{4}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{\pi n}{2}}{n}$.

6. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sin\frac{\pi(3n+1)}{2n+1}+\sin\left(\frac{1}{n}+n\pi\right)\right)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha+\sin n\alpha}{n!}$.

7. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n}{n^2+1}\cos^2\frac{n\pi}{4}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

8. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+3}\cdot\frac{\pi}{2}\right)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n!}{n(n+1)}$;

9. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-\ln n}{n+1}\cos\frac{2\pi n}{3}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha-\cos(n+1)\alpha}{10^n}$;

10. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\frac{4}{3}}\left(\sqrt[3]{n^2+1}-\sqrt[3]{n^2-1}\right)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(e+n)}{\sqrt{n(n+1)}}$;

11. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1+(-1)^n}{2}\right]$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n+1)!}$, $\quad a_i \le 10$;

12. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}\left(\sqrt[3]{n+3}+\sqrt[3]{4n-1}\right)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}+\sin n!}{n!}$;

13. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\cos\pi(n-1)+\frac{1}{n+1}\right]$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)}$;

14. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{2}{n}\right)^n\sin\frac{n\pi}{2}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Завдання 3. *За допомогою ознак порівняння дослідити на збіжність ряди:*

1. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}-\sqrt[3]{n-1}}{n}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\sin\frac{3}{n}}-1\right)^p$, $p>0$;

2. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n\sqrt[4]{n}}$;

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \operatorname{arctg}\frac{1}{(n-1)\sqrt[5]{n^2+1}}$;

3. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\left(2+\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sqrt{n}}{\sqrt[4]{n^7}+5}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[5]{n+1}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$;

4. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+3)^2}{n^5+\ln^4 n}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}^p \frac{1}{n\sqrt{n}}, \qquad p > 0$;

5. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{2} - \sqrt[n+1]{2}\right)$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{n\pi}{3}}{3^n+2}$;

6. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3}{n\left(2+\sin \frac{n\pi}{2}\right)}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)^5 \ln \frac{2n+1}{2n+3}$;

7. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}\right)^p, \; p > 0$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}} \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1\right)$;

8. (a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\frac{3}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{n^2-1}}{\sqrt{n^2-n}}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln^3 \frac{6n^3+7}{6n^3-3}$;

9. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{n\sqrt{n}-1}{5n^2-2}\right)$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2+2}} - 1\right)^p, \; p > 0$;

10. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - \sqrt[4]{n^2+n+5}\right)$;

    (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt[3]{n-1}}$;

11. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3}\right)^p \; p > 0$;

    (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$;

12. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin \frac{n\pi}{4}}{n^2} \operatorname{ctg} \frac{1}{\sqrt{n}}$;

    (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \operatorname{arctg} \frac{2}{n}$;

13. (a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[4]{n^3}} \sin \frac{2+(-1)^n}{6}\pi$;

    (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} \ln^p \frac{n^2+5}{n^2+4}, \; p > 0$;

14. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(2+\cos n\pi)}{2n^2-1}$;

    (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{\sqrt{n}}{n^3-1}} - 1\right)$;

Завдання 4. *Використовуючи різні ознаки збіжності числових рядів, дослідити на збіжність ряди:*

1. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-3}{2n+10}\right)^{n^2}$;

2. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n!}}{(3+\sqrt{2})\cdots(3+\sqrt{n+1})}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n(n^2-1)}$;

3. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2}$;

4. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+2}}{(2n^2+1)^{\frac{n}{2}}}$;

5. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(3^n+1)(2n)!}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left(\arcsin \frac{1}{n}\right)^n$;

6. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{3n+1}\right)^{n^2-1}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}\frac{3^n}{(n+2)!4^n}$;

7. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[5]{n}\left(\frac{n-2}{n+4}\right)^{n^2}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+2)!4^n}$;

8. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3\cdot 8\cdot 13\cdots(5n-2)}{4\cdot 9\cdot 14\cdots(5n-1)}$;

(b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$;

9. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\cos\frac{\pi}{n}\right)^{n^2}$;

10. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 4\cdot 7\cdot\cdots\cdot(3n-2)}{2^{n+1}n!}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\ln 2n}$;

11. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{10n+5}\right)^n \frac{3^n}{n}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3^n(n+1)!}$;

12. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^5}\right)^{n^4}\frac{1}{5^n}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)!!}{(2n+2)!!}$;

13. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-e^{-n})^{n^2}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+2)!}{10^n n^2}$;

14. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n!}\sin\frac{2}{3^n}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{\sqrt{3^n(2n-1)}}$.

Завдання 5. *Довести, що*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)!!}{5^{n^2}} = 0$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^{3n}}{n!} = 0$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2+1}{(2n)!!} = 0$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n)!} = 0$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)!}{n^n} = 0$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{((n+1)!)^2} = 0$;
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n)^n}{(2n-1)!} = 0$;
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^3} = 0$;
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(2n+3)!} = 0$;
10. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n-1}{(2n)!!} = 0$;
11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = 0$;
12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!!}{n^n} = 0$;
13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(5n)!}{2^{n^2}} = 0$;
14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(4n)!}{2^{n^2}} = 0$.

Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжність рядів з довільними членами. Операції над рядами.

Теоретичні питання

1. ***Знакозмінні ряди. Ознака Лейбніца.***

   Означення. *Знакозмінним називається ряд, що містить як додатні, так і від'ємні члени.*

   До знакозмінних належать ряди, які мають вигляд

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + u_{2n-1} - u_{2n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n, \qquad (2)$$

   де $a_n > 0, \;\; n \in \mathbb{N}$.

   Ознака Лейбніца. *Якщо члени ряду (2) монотонно спадають за абсолютною величиною:* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n \geq a_{n+1 \geq \ldots}$ *і загальний член прямує до нуля, тобто* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, *то ряд (2) збігається.*

   Знакозмінний ряд (2), для якого виконуються умови теореми Лейбнца, називають рядом *лейбніцового типу.*

   Наслідок. Абсолютна похибка від заміни суми ряду лейбніцового типу (2), будь якою його частинною сумою не перевищує модуля першого з відкинутих членів ряду, тобто

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}, \quad n = 1,\ 2, \ldots \Rightarrow |r_n| \leq a_{n+1}.$$

2. ***Ознаки Абеля і Діріхле збіжності числових рядів з довільними членами.***

   Розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n + \cdots . \qquad (3)$$

   Ознака Абеля. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ збіжний, а числа a_n утворюють монотонну та обмежену послідовність $|a_n| \leq K, \;\; n = 1,\ 2, \ldots$, то ряд (3) збіжний.

   Ознака Діріхле. Якщо часткові суми ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ обмежені $B_n \leq M, \;\; n = 1,\ 2, \ldots$, а числа a_n утворюють монотонну послідовність, яка прямує до нуля $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд (3) збіжний.

3. Абсолютна та умовна збіжність рядів. Властивості абсолютно збіжних рядів. Теорема Рімана.

   Розглянемо знакозмінний ряд (ряд з довільними членами)
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots . \tag{4}$$
   Запишемо ряд, складений з абсолютних величин його членів
$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| + \cdots . \tag{5}$$
   Означення. *Знакозмінний ряд (4) називається абсолютно збіжним, якщо збігається ряд (5), що складений із абсолютних величин його членів.*

   Означення. *Знакозмінний ряд (4) називається умовно збіжним, якщо він є збіжним, але ряд (5), складений із абсолютних величин його членів, є розбіжним.*

   Теорема. *Якщо ряд (5) збіжний, то збіжний і ряд (4).*

   При дослідженні рядів на абсолютну збіжність застосовують ознаки збіжності рядів з додатними членами.

   Теорема Діріхле. Якщо ряд абсолютно збіжний, то будь-який ряд, що утворений за допомогою перестановки його членів, також абсолютно збіжний і має ту саму суму, що й заданий ряд.

   Теорема Рімана. Якщо ряд умовно збіжний, то яке б не було наперед задане число P, можна так переставити члени цього ряду, щоб утворений ряд мав сумою число P.

4. ***Нескінченні добутки. Збіжність. Зв'язок між числовими рядами та нескінченними добутками.***

   Означення. *Нескінченним числовим добутком називають формальний вираз*
$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ \cdots \ \cdot a_n \cdot \ \cdots . \tag{6}$$
   Означення. *Послідовність*
$$P_1 = a_1,$$
$$P_2 = a_1 \cdot a_2,$$
$$P_3 = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3,$$

$$\cdots$$

$$P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \ \cdots \ \cdot a_n$$

називають послідовністю часткових добутків нескінченного добутку (6). Причому, якщо існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$*, то її називають значенням добутку (6) та позначають* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n = P$*.*

Якщо послідовність часткових добутків P_n збігається до числа, відмінного від нуля, тобто, границя $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$ є скінченною та не нульовою, то нескінченний добуток (6) називають збіжним та кажуть, що добуток збігається. Інакше нескінчений добуток називають розбіжним.

Зауваження. Коли серед елементів послідовності a_n є хоч один раз число нуль або нескінченна кількість від'ємних чисел, то нескінчений добуток (6) буде розбіжним. Тож, вилучаючи ці тривіальні випадки, будемо розглядати нескінченні добутки тільки з додатними членами, тобто вважатимемо, що $\forall n \in \mathbb{N}: \quad a_n > 0$.

Теорема (необхідна умова збіжності нескінченного добутку.) *Якщо нескінчений числовий добуток* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається, то за умови його загальний член прямує до одиниці:* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, де $b_n = \ln a_n$. Такий числовий ряд будемо називати *логарифмічним рядом*, спорідненим з нескінченним добутком (6).

Зв'язок між збіжністю нескінченного добутку та спорідненого логарифмічного ряду.

- Нескінченний добуток є збіжним тоді й лише тоді, коли збігається споріднений з ним логарифмічний ряд. Причому, якщо нескінченний добуток збігається до значення $P > 0$, а споріднений логарифмічний ряд має суму $B \in \mathbb{R}$, то справедливі рівності $B = \ln P$ та $P = e^B$, тобто
$$0 < \prod_{n=1}^{\infty} a_n < \infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n < \infty,$$
$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = P, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n = B \Leftrightarrow B = \ln P, \quad P = e^B.$$
- Нескінченний добуток розбігається до значення нуль тоді й лише тоді, коли споріднений логарифмічний ряд розбігається до значення $-\infty$,

тобто

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n = -\infty.$$

- . Нескінченний добуток розбігається до значення $+\infty$ тоді й лише тоді, коли споріднений логарифмічний ряд розбігається також до значення $+\infty$, тобто

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n = +\infty.$$

Розглянемо нескінченний добуток вигляду

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + a_n), \quad a_n > -1, \;\; n \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Теорема (перша ознака збіжності нескінченного добутку).

(a) *Нехай елементи числової послідовності $\{a_n, \;\; n \in \mathbb{N}\}$ зберігають свій знак, а саме: або $\forall n \in \mathbb{N}: \;\; a_n \geq 0$ або $\forall n \in \mathbb{N}: \;\; a_n \leq 0$. Тоді для збіжності нескінченного добутку (7) необхідно і достатньо, щоб збігався споріднений числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.*

(b) Нескінченний добуток (7) розбігається до значення нуль тоді й лише тоді, коли споріднений ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається до значення -1.

(c) Нескінченний добуток (7) розбігається до значення $+\infty$ тоді й лише тоді, коли споріднений числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ теж розбігається до значення $+\infty$.

Теорема (друга ознака збіжності нескінченного добутку). *Нехай числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, що споріднений до нескінченого добутку (7) є збіжним. У такому разі цей добуток збігається тоді й лише тоді, коли збігається числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$.*

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Дослідити на збіжність ряди:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(4n)^3}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{8}}{\sqrt{n}}$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{(n+1)\ln n}$.

Розв'язок. *1. Очевидно, що всі умови теореми Лейбніца виконуються: 1)знаки членів даного ряду строго чергуються; 2)модулі його членів монотонно спадають; 3) n-ий член ряду прямує до нуля при $n\to\infty$. Отже, ряд збіжний згідно теореми Лейбніца.*

2. Маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}=-1-\frac{0}{2}+\frac{\cos\frac{\pi}{3}}{3}-\frac{\cos\frac{\pi}{4}}{4}+\dots+(-1)^n\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}+\dots.$$

Відкинувши перші два члени ряду, отримаємо знакозмінний ряд, для якого $a_n=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}, n=3,4,\dots$ і $a_n\to 0$ при $n\to\infty$. Крім того,

$$a_n-a_{n+1}=\frac{\cos\frac{\pi}{n}}{n}-\frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{n+1}=\frac{n\left(\cos\frac{\pi}{n}-\cos\frac{\pi}{n+1}\right)+\cos\frac{\pi}{n}}{n(n+1)}=$$

$$=\frac{-2n\sin\frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)\sin\frac{\pi}{2n(n+1)}+\cos\frac{\pi}{n}}{n(n+1)}.$$

Перший доданок у чисельнику останнього дробу прямує до нуля, а другий до одиниці при $n\to\infty$. Тому $\exists n_0:\ n>n_0\ \Rightarrow\ a_n-a_{n+1}>0$. Отже, виконуються всі умови теореми Лейбніца, за якою даний ряд є збіжний.

3. Представимо даний ряд у вигляді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$, де $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n=\cos\frac{n\pi}{8}$. Очевидно, що $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\to 0$ при $n\to\infty$. Розглянемо часткові суми $B_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{8}$. Оскільки функція $y=\cos\frac{\pi x}{8}$ є періодичною функцією з періодом 16, і згідно рівності

$$\cos(\pi+x)=-\cos x,$$

отримаємо

$$b_1+b_2+\dots+b_{16}=\cos\frac{\pi}{8}+\cos\frac{2\pi}{8}+\dots+\cos\frac{8\pi}{8}-\cos\frac{\pi}{8}-\cos\frac{2\pi}{8}-\dots-\cos\frac{8\pi}{8}=0.$$

Отже, часткові суми B_n приймають тільки значення $B_1, B_2, \ldots, B_{16}$. Звідси випливає, що послідовність B_n обмежена. Тоді за теоремою Діріхле даний ряд є збіжним.

4. *Представимо даний ряд у вигляді* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$, *де* $a_n = \frac{(-1)^n}{\ln n}$, $b_n = \frac{n}{n+1}$. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$ *є збіжним за теоремою Лейбніца. Послідовність* $\{b_n\}$ *є обмеженою і монотонною, оскільки*

$$0 < \frac{n}{n+1} < 1,$$

$$b_{n+1} - b_n = \frac{n+1}{n+2} - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} > 0 \ \Rightarrow b_{n+1} > b_n, \ \forall n \in N.$$

Отже, за теоремою Абеля ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(n+1)\ln n}$ *є збіжним.*

Завдання 2. *Визначити характер збіжності рядів (абсолютна збіжність, умовна збіжність чи розбіжність):*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin n\alpha}{n^3}$, $\alpha \in R$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{1+\sqrt{n}}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^n$;
4. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n \sqrt[n]{n}}$;

Розв'язок. 1. *Розглянемо ряд складений з абсолютних величин членів заданого ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^3}$. *Оскільки* $\frac{|\sin n\alpha|}{n^3} \leq \frac{1}{n^3}$ *і ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ *збіжний, то за ознакою порівняння ряд складений з абсолютних величин є також збіжним, а тому заданий початковий ряд є абсолютно збіжним.*

2. *Оскільки* $\cos n\pi = (-1)^n$, *то даний ряд є знакозмінним. Розглянемо ряд складений з абсолютних величин членів даного ряду, а саме* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+\sqrt{n}}$. *Даний ряд є розбіжним разом з рядом* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. *Але ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+\sqrt{n}}$ *є збіжним за ознакою Лейбніца, а отже початковий ряд є умовно збіжним.*

3. *Розглянемо ряд складений з абсолютних величин членів заданого ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^n$. *Для дослідження збіжності такого ряду використаємо ознаку Коші:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{3n-2}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{3n-2} = \frac{2}{3} < 1.$$

Отже, даний ряд є збіжним, а тому початковий ряд є абсолютно збіжним.

4. *Доведемо, що даний ряд є розбіжним. Доведемо від супротивного, нехай він є збіжним. Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ *є рядом Лейбніцового типу, відповідно він є збіжним. Додамо ряд, який потрібно дослідити до даного:*

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} - (-1)^n \sqrt[n]{n}} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\sqrt{n}} = \sum_{n=3}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n} + \sqrt[n]{n}(-1)^n}{\sqrt{n}(\sqrt{n} - \sqrt[n]{n}(-1)^n)} =$$

$$= \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n - \sqrt{n}\sqrt[n]{n}(-1)^n}.$$

Ми отримали ряд з додатніми членами, який легко порівняти з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$*:*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt[n]{n}}{n - \sqrt{n}\sqrt[n]{n}(-1)^n} \div \frac{1}{n} \right) = 1.$$

Отже, ми отримали, що сума двох збіжних рядів є рядом розбіжним, що є неможливо. Отже, ми отримали протиріччя, що і доводить розбіжність досліджуваного ряду.

Завдання 3. *Визначити, скільки треба взяти членів ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, *щоб обчислити його суму з точністю до* $\alpha = 10^{-4}$.

Розв'язок. *Оскільки* $a_n = \frac{1}{n^2} > \frac{1}{(n+1)^2} = a_{n+1}$ *та* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, *то умови теореми Лейбніца виконуються. Отже, заданий ряд є збіжним і* $|R_n| = |S - S_n| \le a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2} < 10^{-4}$, $n + 1 \ge 10^2 \;\Rightarrow n \ge 99$. *Отже, для обчислення суми заданого ряду з точністю* $\alpha = 10^{-4}$ *досить взяти* 99 *перших його членів.*

Завдання 4. *Відомо, що сума ряду* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$ *дорівнює* $\ln 2$. *Знайти суму ряду*

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots.$$

Розв'язок. *Представимо ряд у вигляді*

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots = \left(1 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{8} +$$

$$+ \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) - \frac{1}{12} + \cdots = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Завдання 5. *Знайти різницю рядів* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3n-5}$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}$. *Переконатися в тому, що дані ряди розбіжні, а їх різниця є рядом збіжним.*

Розв'язок. *Оскільки*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{3n-5} \div \frac{1}{n}\right) = 1, \qquad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n^2+2} \div \frac{1}{n}\right) = 1,$$

то дані ряди є розбіжними разом з гармонічним рядом. Складемо різницю даних рядів:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{3n-5} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{3n-5} - \frac{n}{n^2+2}\right) = \frac{6+5n}{(3n-5)(n^2+2)}.$$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{6+5n}{(3n-5)(n^2+2)} \div \frac{1}{n^2}\right) = \frac{5}{3},$$

то даний ряд, згідно ознак порівняння, є збіжним разом з рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Завдання 6. *Довести, що* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$

Розв'язок. *Ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ *збіжний, тому*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} c_n,$$

де

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} a_k b_{n-k+1} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(k-1)!(n-k)!},$$

$$a_k = \frac{1}{(k-1)!}, \quad b_k = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}.$$

Оскільки

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

то

$$c_{n+1} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!(n-k)!} = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Отже, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1.$

Завдання 7. *Довести, що добуток двох розбіжних рядів* $1-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n}$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\left(2^{n}+\frac{1}{2^{n+1}}\right)$ *є абсолютно збіжний ряд.*

Розв'язок. *Легко бачити, що обидва ряди є розбіжними (ознака Коші). За правилом множення рядів, маємо:*

$$c_n=a_1b_n+b_1a_n+\sum_{k=2}^{n-1}a_kb_{n-k+1},$$

де $a_1=1,\ a_n=-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1},\ b_1=1,\ b_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right),\ n=2,3,\ldots$. *Відповідно,*

$$c_n=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\left(2^{n-1}+\frac{1}{2^n}\right)-\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-4\cdot 3^{n-2}\sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{2^k}-\frac{3^{n-2}}{2^{2n-1}}\sum_{k=2}^{n-1}2^k=\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}.$$

Тоді $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4$. *А це означає, що даний ряд є збіжним.*

Завдання 8. *Дослідити на збіжність безмежні добутки:*

1. $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$;

2. $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

Розв'язок. *1.* $\prod\limits_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2-1}{n^2}=\prod\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(n-1)(n+2)}{n\cdot n}$. *Знайдемо часткові добутки:*

$$P_2=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2},$$
$$P_3=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3},$$
$$P_4=\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}=\frac{1\cdot 5}{2\cdot 4},$$
$$\ldots$$
$$P_n=\frac{1\cdot(n+1)}{2\cdot n}=\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}.$$

Тоді $P=\lim\limits_{n\to\infty}P_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$. *Отже, безмежний добуток збіжний і його значення дорівнює* $\frac{1}{2}$.

2. Перепишемо даний безмежний добуток у вигляді:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=\prod_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n^2}{n^2+1}}=\sqrt{\prod_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2+1}}.$$

Дослідимо на збіжність безмежний добуток $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1}$, *якщо він є збіжним то збіжним буде і* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n^2+1}\right) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$ *є збіжним, а отже і безмежний добуток* $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ *є збіжним.*

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. *Визначити характер збіжності рядів (абсолютна збіжність, умовна збіжність чи розбіжність):*

1. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \frac{n^2+7}{n^2}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{\sqrt{n^2+5}}$;

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-)^{n-1} \frac{(2n)!!}{n^n}$;

2. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n}}{n}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n+3}}$;

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;

3. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^3}{2^n}$;

   (b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{(n^2+2)\ln n}$;

   (c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{\ln n}}$;

4. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^n}{(n+1)3^n}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \ln n$;

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (3n-2)}{7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (2n+5)}$;

5. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \sin \frac{\sqrt{n}}{n+1}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3n+2}{n(n+4)}$;

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^n}{n!}$;

6. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{5} - \sqrt[n+1]{5}\right)$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt[3]{n^2+4}}$;

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3n^2}{n^2+n}$;

7. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

8. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{n}}{n+4}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sin \frac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt{4n+1}}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2\cdot 7\cdot 12\cdots(5n-3)}{5\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+1)}$;

9. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n^2-5}-\sqrt{n^2-7}}{n}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{4n}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+(-1)^n \sqrt[n]{\ln n}}$;

10. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)2^{2n}}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{n(n+4)}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}+(-1)^n \sqrt[n]{\ln n}}$;

11. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\sqrt[n]{3} - \sqrt[n+1]{3})$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n-3)}{n^2-1}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+3)}{\ln(n+4)}$;

12. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2 \cdot 3^2}$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \pi n}{4+\sqrt{n}}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+5}{3n+1}$;

13. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\frac{\pi}{2}}{\sqrt{n+3}}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{\ln(2n+1)}}$;

14. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \left(1 - \cos \frac{2}{n}\right)$;

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n+1}}$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}+(-1)^n \ln n}$.

Завдання 2. *Обчислити суми рядів з точністю α:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{n^3(n+1)}$, $\alpha = 10^{-2}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!!}$, $\alpha = 10^{-3}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{3^n}$, $\alpha = 10^{-2}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\pi}{3^n(n+1)}$, $\alpha = 10^{-3}$;

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n!}$, $\alpha = 10^{-2}$;

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1)}{(2n)! n!}$, $\alpha = 10^{-3}$;

7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3+1}$, $\alpha = 10^{-3}$;

8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}$, $\alpha = 10^{-3}$.

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2(n+3)}$, $\alpha = 10^{-2}$;

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n}$, $\alpha = 10^{-4}$;

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$, $\alpha = 10^{-3}$;

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{(n+1)^n}$, $\alpha = 10^{-3}$;

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!n!}$, $\alpha = 10^{-4}$;

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \cdot n!}$, $\alpha = 10^{-3}$.

Завдання 3.

1. Знайти суму рядів: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^n} + \frac{(-1)^n}{n^3}\right)$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{5^{n+1}} + \frac{(-1)^{n+1}}{n^3}\right)$

2. Знайти почленну різницю розбіжних рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2-n-2}$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{n^2-2n-3}$ та дослідити її на збіжність.

   Знайти перших п'ять членів добутку двох рядів:

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{-n}}{(n+1)n} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$;

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{-n}} \cdot \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$;

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(n+1)n} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$.

7. Довести що квадрат збіжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ є розбіжним рядом.

8. Довести, що $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right)^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

9. Довести, що $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)2^n} = \frac{1}{2} - \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

10. Довести, що $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!}$.

11. Довести, що $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n^3-n) \cdot 3^n} = -\frac{1}{2} + \frac{4}{3} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$.

12. Довести, що $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{7^{n-1}} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^{n-1}}\right)^2$.

13. Довести, що $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{3^{-n}}{n^2-3n+2} = \frac{1}{9} - \frac{2}{9} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 3^n}$.

14. Чи збіжним є ряд $\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}\right)^2$?

Завдання 4. *Дослідити на збіжність безмежні добутки:*

1. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$;
2. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^p$;
3. $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{n+1}{n+3}}$;
4. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n^2]{n}$;
5. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{(1+\frac{1}{n})^{n^2}}{3^n}\right)$;
6. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+5}{n^2+8}\right)^p$;
7. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{n+2}{n}\right)^{n^2} \cdot \frac{1}{5^n}\right)$;
8. $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \frac{n^2+n-2}{n(n+1)}$;
9. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)(2n+7)}{(2n+3)(2n+5)}$;
10. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{\sqrt{n}}\right) e^{\frac{x}{\sqrt{n}}}$;
11. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}\right)$;
12. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{5}{3+n}\right) e^{\frac{5}{n}}$;
13. $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{2^{n+1}}$;
14. $\prod\limits_{n=3}^{\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$.

Функціональні послідовності та ряди.

Теоретичні питання

1. ***Поняття функціональної послідовності. Збіжінсть та рівномірна збіжність.***

   Означення. *Якщо у відповідність до кожного натурального n ставиться деяка функція $f_n(x)$, задана на множині X, то множина занумерованих функцій $f_1(x)$, f_2x, $\ldots, f_n(x), \ldots$ утворює функціональну послідовність. Множина X на якій задана кожна із функцій $f_n(x)$ називається множиною визначення функціональною послідовності.*

   Означення. *Функціональна послідовність $f_n(x)$ в т. x_0 називається збіжною, якщо числова послідовність $f_n(x_0)$ збігається.*

   Означення. *Множина точок X, в яких функціональна послідовність збігається називається областю збіжності послідовності.*

Означення. *Якщо $x_0 \in X$, де X – область збіжності послідовності, то їй можна співставити єдине значення границі послідовності. Таким чином утворилась функція, що задана на області збіжності X. Ця функція називають граничною функцією відповідної послідовності. А саме: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Таким чином утворилась функція, що задана на області збіжності X. Ця функція $f(x)$ називається граничною функцією відповідної послідовності.*

Щоб підкреслити збіжність функціональної послідовності в кожній окремій точці із множини визначення ці функції називають поточковою границею функціональної послідовності та позначають: $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

На мові $\varepsilon - N$ означення поточкової збіжності на множині $A \subset X$ (тут X – область її збіжності) можна записати так:

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} f(x) \Leftrightarrow \underline{\forall x \in A} \quad \forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon,\ x) \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N(\varepsilon,\ x)$$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Означення. *Функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ називається рівномірно збіжною до функції $f(x)$ на множині $A \subset X$ (X– область її збіжності) – позначення $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\Longrightarrow} f(x)$, якщо*

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N(\varepsilon,\ x) \quad \underline{\forall x \in A} \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Теорема (критерій Коші рівномірної збіжності функціональної послідовності). *Для того, щоб функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігалася на множині $A \subset X$ (X– область її збіжності), необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова:*

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N(\varepsilon,\ x) \ \forall p = 1, 2, \ldots \ \forall x \in A$$

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon.$$

Теорема. *Для того, щоб функціональна послідовність $\{f_n(x)\}$ рівномірно збігалась на множині $A \subset X$ (X– область її збіжності) до функції $f(x)$, необхідно і достатньо виконання рівності:*

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = 0.$$

2. ***Функціональні ряди, область збіжності, рівномірна збіжність.*** Розглянемо функціональну послідовність $\{f_n(x)\}$. Складемо формальний вираз:

$$f_1(x) + f_2(x) + \cdots f_n(x) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x). \qquad (8)$$

Такий вираз називається функціональним рядом, а $f_n(x)$ – загальним членом цього ряду.

Тобто функціональний ряд – це такий ряд, кожен член якого залежить не тільки від свого номера n, а й від деякої змінної x.

Складемо вирази:

$$F_1(x) = f_1(x),$$
$$F_2(x) = f_1(x) + f_2(x),$$
$$\dots$$
$$F_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots f_n(x).$$

Ці вирази називаються частковими сумами ряду (8), і вони у свою чергу утворюють функціональну послідовність $\{F_n(x)\}$.

Означення. *Якщо функціональна послідовність $\{F_n(x)\}$ збігається на множині X до функції $F(x)$, то функціональний ряд називається збіжним на множині X, а функція $F(x)$ – сумою цього ряду. Множина X називається областю збіжності функціонального ряду (8).*

Означення. Ряд (8) називається рівномірно збіжним на множині X, якщо функціональна послідовність його часткових сум $\{F_n(x)\}$ рівномірно збігається на множині X до функції $F(X)$. Тобто

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N(\varepsilon,\ x) \quad \underline{\forall x \in A} \quad |F_n(x) - F(x)| < \varepsilon.$$

Вираз $|F_n(x) - F(x)|$ – є модулем залишку ряду

$$R_n(x) = F(x) - F_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x).$$

Таким чином, функціональний ряд (8) називається рівномірно збіжним на множині X, якщо

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N(\varepsilon,\ x) \quad \underline{\forall x \in A} \quad |R_n(x)| < \varepsilon.$$

3. ***Ознаки рівномірної збіжності функціональних рядів.***

Теорема (критерій Коші). *Для того, щоб функціональний ряд (8) рівномірно збігався на множині X, необхідно і достатньо, щоб*

$$\forall\varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \ \forall n > N(\varepsilon,\ x) \ \forall p = 1, 2, \dots \ \forall x \in A \ \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(x)\right| < \varepsilon.$$

Теорема (ознака Вейєрштрасса. *Нехай для функціонального ряду (8) існує такий збіжний знакододатний числовий ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$*, що* $\forall n \in \mathbb{N}$ *і* $\forall x \in X$ *виконується нерівність:* $|f_n(x)| \leq c_n$*. Тоді ряд (8) збігається абсолютно та рівномірно на множині* X*.*

При цьому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ називають *мажорантним рядом* для ряду (8).

Теорема (ознака Абеля. *Нехай ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *збігається рівномірно на множині* X*, а функції* $a_n(x)$*,* $n = 1, 2, \ldots$ *при кожному* $x \in X$ *утворюють монотонну послідовність і обмежені у сукупності, тобто* $\exists K > 0$ *таке, що* $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in X$ *виконується* $a_n(x) \leq K$*. Тоді ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *збігається рівномірно на множині* X*.*

Теорема (ознака Діріхле. *Нехай частинні суми* $B_n(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ *обмежені у сукупності, тобто* $\exists M > 0$ *таке, що* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $\forall x \in X$ *виконується* $B_n(x) \leq M$*, а функціональна послідовність* $\{a_n(x)\}$ *монотонно прямує до нуля рівномірно на множині* X*. Тоді ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ *збігається рівномірно на множині* X*.*

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Для послідовності* $f_n(x) = \frac{n+1}{n+x^2}$ *знайти область збіжності та граничну функцію.*

Розв'язок. *Обчислимо границю:*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+1/n}{1+x^2/n} = 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Отже, $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1, \ \forall x \in \mathbb{R}.$

Завдання 2. *Розглянемо послідовність* $f_n(x) = x^n$*. Множина її визначення:* $\mathbb{R}$*. Дослідити її на збіжність в кожній точці множини визначення.*

Розв'язок. *Розглянемо випадки:*

$$|x| < 1 \ \ \Rightarrow \ \ \lim_{n\to\infty} x^n = 0;$$

$$|x| > 1 \ \ \Rightarrow \ \ \lim_{n\to\infty} x^n = \infty;$$

$$|x| = 1 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} x^n = 1;$$
$$|x| = -1 \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{n\to\infty} x^n.$$

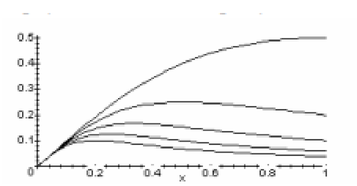
Отже, областю збіжності є проміжок $(-1;\ 1]$.

Завдання 3.

Завдання 4. *Дослідити на рівномірну збіжність функціональних послідовностей на множині* X*:*

1. $f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$, $X = [0;\ 1]$;
2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $X = [0;\ 1]$;
3. $f_n(x) = x^n$ $X = [0;\ 1]$
4. $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$, $X = (0;\ +\infty)$.

Розв'язок.



1. На рис. зображено декілька членів даної послідовності на $[0, 1]$*. Знайдемо граничну функцію:*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0.$$

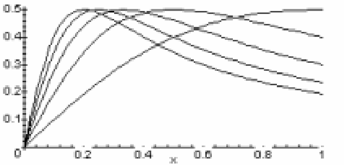
Доведемо, що $f_n(x) \underset{n\to\infty}{\rightrightarrows} 0$*, тобто*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \quad \forall n > N(\varepsilon,\ x) \quad \forall x \in [0;\ 1] \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Розглянемо нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *для* $x \in [0;\ 1]$ *маємо*

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \left|\frac{1}{2n}\right| \left|\frac{2nx}{1+n^2x^2}\right| \le \frac{1}{2n} < \varepsilon.$$

Остання нерівність виконується, починаючи з номера $N(\varepsilon) = \left[\frac{1}{2\varepsilon}\right] + 1$*. Знайдено номер, що залежить лише від* ε *, а від* $x \in [0;\ 1]$ *не залежить. Тому дана послідовність рівномірно збігається на* $[0;\ 1]$.



2. На рис. зображено декілька членів даної послідовності на $[0, 1]$*. Знайдемо граничну функцію:*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{nx\to\infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0.$$

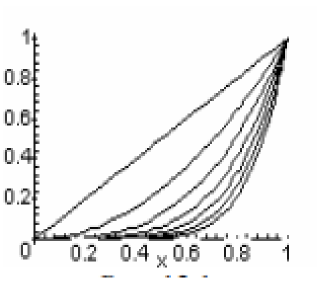
Розглянемо нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *для* $x \in [0;\ 1]$ *маємо*

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{nx}{1+n^2x^2}\right| \le \left|\frac{nx}{n^2x^2}\right| = \left|\frac{1}{nx}\right| = \frac{1}{nx} \Rightarrow N(\varepsilon, x) = \left|\frac{1}{\varepsilon x}\right| + 1.$$

Це підтверджує той факт, що функція $f(x) = 0$ є границею послідовності в кожній окремій точці відрізка. Однак, спільного номера серед $N(\varepsilon, x)$, який би не залежав від x знайти не можна. З зазначеної оцінки не можна зробити висновків щодо нерівномірної збіжності. Скористаємося теоремою і розглянемо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0;\ 1]}) \left| \frac{nx}{1+n^2x^2} \right| = \frac{1}{2}.$$

Отже, дана послідовність не рівномірно збігається до 0 на $[0;\ 1]$.



3. На рис. зображено декілька членів даної послідовності на $[0, 1]$. Граничною функцією є функція $f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;\ 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$ Нам потрібно перевірити, чи можливо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайти один, спільний для всіх значень $x \in [0;\ 1]$, номер N, що залежить лише від ε, починаючи з якого буде виконуватися нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$? Той факт, що для кожного фіксованого $x \in [0;\ 1]$ можна знайти свій номер N , який залежить і від ε і від x, випливає із означення границі послідовності $\{f_n(x)\}$ при фіксованому x. Якщо знайти для кожного фіксованого $x \in [0;\ 1]$ свій номер $N(\varepsilon, x)$, то спільним буде номер $N(\varepsilon) = \sup\limits_{x\in[0;\ 1]} N(\varepsilon, x)$. Доведемо, що для даної послідовності $N(\varepsilon) = \infty$. Це буде означати нерівномірну збіжність функціональної послідовності на $[0;\ 1]$. Розглянемо нерівність $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ для $(0;\ 1)$ маємо

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow n > \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/x)},$$

$$\sup_{x\in[0;\ 1]} \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/x)} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/x)} = \infty.$$

Що і доводить потрібне, а отже, дана послідовність не рівномірно збігається на $[0;\ 1]$.

4. Маємо

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x \operatorname{arctg} nx = \frac{\pi x}{2}.$$

Знайдемо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0;\ +\infty)} \left| x \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi x}{2} \right|.$$

Позначимо $r_n(x) = x \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi x}{2}$. *Диференціюємо функцію* $r_n(x)$ *і маємо*

$$r_n(x)' = \operatorname{arctg} nx + \frac{nx}{1+n^2x^2} - \frac{\pi}{2}.$$

Рівняння $r_n(x)' = 0$ *при кожному* n *має корінь* x_n.

$$r_n(x)' = 0 \quad \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} nx = \frac{nx}{1+n^2x^2}.$$

Обчислимо границі

$$\lim_{x\to+0} r_n(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} r_n(x) = \lim_{x\to+0} \frac{t}{n \operatorname{tg} t} = \frac{1}{n}, \quad (t = \frac{1}{x}).$$

$$r_n(x_n) = |x_n| \left|\operatorname{arctg} nx_n - \frac{\pi}{2}\right| = \frac{nx^2}{1+n^2x^2} < \frac{1}{n}$$

Таким чином

$$\sup_{x\in(0;\,+\infty)} \left|x \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi x}{2}\right| = \frac{1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0;\,+\infty)} \left|x \operatorname{arctg} nx - \frac{\pi x}{2}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Отже, дана послідовність рівномірно збігається на $(0;\,+\infty)$.

Завдання 5. *Знайти область збіжності функціональних рядів*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nx}\cdot n}$.

Розв'язок. *1. Кожен член ряду визначений на множині* $(-\infty;\,0)\bigcup(0;\,+\infty)$. *На цій множині ряд є геометричною прогресією із знаменником* $q = \frac{1}{x}$, *тому при* $|q| = \left|\frac{1}{x}\right| < 1$ *або* $|x| > 1$ *заданий ряд збіжний. Отже,* $(-\infty;\,-1)\bigcup(1;\,+\infty)$ – *область збіжності цього ряду.*

2. Заданий ряд визначений для будь-якого дійсного x, *причому незалежно від* x *члени цього ряду додатні. Застосуємо ознаку Д'Аламбера:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{(n+1)x}\cdot(n+1)} \cdot \frac{2^{nx}\cdot n}{1} = \frac{1}{2^x} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2^x} = l(x).$$

Оскільки ряд збігається, якщо $l(x) < 1$, *то розв'язуємо нерівність*

$$\frac{1}{2^x} < 1 \quad \Rightarrow \quad 2^x > 1 \quad \Rightarrow \quad x > 0.$$

При $x = 0$ *виконується умова* $l(x) = 1$, *тому перевіримо в цій точці заданий ряд на збіжність:* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – *розбіжний ряд.*

Отже, область збіжності заданого ряду $(0;\,+\infty)$.

Завдання 6. *Дослідити на рівномірну збіжність функціональні ряди*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)}$, $\quad x \in (0;\ +\infty)$; *3.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n(n+x)}}, x \in [0;\ +\infty)$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^3}$; *4.* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, $\quad x \in (0;\ +\infty)$;

Розв'язок. *1. Знайдемо часткову суму даного ряду*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{(k-1)x+1} - \frac{1}{kx+1} \right) = 1 - \frac{1}{nx+1}.$$

Для послідовності $S_n(x)$ знайдемо граничну фубнкцію:

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{nx+1}\right) = 1.$$

Розглянемо

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0;\ +\infty)} |S_n(x) - S(x)| = \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(0;\ +\infty)} \left|\frac{1}{nx+1}\right| = 1,$$

отже, послідовність $S_n(x)$ не рівномірно збігається до $S(x)$, а отже ряд теж не рівномірно збіжний на $(0;\ +\infty)$.

2. Ряд визначений для всіх $x \in \mathbb{R}$ і є знакозмінним функціональним рядом. Застосуємо ознаку Вейєрштрасса. Збіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ є мажорантним для вихідного ряду. Члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos nx|}{n^3}$ утвореного із модулів членів вихідного ряду, задовольняють нерівності $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right| \le \frac{1}{n^3}$ при всіх $x \in \mathbb{R}$. Тому за ознакою Вейєрштрасса заданий ряд збігається абсолютно і рівномірно на всій числовій прямій, тобто при $x \in \mathbb{R}$.

3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ збіжний за ознакою Лейбніца, а функції $(1+\frac{x}{n})^{-\frac{1}{2}}$ обмежені числом 1 при кожному фіксованому $x \ge 0$ і утворюють монотонну послідовність. Відповідно за ознакою Абеля, даний ряд є рівномірно збіжним.

4. Оскільки $\left|\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\right| \leq 1$, *а послідовність* $\frac{1}{n+x}$ *рівномірно за* x *і монотонно за прямує до нуля при* $n \to \infty$ $\left(\frac{1}{x+n} < \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\right)$ *то за ознакою Діріхле, даний ряд збігається рівномірно.*

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. *Дослідити на рівномірну збіжінсть функціональні послідовності:*

1. $f_n(x) = \frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}, \quad x \in (0;\ 1);$
2. $f_n(x) = nxe^{-nxe^2}, \quad x \in [0;\ 1];$
3. $f_n(x) = x^2e^{-xn}, \quad x \in [0;\ +\infty);$
4. $f_n(x) = 2^{-(x^2+n)}, \quad x \in (-1;\ 1);$
5. $f_n(x) = 1 - \sin\frac{x}{n}, \quad x \in [0;\ 1];$
6. $f_n(x) = x^2e^{-nx}, \quad x \in [0;\ +\infty);$
7. $f_n(x) = xe^{-nx}, \quad x \in [0;\ 1];$
8. $f_n(x) = e^{-(x-n)^2}, \quad x \in [-2;\ 2];$
9. $f_n(x) = e^{n(x-1)}, \quad x \in (0;\ 1);$
10. $f_n(x) = \operatorname{arctg}\frac{x}{n^2}, \quad x \in [0;\ +\infty);$
11. $f_n(x) = x^n - x^{n-1}, \quad x \in [0;\ 1];$
12. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n}, \quad x \in [0;\ \frac{1}{2}];$
13. $f_n(x) = x^n - x^{2n}, \quad x \in [0;\ 1]$
14. $f_n(x) = \frac{x}{1+n^3x^2}, \quad x \in (0;\ 1).$

Завдання 2. *Знайти область збіжності функціонального ряду:*

1. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n^2}(2+x)^{n^2};$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n;$

2. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln x^n;$

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\sin^n x}{n^2};$

3. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{x}{2n}x^n$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^n$;

4. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{\ln^3(n+1)}}{n+1}(x+1)^n$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n}$;

5. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\sin nx}{1+n^5}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2-x)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$;

6. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^n$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3-2x)^n}{n-\ln^2 n}$;

7. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n\cdot 3^{2n}}{2^n}x^n(1-x)^n$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+x^4}$;

8. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}e^{-n\sin x}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nx}}\frac{x^n}{2^n}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$;

9. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{nx}}$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2x^n}{3^n}$;

10. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{x}{1+x}\right)^n$;

    (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{(1-n)x}$;

11. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n+x^n}$;

    (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos nx$;

12. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$;

    (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{2x+1}{x}\right)^n$;

13. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\left(\frac{2x-3}{4}\right)^n$;

    (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(x+n)^n}$;

14. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln^n nx}{n}$;

    (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1+x^{2n}}$.

Завдання 3. *Дослідити на рівномірну збіжність функціональні ряди:*

1. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(1+x^2)^n}, \quad x\in[0;\ +\infty)$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{\sqrt[3]{n^4+x}}, \quad x\in(0;\ 1)$;

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos\frac{2\pi n}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}, \quad x\in\mathbb{R}$;

2. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^5x^2}, \quad x\in(0;\ 1)$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x^n}{n}-\frac{x^{n+1}}{n+1}\right), \quad x\in[-1;\ 1]$;

   (c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sin x}, \quad x\in[0;\ 2\pi)$;

3. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-nx}, \quad x\in(0;\ +\infty)$;

   (b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln\left(a+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right), \ x\in[-2;\ 2]$;

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x^2+n^2}, \quad x \in (0;\ +\infty);$

4. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(nx+3)(nx+x+3)},\ x \in (0;\ +\infty);$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3nx}{\sqrt{x^2+n^3}}, \quad x \in \mathbb{R};$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\cos 2x}, \quad x \in [0;\ 2\pi);$

5. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1-x)x^n, \quad x \in (-1;\ 1);$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^2}, \quad x \in \mathbb{R};$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x \sin \frac{n\pi}{3}}{x^2+n^2},\ x \in [-1;\ 1];$

6. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos x^n}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R};$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad x \in (0;\ +\infty);$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+\sqrt{x}}, \quad x \in [0;\ +\infty);$

7. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R};$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n - x^{-n}),\ x \in [\frac{1}{2};\ 2];$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{nx}{12}}{x^2+n^2}, \quad x \in \mathbb{R};$

8. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2nx}{1+n^2x^2} - \frac{2(n+1)x}{1+(n+1)^2x^2} \right), \quad x \in [0;\ 1];$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^3+x^4}}, \quad x \in \mathbb{R};$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{x+n}, \quad x \in [0;\ 1]);$

9. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{nx+1}}, \quad x \in (0;\ +\infty);$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}, \quad x \in (0;\ +\infty);$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x+3^n} \quad x \in (-3;\ 3);$

10. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(nx^n - (n-1)x^{n-1}\right), \quad x \in [0;\ 1];$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{x+2^n}, \quad x \in (-2;\ +\infty);$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+n^2}}, \quad x \in \mathbb{R};$

11. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{nx}{e^{nx-1}} - \frac{(n-1)x}{e^{(n-1)x-1}} \right), x \in \mathbb{R};$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n},\ x \in \left[\frac{\pi}{6; \frac{\pi}{2}} \right);$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}x^2}{(1+x^2)^n},\ x \in \mathbb{R};$

12. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{n},\ x \in \mathbb{R};$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{1+n^7x^2},\ x \in \mathbb{R};$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{3}}{\sqrt{n+x}},\ x \in (0;\ +\infty);$

13. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^(n+1)}{\sqrt[3]{n+x^2+x^2}},\ x \in \mathbb{R};$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+x^2}{n^2}, \quad x \in [-2;\ 2];$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+\cos x},\ x \in \mathbb{R};$

14. (a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2(1-x^2)^{n-1}, \quad x \in [-1;\ 1];$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+(x-\ln n)^2}\ x \in \mathbb{R};$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin \frac{x^2}{n \ln^2 n}, \quad x \in [-2;\ 2].$

Властивості рівномірно збіжних функціональних рядів.

Теоретичні питання.

Розглянемо функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x), \quad x \in X. \tag{9}$$

1. Якщо функціональний ряд (9) рівномірно збіжний на деякому проміжку I і члени цього ряду — неперервні функції на I, то сума цього ряду є функція, неперервна на цьому проміжку.

2. Якщо функціональний ряд (9) рівномірно збіжний на деякому проміжку I і існує $\lim\limits_{x \to x_0} f_n(x) = c_n$, де $x_0 \in I$, то числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ є збіжним то в кокжній точці проміжка $x_0 \in I$ справедлива формула:
$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.$$

3. Якщо функціональний ряд (9) збіжний на проміжку I, його члени на цьому проміжку мають неперервні похідні $f_n'(x)$ $n = 1,\ 2,\ \ldots$, причому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ рівномірно збіжний на проміжку I, то заданий ряд можна почленно диференціювати, тобто
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x), \quad x \in I.$$

4. На будь-якому відрізку, що належить проміжку I рівномірної збіжності функціонального ряду , члени якого — неперервні функції на I, цей ряд можна почленно інтегрувати, тобто на проміжку $[\alpha;\ \beta] \subset I$ справджується рівність:
$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\alpha}^{\beta} f_n(x) dx.$$

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Дослідити на неперервність функцію* $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln^2(x^2+n)}$.

Розв'язок. *Очевидно, що кожна з функцій* $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n \ln^2(x^2+n)}$ *при довільному* $n \in \mathbb{N}$ *є неперервною функцією на* $\mathbb{R}$. *Даний функціональний ряд є ріномірно збіжним на* $\mathbb{R}$, *так як мажорується збіжним числовим рядом* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n)}$. *Тому, згідно теореми про неперервність суми рівномірно збіжного ряду,* $S(x)$ *– непервна функція на* $\mathbb{R}$.

Завдання 2. *Обчислити* $\lim\limits_{x \to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n}$.

Розв'язок. *Функціональний ряд, що знаходиться під знаком границі є рівномірно збіжним за ознакою Абеля в облісті* $x \geq 1$. *Крім того,*

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{(-1)^{n+1}}{2n},$$

тому можливий граничний перехід під знаком суми:

$$\lim_{x \to 1-0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \frac{x^n}{1+x^n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \frac{1}{2} \ln n.$$

Завдання 3. *Чи можливе почленне диференціювання рядів*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{arctg} \frac{x}{n}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$?

Розв'язок. *1. Ряд є збіжним і члени ряду є неперервно диференційовні функції. Продиференціюємо формально ряд:* $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)}$. *Отриманий ряд є рівномірно збіжним, оскільки він мажорується збіжним числовим рядом* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. *Тому почленне диференціювання ряду можливе.*

2. Даний ряд є збіжним, навіть рівномірно збіжним, але якщо формально продиференціюємо даний ряд, то отримаємо розбіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n}$, *наприклад при* $x = 0$. *Отже, почленне диференціювати ряд не можна.*

Завдання 4. *Знайти* $\int\limits_0^\pi S(x)dx$, *якщо* $S(x) = \sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{\cos nx}{n \ln n \ln^2 \ln n}$.

Розв'язок. *Даний функціональний ряд є рівномірно збіжним на всій числовій прямій* $\mathbb{R}$, *так як мажорується збіжним числовим рядом* $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \ln^2 \ln n}$.. *Члени функціонального ряду – неперервні функції на* $\mathbb{R}$. *Отже, даний ряд можна почленно інтегрувати. Маємо*

$$\int\limits_0^\pi S(x)dx = \sum_{n=3}^{\infty} \int\limits_0^\pi \frac{\cos nx}{n \ln n \ln^2 \ln n} dx = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2 \ln n \ln^2 \ln n}\Big|_0^\pi = 0.$$

Завдання 5. *Знайти суми рядів*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos^{n+1} x}{n(n+1)}$;

2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$, $\quad |x| < 1$?

Розв'язок. *1. Даний функціональний ряд є рівномірно збіжним на всій числовій прямій* $\mathbb{R}$, *оскільки він мажорується збіжним числовим рядом* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. *Але для подальшого застосування теореми про почленне диференціювання, будемо вважати, що* $x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{N}$. *Позначимо шукану суму:* $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos^{n+1} x}{n(n+1)}$. *Тоді*

$$S'(x) = \sin x \cdot S_1(x), \quad S_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos^n x}{n}.$$

$$S_1'(x) = \sin x \cdot S_2(x), \quad S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos^{n-1} x.$$

Оскільки $S_2(x)$ *є сумою нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом* $b_1 = 1$ *та знаменником* $q = -\cos x$, *то маємо*

$$S_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cos^{n-1} x = \frac{1}{1 + \cos x}.$$

Тому

$$S_1(x) = \int\limits_0^x \frac{\sin t}{1 + \cos t} dt = \int\limits_0^x \frac{d(\cos t)}{1 + \cos t} = -\ln(1 + \cos x) + \ln 2.$$

Тоді

$$S'(x) = -\sin x \cdot \ln(1 + \cos x) + \ln 2 \cdot \sin x.$$

$$S(x) = -\int\limits_0^x \sin t \cdot \ln(1+\cos t)dt + \ln 2 \int\limits_0^x \sin t dt =$$

$$= \int\limits_0^x \ln(1+\cos t) d(1+\cos t) - \ln 2 \cdot (\cos x - 1) =$$

$$= ((1+\cos t)\ln(1+\cos t) - (1+\cos t))\,|_0^x - \ln 2 \cdot (\cos x - 1) =$$

$$= (1+\cos x)\ln(1+\cos x) - (1+\cos x) - 2\ln 2 + 2 - \ln 2 \cdot \cos x + \ln 2 =$$

$$= (1+\cos x)\ln(1+\cos x) - (1+\ln 2)\cos x + 1 - \ln 2, \quad x \neq k\pi, \ k \in \mathbb{N}.$$

2. *Позначимо* $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$. *Даний функціональний ряд є збіжним. Розглянемо*

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots .$$

Цю суму можна розглядати як геометричну прогресію з першим членом $b_1 = 1$ *і знаменником* $q = -x^2$. *Знайшовши суму геометричної прогресії, отримаємо:*

$$S'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Інтегруючи цю рівність на відрізку $(0;\ x) \subset (-1;\ 1)$, *маємо:*

$$\int\limits_0^x S'(t)dt = \int\limits_0^x \frac{1}{1+t^2}dt = \operatorname{arctg} t|_0^x = \operatorname{arctg} x.$$

Отже,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = \operatorname{arctg} x.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. *Дослідити на неперервність такі функції:*

1. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{1+n^2}, \quad x \geq 0;$
2. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}, \quad x > 0;$
3. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4+x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$
4. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt[4]{n^5+x^6}} \quad x \in \mathbb{R};$
5. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^{n^2} x}{2^{n^2}}, \quad x \in \mathbb{R};$
6. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{2\pi nx}{3}}{\sqrt{n^2+x^2}}, \quad x \in \mathbb{R};$
7. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}, \; |x| \leq \frac{1}{3};$
8. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin \frac{1}{n^2+x^2}, \quad x \in \mathbb{R};$
9. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n}, \quad x \in \left[\frac{\pi}{6}; \; \frac{\pi}{3}\right];$
10. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot n^2}, \quad |x| \geq 2;$
11. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2+x^4}, \quad x \in \mathbb{R};$
12. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R};$
13. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 3nx}{\sqrt[5]{x^2+n^12}}, \quad x \in \mathbb{R};$
14. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}, \quad x \geq 0.$

Завдання 2. *Чи можливе почленне диференціювання рядів?*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R};$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R};$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos \frac{x}{n}, \quad x \in \mathbb{R};$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R};$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n e^{-nx}}{1+n^2}, \quad x > 0;$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}, \quad x \in \mathbb{R};$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1+n^3}, \quad x \in \mathbb{R};$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 x}{n^4+1}, \quad x \in \mathbb{R};$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^{5/2}+n}, \quad x \in \mathbb{R};$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}} \sin \frac{x}{\sqrt{n}}, \quad x \in \mathbb{R};$
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x}{n+x}, \quad x > 0;$
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{n} x}{n^2+n}, \quad x \in \mathbb{R};$
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\pi nx}, \quad x > 0;$
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{x}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$

Завдання 3. *Дослідіть ряди на можливість почленного інтегрування:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(x^{\frac{1}{2n+1}} + x^{\frac{1}{2n-1}}\right), \; x \in [0,1].$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R};$

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2+\cos x)^n}{n!}, \quad x \in \mathbb{R};$

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n^2 x}{2^n}, \quad x \in \mathbb{R};$

   Знайдіть границі:

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{1+n^2x^2};$

6. $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (x^n - x^{n+1});$

7. $\lim\limits_{x\to 1-0} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n;$

8. $\lim\limits_{x\to 1} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^x};$

   Використовуючи почленне інтегрування функціональних рядів, знайдіть суми рядів:

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^n}{2^{n+1}}, \;\; |x| < 2;$

10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)x^{n-1}}{3^{n+1}}, \;\; |x| < 3;$

11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} n^2;$

12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1} n 3^{n-1}, \;\; |x| < \frac{1}{4};$

13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (2n+1) x^{2n};$

14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n (3n-1) x^{3n-1}.$

Завдання 4. *Знайти суми рядів:*

1. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$;
2. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;
3. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{3n+1}$;
4. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3}$;
5. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^n}, \ |x| < 2$;
6. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{(2n-1)n}$;
7. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)n}$;
8. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{-}n}{(n+1)n}$;
9. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1}$;
10. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-1}}{3n-1}$;
11. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)n}$;
12. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 3^n}, \ |x| < 3$;
13. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$;
14. $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n-3)(2n02)}$.

Степеневі ряди.

Теоретичні питання.

1. ***Радіус збіжності, інтервал збіжності та область збіжності степеневого ряду.***

   Означення. *Функціональний ряд вигляду*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots a_n x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \qquad (10)$$

Функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \cdots a_n(x-x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad (11)$$

де $a_0,\ a_1,\ a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – *дійсні числа,* x_0 *— деяке стале число, є степеневим рядом за степенями двочлена* $x - x_0$.

Теорема (Абеля). *Якщо степеневий ряд (10) збігається у точці* $x = x_1 \neq 0$, *то він абсолютно збіжний для всіх значень* x, *що задовольняють нерівність* $|x| < |x_1|$.

Наслідок. *Якщо ряд (10) розбігається у точці* $x = x_2$, *то він розбігається і для всіх значень* x, *що задовольняють нерівність* $|x| > |x_2|$. Для ряду можливі наступні три випадки:

- ряд (10) збіжний лише в одній точці $x = 0$;
- ряд збіжний для будь-якого $x \in (-\infty;\ +\infty)$;
- існує таке додатне число R, що при $|x| < R$ ряд абсолютно збіжний, а при $|x| > R$ — розбіжний.

Число R називають радіусом збіжності степеневого ряду.

Радіус збіжності степеневих рядів (10) та (11) визначають за формулами:

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Зауваження. Якщо $0 < R < +\infty$, то в цьому випадку степеневий ряд у точках, які є кінцями інтервалу збіжності, може збігатися або розбігатися. Підставляючи по черзі у заданий ряд (10) точки $x = -R,\ x = R$ чи у ряд (11) точки $x = -R + x_0,\ x = R + x_0$, досліджують утворені числові ряди на збіжність.

2. Властивості степеневих рядів

   - Степеневий ряд (10) абсолютно і рівномірно збігається на будь-якому відрізку $[-a;\ a]$, який цілком міститься в інтервалі збіжності $(-R;\ R)$.
   - Сума $S(x)$ степеневого ряду (10) неперервна функція на проміжку $(-R;\ R)$.
   - *(Про почленне диференціювання.)* Степеневий ряд усередині інтервалу збіжності можна почленно диференціювати. Ряд, утворений диференціюванням, має той самий інтервал збіжності, причому, якщо $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то $S'(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1}$.

- *(Про почленне інтегрування.)* На будь-якому відрізку, що належить інтервалу збіжності $(-R;\ R)$, степеневий ряд можна почленно інтегрувати. Зокрема, якщо відрізок інтегрування $[0;\ x] \subset (-R;\ R)$ і $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, то

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

  причому утворений після інтегрування ряд має той самий інтервал збіжності.

- Степеневі ряди $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ та $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ із радіусами збіжності R_1 та R_2 відповідно можна почленно додавати, віднімати, перемножувати. Радіус збіжності утворених рядів не менший, ніж менше з чисел R_1 та R_2.

3. ***Ряди Тейлора та Маклорена.***

Нехай функція $f(x)$ має в точці x_0 і деякому її околі похідні всіх порядків. Ряд вигляду

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots +$$

$$\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

називають *рядом Тейлора* функції $f(x)$.

Частинний випадок ряду Тейлора, коли $x_0 = 0$, називають *рядом Маклорена* — розвинення функції у степеневий ряд за степенями x

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \frac{f'''(0)}{3!}(x)^3 + \cdots \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + \cdots =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n.$$

Наведемо розвинення деяких елементарних функцій у ряд Маклорена:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, |x| < \infty,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} - \ldots, |x| < \infty,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n}}{(2n)!} - \ldots, |x| < \infty,$$

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} - \ldots, x \in (-1; 1],$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + \ldots, |x| < 1,$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{2n-1} - \cdots, |x| \le 1,$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, |x| < 1,$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, |x| < 1,$$

4. ***Застосування степеневих рядів для наближених обчислень значень функцій.***

Для наближених обчислень значень функцій використовують розвинення основних елементарних функцій у степеневі ряди. Для наближеного обчислення значення функції у точці x0 у розвинення функції підставляють замість x значення x0 і за наближене значення функції у цій точці беруть суму перших n доданків розвинення. Похибка при цьому буде менша за перший відкинутий доданок у випадку ряду, лейбніцового а інакше обчислюється за допомогою формули залишкового члена ряду.

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневих рядів:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2 (x-2)^n}{n+2}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n!}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n x^{2n}$.

Розв'язок. *1.*

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)^2}{n+2} \cdot \frac{n+3}{n^2} = 1.$$

Оскільки $x_0 = -2$, то інтервал збіжності: $(-3;\ -1)$. При $x = -3$ та $x = -1$ маємо відповідні ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2(-3)^n}{n+2}$ та $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{n+2}$ кожен з яких є розбіжним за достатньою ознакою розбіжності числового ряду. Тому область збіжності даного функціонального ряду – це інтервал $(-3;\ -1)$.

2.

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{2n+1}}} = 1.$$

отже,$(-1;\ 1)$ – інтервал збіжності даного ряду. Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу. При $x = -1$ маємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2+1n}$, який є збіжним за ознакою Лейбніца. При $x = 1$ дістаємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{2n+1}$ який є розбіжним за ознакою порівняння з гармонічним рядом. Таким чином, областю збіжності даного ряду є проміжок $[-1;\ 1)$.

3.

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Це означає, що областю збіжності даного функціонального ряду є одна точка $x = 0$.

4. Ряд містить тільки парні степені x. Позначивши $x^2 = t \geq 0$, дістанемо степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n t^n$, радіус збіжності якого визначаємо за формулою:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2.$$

Утворений після заміни ряд збігається при $t \in (-2;\ 2)$. Враховуючи обмеження $t \geq 0$, дістанемо $t \in (-2;\ 2)$, тобто у точці $t = 0$ цей ряд збіжний. Дослідимо його на правому кінці інтервалу збіжності. При $t = 2$, дістанемо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n 2^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$. Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{e}} \neq 0,$$

то не виконується необхідна умова збіжності ряду, тому при $t = 1$ ряд розбігається. Тому, утворений після заміни ряд збіжний на проміжку $[0;\ 2)$.

Повернувшись до заміни $x^2 = t$, визначимо область збіжності вихідного ряду:

$$x^2 \in [0;\ 2) \implies |x| < \sqrt{2} \implies -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}.$$

Таким чином, областю збіжності даного ряду є проміжок $[-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$.

Завдання 2. *Знайти суми рядів:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)x^{n+2}$.

Розв'язок. *1. Запишемо відому рівність (сума геометричної прогресії із знаменником x)*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} x^n, \quad -1 < x < 1.$$

Степеневий ряд в його інтервалі збіжності можна диференціювати почленно. Тому

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}, \quad -1 < x < 1.$$

Помноживши праву і ліву частини останньої рівності на x, отримаємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}, \quad -1 < x < 1.$$

2. Перепишемо ряд, який заданий за умовою, у вигляді:

$$S(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}}{n(n+2)}$$

та знайдемо його область збіжності.

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{n(n+2)}}} = 1,$$

звідки одержимо інтервал збіжності $x \in (-1;\ 1)$. Оскільки заданий за умовою ряд є абсолютно збіжним при $x = \pm 1$, то область збіжності цього ряду – це відрізок $[-1;\ 1]$. Степеневий ряд в його інтервалі збіжності можна диференціювати почленно. Тому

$$S'(x) = \left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+2}}{n(n+2)}\right)' = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n}.$$

або

$$S'(x) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{n} = 2x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{n}}{n} = 2xS_1(x),$$

$$S_1'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1} \implies S_1'(x) = \frac{1}{1+x} \implies$$

$$S_1(x) = \int\limits_0^x \frac{1}{1+x}dt = \ln(1+x), \ \ x \in (-1;\ 1).$$

Тоді

$$S'(x) = 2x\ln(1+x) \implies$$

$$S(x) = 2\int\limits_0^x t\ln(1+t) = 2\left(\frac{t^2}{2}\ln(1+t)|_0^x - \frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{(t^2-1)+1)}{1+t}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{x^2}{2}\ln(1+x) - \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x)\right) =$$

$$= (x^2-1)\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x, \ \ x \in (-1;\ 1).$$

Отже,

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)x^{n+2} = (x^2-1)\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x, \ \ x \in (-1;\ 1).$$

Завдання 3. *Розвинути у ряд Тейлора або Маклорена функції у вказаних точках:*

1. $f(x) = e^{-x^2}, \ \ x_0 = 0;$
2. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-x}}, \ \ x_0 = 0;$
3. $f(x) = \ln x, \ \ x_0 = 2;$
4. $f(x) = 2^x \ \ x_0 = 0;$

Розв'язок. *1. У розвиненні в ряд Маклорена функції $f(x) = e^x$ замінимо x на $-x^2$:*

$$e^{-x^2} = 1 + (-x^2) + \frac{(-x^2)^2}{2!} + \frac{(-x^2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(-x^2)^n}{n!} + \cdots =$$

$$= 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{n!} + \cdots .$$

2. *Запишемо* $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+2x}{1-x}}$ *у вигляді:*

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+2x}{1-x} = \frac{1}{2}\ln(1+2x) - \frac{1}{2}\ln(1-x).$$

Для розкладу функції у ряд Маклорена використаємо формулу для $f(x) = ln(1+x)$*, в якій для першого доданку функції замінимо* x *на* $2x$*, для другого – * x *на* $-x$*, а потім отримані ряди віднімемо.*

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln(1+2x) - \frac{1}{2}\ln(1-x) ==$$

$$\frac{1}{2}\left(2x - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} - \cdots\right) - \frac{1}{2}\left(x - \frac{(-x)^2}{2} + \frac{(-x)^3}{3} - \cdots\right) =$$

$$= x - x^2 + \frac{4x^3}{3} - \cdots - \frac{1}{2}x + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{6} + \cdots = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x^3 + \cdots .$$

3. *Запишемо* $f(x) = \ln x$ *у вигляді:*

$$f(x) = \ln x = \ln(2 + x - 2) = \ln 2\left(1 + \frac{x-2}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1 + \frac{x-2}{2}\right).$$

У розкладі функції $f(x) = ln(1+x)$ *замінимо* x *на* $\frac{x-2}{2}$ *і до результату додаємо* $\ln 2$*. Отримаємо*

$$\ln x = \ln 2 + \frac{x-2}{2} + \frac{(x-2)^2}{2^2\cdot 2} + \frac{(x-2)^3}{2^3\cdot 3} + \frac{(x-2)^4}{2^4\cdot 4} + \cdots + \frac{(x-2)^n}{2^n\cdot n} + \cdots .$$

Визначимо, при яких значеннях x *ряд збігається:*

$$-1 < \frac{x-2}{2} \le 1 \implies -2 < x - 2 \le 2 \implies 0, x \le 4.$$

Отже, область збіжності ряду є проміжок $(0;\ 4]$.

4. *Використаємо формулу для функції* $f(x) = e^x$*, попередньо записавши функцію* $f(x)2^x$ *вигляді:* $f(x) = e^{\ln 2^x} = e^{x\ln 2}$.

$$2^x = e^{x\ln 2} = 1 + x\ln 2 + \frac{(x\ln 2)^2}{2!} + \frac{(x\ln 2)^3}{3!} + \cdots + \frac{(x\ln 2)^n}{n!} + \cdots =$$

$$= 1 + x\ln 2 + \frac{x^2\ln^2 x}{2!} + \frac{x^3\ln^3 x}{3!} + \cdots + + \frac{x^n\ln^n x}{n!} + \cdots .$$

Завдання 4. *Обчислити із точністю до 0,001:*

1. e;

2. $\cos 1$;

3. $\sqrt[3]{30}$;

4. $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2} dx$.

Розв'язок. *1. У розвиненні в ряд Маклорена функції $f(x) = e^x$ візьмемо $x = 1$, отримаємо*

$$e^1 = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!}\frac{1}{3!} + \cdots \frac{1}{n!} + \cdots .$$

Візьмемо n доданків та оцінимо похибку $R_n(x)$:

$$R_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots =$$

$$= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \dots\right) <$$

$$< \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}}\right) = \frac{1}{n! \cdot n},$$

тобто

$$R_n(x) \le \frac{1}{n! \cdot n}.$$

Потрібно підібрати найменше натуральне число n, щоб виконувалась нерівність $\frac{1}{n! \cdot n} < 0,001$. Неважко з'ясувати, що ця нерівність виконується при $n \ge 6$. Тому маємо:

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} \approx 2,718.$$

2. Користуючись розкладом функції $f(x) = \cos x$ в степеневий ряд, можна записати:

$$\cos 1 = \cos\frac{\pi}{180} = 1 - \frac{\pi^2}{180^2 \cdot 2!} + \frac{\pi^4}{180^4 \cdot 4!} - \cdots .$$

Оскільки цей ряд задовольняє умовам теореми Лейбніца, а його другий член вже менший за $0,001$, то $\cos 1^\circ \approx 1$ із точністю до $0,001$.

3. Знайдемо найближче за величиною до числа 30 число, з якого точно добувається корінь кубічний, та запишемо:

$$\sqrt[3]{30} = \sqrt[3]{27+3} = \sqrt[3]{27\left(1 + \frac{1}{9}\right)} = 3\sqrt[3]{1 + \frac{1}{9}} = 3\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

У розвиненні в ряд Маклорена функції $f(x) = (1+x)^\alpha$ *візьмемо* $x = \frac{1}{9} \in (-1;\ 1)$, $\alpha = \frac{1}{3}$, *отримаємо*

$$\sqrt[3]{30} = 3\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2 + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)\left(\frac{1}{3}-2\right)}{3!}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^3 + \cdots\right) =$$

$$3\left(1 + \frac{1}{27} - \frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!\cdot 9^2} + \frac{1\cdot 2\cdot 4}{3^3\cdot 3!\cdot 9^3} - \cdots\right).$$

Оскільки цей ряд задовольняє умовам теореми Лейбніца, причому

$$\frac{1\cdot 2}{3^2\cdot 2!\cdot 9^2} < 0,001 < \frac{1\cdot 2\cdot 4}{3^3\cdot 3!\cdot 9^3},$$

то для того, щоб одержати результат із необхідною точністю, треба взяти три перших доданки. Таким чином,

$$\sqrt[3]{30} \approx 3\left(1 + \frac{1}{27} - \frac{1}{729}\right) = \frac{2265}{729} \approx 3,107.$$

4. *Розкладемо підінтегральну функцію в ряд Маклорена застосовуючи формулу для функції* $f(x) = e^x$, *замінюючи* x *на* $-x^2$. *Будемо мати:*

$$e^{-x^2} == 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots.$$

Інтегруючи обидві частини останньої рівності на відрізку $\left[0;\ \frac{1}{4}\right]$, *що лежить всередині інтервалу збіжності* $(-\infty;\ \infty)$, *отримаємо:*

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx = \int_0^{\frac{1}{4}} \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \cdots\right)dx =$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5\cdot 2!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \cdots\right)\Big|_0^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{4^3\cdot 3} + \frac{1}{4^5\cdot 5\cdot 2!} - \frac{1}{4^7\cdot 7\cdot 3!} + \cdots.$$

Це знакопереміжний ряд, який задовольняє всі умови теореми Лейбніца. Оскільки $\frac{1}{4^3\cdot 3} = 0,0052 > 0,001$, *а* $\frac{1}{4^5\cdot 5\cdot 2!} < 0,001$, *то з точністю до 0,001 маємо:*

$$\int_0^{\frac{1}{4}} e^{-x^2}dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{192} = 0,245.$$

Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. *Знайти радіус, інтервал та область збіжності степеневих рядів:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n \ln(n+1)x^n;$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n;$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n^n}}{(n+1)^n}x^n;$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n!}};$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}x^n;$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^{n^2}}x^n;$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n)!}x^n;$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}};$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!};$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)};$
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}x^n;$
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{2n-1}x^n;$
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n x^n;$
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}x^n.$

Завдання 2. *Знайти суми степеневих рядів:*

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-1}}{2n-1};$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1};$
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-3}}{4n-3};$
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)};$
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{3n-2}}{3n-2};$
6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\cdot 2^n};$
7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-2}}{2n-2};$
8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{2n-1};$
9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^{2n-5}}{2n-5};$
10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n;$
11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)};$
12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n\cdot x^{n+1}}{n!(n+1)};$
13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{(4n-2)x^{4n-3}}{(2n-1)!};$
14. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n-2}}{3n-2}.$

Завдання 3. *Розвинути у ряд Тейлора або Маклорена функції у вказаних точках:*

1. $f(x) = \cos^2 x \quad x_0 = 0;$
2. $f(x) = \frac{x^10}{2-x} \quad x_0 = 0;$
3. $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \quad x_0 = 0;$
4. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad x_0 = 0;$
5. $f(x) = \frac{x}{1+x+2x^2} \quad x_0 = 2;$
6. $f(x) = \sin^2 x \quad x_0 = 0;$
7. $f(x) = 3^{2x} \quad x_0 = 0;$
8. $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} x \quad x_0 = 0;$
9. $f(x) = x(\ln x - 1) \quad x_0 = 1;$
10. $f(x) = \frac{2}{3-x} \quad x_0 = 0;$
11. $f(x) = \ln(4-x) \quad x_0 = 0;$
12. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x}} \quad x_0 = 0;$
13. $f(x) = \sqrt[3]{1+x^2} \quad x_0 = 0;$
14. $f(x) = \frac{x}{x+4} \quad x_0 = 0.$

Завдання 4. *Обчислити із точністю до 0,001:*

1. (a) $\sin 18°;$
   (b) $\ln 1,2;$
   (c) $\int\limits_1^2 \frac{\cos x}{x^2} dx;$
2. (a) $\frac{1}{\sqrt[5]{e}};$
   (b) $\sqrt[3]{150};$
   (c) $\int\limits_0^{1/2} \sqrt{1+x^3} dx;$
3. (a) $\cos\frac{2}{9};$
   (b) $\sqrt[3]{e};$
   (c) $\int\limits_0^2 \frac{\cos x}{x};$
4. (a) $\ln 5;$
   (b) $\sqrt[5]{33};$
   (c) $\int\limits_0^{1/3} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^2}};$
5. (a) $\ln 7;$
   (b) $\cos 12°;$
   (c) $\int\limits_0^1 e^{-x^2} dx;$
6. (a) $\frac{1}{\sqrt[4]{e}};$
   (b) $\sin 1,5;$
   (c) $\int\limits_2^4 e^{\frac{1}{x}} dx;$
7. (a) $\ln\frac{4}{8};$
   (b) $\cos 10°;$
   (c) $\int\limits_0^2 \frac{\sin x}{x} dx;$
8. (a) $\sqrt[3]{1,015};$
   (b) $e^{-11};$
   (c) $\int\limits_{10}^{100} \frac{\ln(1+x)}{x} dx;$
9. (a) $\sqrt[3]{500};$
   (b) $\ln\frac{4}{9};$
   (c) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}};$
10. (a) $\sqrt{e};$

(b) $\sin\frac{\pi}{4}$;

(c) $\int\limits_0^1 \cos x^2$;

11. (a) $\sin 12^\circ$;

(b) $\sqrt{15}$;

(c) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x}{x}$;

12. (a) $\ln 2$;

(b) $\sqrt[3]{70}$;

(c) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^x}{x}$;

13. (a) $\ln 3$;

(b) $\cos 10^\circ$;

(c) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{1+x^4}$;

14. (a) $\sin 0,5$;

(b) $\frac{1}{e}$;

(c) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$.

Література

[1] Гайдей В. О., ФедороваЛ. Б. І., Алєксєєва В.,Диховичний О. О.. Диференціальне та інтегральне числення функцій однієї змінної. Конспект лекцій. (І курс І семестр). – К: НТУУ «КПІ», 2013. 104 с.

[2] Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник: У двох частинах. Частина 1.– К.: Либідь, 1993. 320 с.

[3] Дюженкова Л.І., Колесник Т.В., Лященко М.Я., Михалін Г.О., Шкіль М.І. Математичний аналіз у прикладах і задачах. Част. ІІ. — К.: Вища школа, 2003.

[4] Ковальчук Б.В., Шіпка Й.Г. Основи математичного аналізу: Підручник : в 2 ч. Ч.2 -– Львів : Видав. центр ЛНУ імені Івана Франка, 2010.

[5] Лісевич Л.М., Бабенко В.В., Бокало М.М., Тріщ Б.М. Математичний аналіз у задачах і вправах. – Львів, Вид. центр ЛНУ ім.Івана Франка, 2001- 170 с.

[6] Тріщ Б.М. Практикум з вищої математики: Числові та функцональні ряди. Навч. посіб. – Львів : ЛНУ ім. І. Франка, 2010. 70с.

[7] Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. Ч. 2. 3-тє вид., переробл. і допов.– К.: Вища шк., 2015. 510 с.

[8] Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. Ч. 1. 3-тє вид., переробл. і допов. – К.: Вища шк., 2015. 447 с.

[9] Вища математика. Числові та функціональні ряди: методичні рекомендації до самостійної роботи/ уклад.: І. О. Ластівка, В. К. Репета, О. П. Олійник. – К.: НАУ, 2022.– 48с.

[10] Вища математика: Числові та функціональні ряди: Практикум: навч. посіб. для студ. техн. спеціальностей/ уклад.: М.В. Савчук. – Київ: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. – 46с.

[11] Числові та функціональні ряди. Ряди Фур'є. Метод. вказівки до вивчення теми дисципліни «Вища математика» для студентів енергетичних спеціальностей усіх форм навчання/ Уклад.: М.І. Чернєй, Г.К. Новикова, Н.Л. Денисенко. — К.: НТУУ "КПІ", 2016. — 62 с.

доц. **Синявська Ольга Олександрівна** – канд. фіз.-мат. наук;
доц. **Сливка-Тилищак Ганна Іванівна** – докт. фіз.-мат. наук;
доц. **Тегза Антоніна Михайлівна** – канд. фіз.-мат. наук;

Числові та функціональні ряди: методичні вказівки до виконання типових індивідуальних завдань з математичного аналізу для студентів факультету математики та цифрових технологій

Віддруковано в КП "Ужгородська міська друкарня"