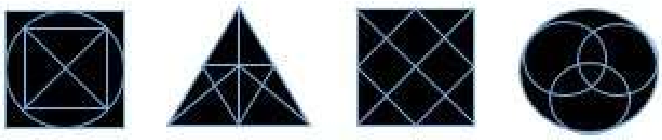
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
МАТЕМАТИЧНИЙ ФАКУЛЬТЕТ

І. А. МИЧ, В. В. НІКОЛЕНКО, О. В. ВАРЦАБА

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН

$A = \{$  $\}$

$B = \{$  $\}$

Ужгород - 2019

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
“УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ”

КАФЕДРА КІБЕРНЕТИКИ І ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ ТА ВКАЗІВКИ,
ПРАКТИЧНІ, ЛАБОРАТОРНІ І МОДУЛЬНІ ЗАВДАННЯ

до вивчення курсу “**Дискретна математика**”

для студентів 1-го курсу
математичного факультету

Ужгород – 2019

УДК 510

Методичні рекомендації та вказівки, практичні, лабораторні і модульні завдання до вивчення курсу “Дискретна математика” (*Елементи теорії множин*) /
Мич І.А., Ніколенко В.В., Варцаба О.В. – Ужгород: Ужгород. нац. ун-т, 2019. – 23 с.

Відповідальний за випуск:
доктор технічних наук, доцент Ф.Е. Гече

Рецензент:
кандидат фізико-математичних наук, доцент С.В. Чупов

ЗМІСТ

1. Поняття множини. Способи задання множин.

Поняття множини є одним з основних, неозначуваних понять математики. Воно немає точного визначення і його слід віднести до аксіоматичних понять. Часто приймається формулювання інтуїтивного поняття множини Г. Кантора.

Означення 1. Довільне зібрання певних предметів нашої інтуїції чи інтелекту, які можна відрізнити один від одного і які уявляються як єдине ціле, називається *множиною*. Предмети, які входять до складу множини, називаються її елементами.

Як правило, термін множина пояснюється за допомогою прикладів і описують поняття множини так.

Множина – це сукупність певних об'єктів, об'єднаних за деякими ознаками, причому ці об'єкти можуть бути довільної природи. Елементами множини називають об'єкти, які утворюють множину.

Звичайно множини позначають великими літерами латинського алфавіту $A, B, C, D, \ldots$ або великими літерами з індексами $A_1, A_2, \ldots$, а їх елементи малими літерами – $a, b, c, d, \ldots$ або малими літерами з індексами $a_1, a_2, \ldots$. Запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A; запис $a \notin A$ або $a \,\overline{\in}\, A$, означає, що елемент a не належить множині A.

Множини можуть містити різне число елементів, тобто є одноелементні, двоелементні множини, множини, які містять багато елементів, безліч елементів, не містять елементів.

Означення 2. Множина, яка не містить жодного елемента, називається *порожньою* і позначається символом $\varnothing$.

Означення 3. Множина, яка складається із скінченого числа елементів, називається *скінченою*, в протилежному випадку – *нескінченою*.

Означення 4. *Потужністю множини A* називається число її елементів і позначається $|A|$.

Задати множину A означає вказати спосіб за допомогою якого для довільного об'єкта a можна дати відповідь на запитання: чи належить об'єкт a множині A?

Використовують кілька способів задання множин:

1. *Переліком елементів*. Множина, яка утворена із елементів $a_1, a_2, ..., a_n$, позначається $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$, зокрема, множина із одного елемента a позначається $\{a\}$ і називається одноелементною множиною.

Для задання множини цим способом потрібно вказати всі елементи множини або задати закон їх побудови.

2. *Вербальний (словесний)* – за допомогою словесного опису характеристичних властивостей, які повинні мати елементи множини.

3. *Предикатний (висловлювальний, форми X-а*). Задання множин у такий спосіб базується на *інтуїтивному принципі абстракції* (*або аксіомі згортки*): всяка властивість $P(x)$ визначає деяку множину A за допомогою умови: елементами множини A є ті і тільки ті об'єкти x, які мають властивість $P(x)$.

Символом $\{x \mid P(x)\}$ позначають множину всіх тих елементів x, які мають властивість $P(x)$, тобто множина задається у вигляді $\{x \mid P(x)\}$.

В основі рівності множин лежить *інтуїтивний принцип об'ємності* (або *аксіома екстенсіональності*): дві множини рівні між собою тоді і тільки тоді, коли вони складаються з одних і тих же елементів.

Цей принцип у символах може бути записаний у вигляді:

$$A = B \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Відношення рівності має наступні властивості:

1. $A = A$ (рефлексивність);
2. *якщо* $A = B$, то $B = A$ (симетричність);
3. *якщо* $A = B$, $B = C$, *то* $A = C$ (транзитивність).

Означення 5. Множина, яка складається з елементів деякої множини A так, що ці елементи можуть входити до складу цієї множини в якій завгодно кількості екземплярів, будемо називати *мультимножиною* множини A і позначати її $M(A)$.

З точки зору теорії множин, множина і її мультимножина – це один і той же об'єкт, і вони можуть між собою не розрізнятися. Але часто, особливо коли мова заходить про представлення множини в пам'яті ЕОМ, виникає потреба відрізняти мультимножину від множини.

В основі теорії множин лежать аксіоми теорії множин, які носять назву *аксіоматики Цермелло-Френкеля*.

Наведемо деякі з них.

- (*Аксіома екстенсіональності*). Дві множини A і B рівні тоді і тільки тоді, коли вони складаються з одних і тих же елементів.
- *(Аксіома згортки).* Всяка властивість $P(x)$ визначає деяку множину A за допомогою умови: елементами множини A є ті і тільки ті об′єкти x, які мають властивість $P(x)$.
- *(Аксіома пари). Якщо* a і b різні об′єкти, то існує множина, яка складається в точності із предметів a і b.
- *(Аксіома об'ємності).* Для довільної множини A існує множина B, яка складається в точності із всіх елементів, які входять в множину A.
- *(Аксіома булеана).* Для будь-якої множини A існує множина $B(A)$, всіх підмножин множини A.
- (*Аксіома нескінченності*). Існує хоча б одна нескінченна множина – множина натуральних чисел.
- (*Аксіома вибору*). Якщо дана множина A, то існує функція f, яка ставить у відповідність кожній непустій підмножині B із множини A один визначений елемент $f(B)$ із множини B.
- (*Аксіома підстановки*). Для всякої множини A і однозначної функції f, визначеної на множині A, існує множина, яка складається в точності із елементів $f(x)$ для $x \in A$.

Наведена система аксіом є недостатньо визначеною. Це пов'язано з поняттям висловлювання, яке використовується в аксіомі згортки. Мова висловлювань повинна описуватись більш точно, інакше це приводить до суперечностей, які відомі як парадокси теорії множин типу: "я кажу неправду" (парадокс обманщика), "нехай A – множина всіх множин, що не є елементами самих себе, тоді кожне з двох висловлювань є суперечливим: A є елементом A і A не є елементом A" (парадокс Рассела) і т.п.

2. Відношення включення множин і його властивості. Булеан множини

Означення 6. Множина A називається *підмножиною* множини B, якщо кожен елемент множини A є елементом множини B, тобто за означенням $A \subset B \overset{df}{=} x \in A \Rightarrow x \in B$.

Порожню множину $\varnothing$ і множину A називають *невласними підмножинами* множини A, а всі інші підмножини – *власними*.

Відношення включення множини має слідуючі властивості:

1. $A \subset A$ (рефлексивність);
2. $\varnothing \subset A$;
3. *якщо* $a \in A$*, то* $\{a\} \subset A$;
4. *якщо* $A \subset B$ *і* $B \subset A$*, то* $A = B$ (антисиметричність);
5. *якщо* $A \subset B$ *і* $B \subset C$*, то* $A \subset C$ (транзитивність).

Приклад 1. Визначити в якому відношенні знаходяться множини $A = \{x \mid x^2 - 7x + 12 = 0\}$ і $B = \{x \mid x^2 - 6x + 9 = 0\}$.

Розв'язання. Задамо множини A і B переліком їх елементів. Оскільки $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$, $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2$, то множина $A = \{3,4\}$, $B = \{3\}$. Отже, $B \subset A$.

Означення 7. *Булеаном* множини A називається множина $B(A)$ всіх підмножин множини A.

Приклад 2. Нехай $A = \{2,3,4\}$. Знайти булеан множини A.

Розв'язання. Множина $\varnothing$ і множина A є невласними підмножинами множини A.

Власними підмножинами є такі підмножини: $\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\}$.

Тоді $B(A) = \{\varnothing,\{2\},\{3\},\{4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},A\}$.

***Теорема* 1**. *Якщо множина* A *скінчена і містить* n *елементів, то множина* $B(A)$ *також скінчена і містить* 2^n *елементів.*

3. Операції над множинами.

Розглянемо операції алгебри множин (теоретико-множинні операції).

Означення 8. *Перетином множин* A і B називається множина $A \cap B$, яка містить усі ті і тільки ті елементи, які належать кожній із цих множин, тобто за означенням $A \cap B = \{x \mid x \in A \, i \, x \in B\}$.

Приклад 3. Нехай $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,7\}$, $C = \{7,8\}$,
E – множина студенток 1-о курсу математичного факультету,
F – множина студентів 1-о курсу математичного факультету.

Знайти: а) $A \cap B$; б) $B \cap C$; в) $E \cap F$.

Розв'язання. а) $A \cap B = \{3,4\}$; б) $B \cap C = \{7\}$; в) $E \cap F = \varnothing$.

Операцію перетину множин можна поширити на будь-яку кількість множин.

Означення 9. *Перетином множин* A_1, A_2 і A_3 називається множина $A_1 \cap A_2 \cap A_3$, яка складається з елементів, що належать кожній із цих множин, тобто $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{x \mid x \in A_1 \; i \; x \in A_2 \; i \; x \in A_3\}$.

Аналогічно для n множин:

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \{x \mid x \in A_1 \; i \; x \in A_2 \; i ... i \; x \in A_n\}.$$

Для скорочення записів використовують таке позначення $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i \overset{df}{=} A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$, або для нескінченої кількості множин $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \overset{df}{=} A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1} \cap A_n \cap A_{n+1} \cap \cdots$.

Для графічної ілюстрації операцій над множинами використовують так звані *діаграми Венна* (*діаграми Ейлера, діаграми Ейлера-Венна*). Сама універсальна множина зображується у вигляді прямокутника, а її підмножини у вигляді кіл, зображених у середині. Для операції перетину множин діаграми представлені на рис.1 та 2.

Означення 10. *Об'єднанням множин* A і B називається множина $A \cup B$, яка містить ті і тільки ті елементи, які належать хоча б одній із цих множин, тобто за означенням $A \cup B = \{x \mid x \in A \; або \; x \in B\}$.

$A \cap B$

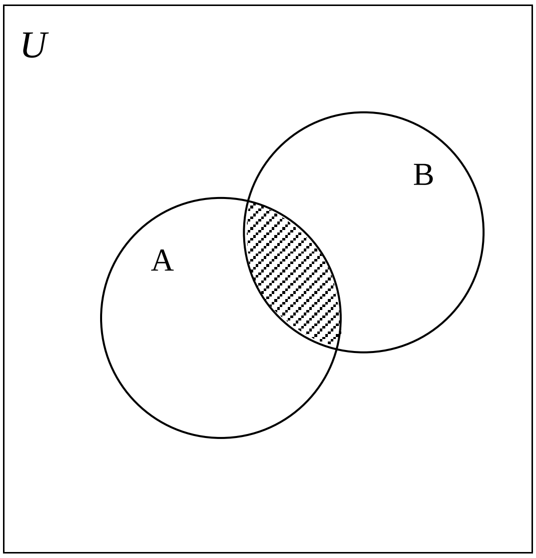


Рис.1.

$A \cap B \cap C$

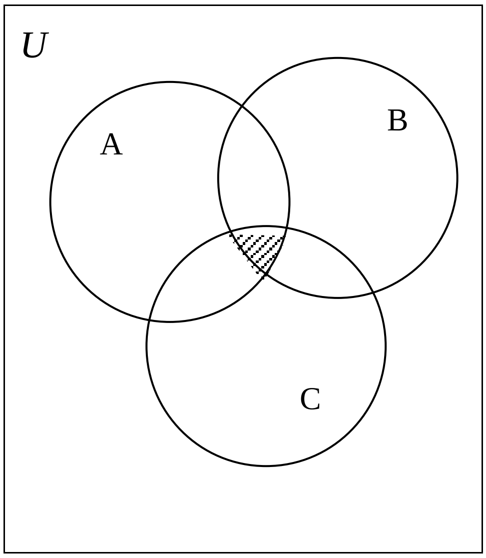


Рис.2.

Приклад 4. Знайти $A \cup B$, якщо:

а) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$.

б) $A = \{1,3,5,\ldots,2n-1,\ldots\}$, $B = \{2,4,6,\ldots,2n,\ldots\}$.

в) A - множина студенток 1-го курсу математичного факультету; B - множина студентів 1-го курсу математичного факультету.

Розв'язання.

а) $A \cup B = \{1,2,3,4\}$;

б) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,\ldots,2n-1,2n,\ldots\} = N$;

в) $A \cup B$- множина студентів 1-го курсу математичного факультету.

Операція об'єднання множин показана на рис. 3 та рис. 4.

$A \cup B$

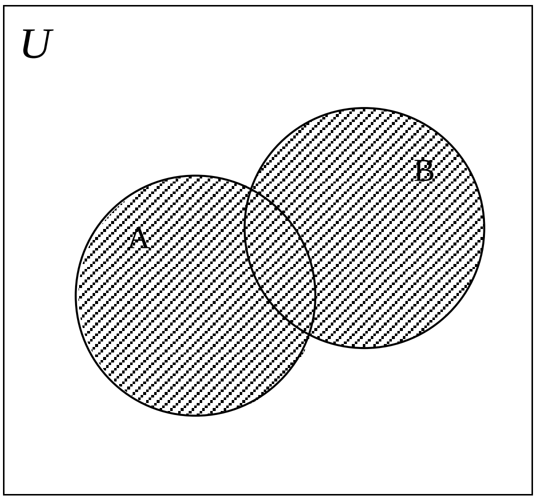


Рис.3.

$A \cup B \cup C$

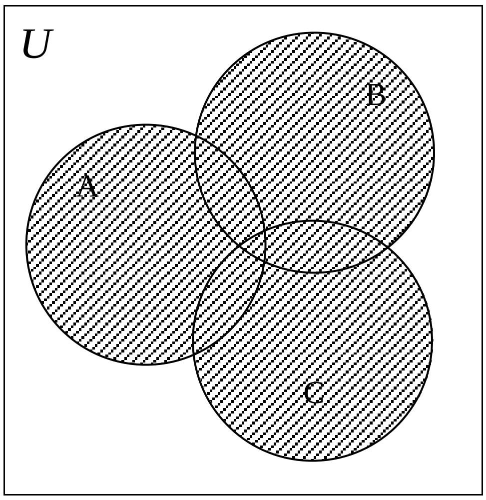


Рис.4.

Аналогічно операцію об'єднання множин можна поширити на будь-яку кількість множин, наприклад, для трьох множин A_1, A_2 і A_3.

Означення 11. *Об'єднанням множин* A_1, A_2 і A_3 називається множина $A_1 \cup A_2 \cup A_3$, яка складається з елементів, які належать хоча б одній із цих множин, тобто $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{x \mid x \in A_1 \text{ або } x \in A_2 \text{ або } x \in A_3\}$.

Аналогічно для n множин:
$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = \{x \mid x \in A_1 \text{ або } x \in A_2 \text{ або...або } x \in A_n\}$. Для скорочення записів використовують слідуюче позначення $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \overset{df}{=} A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ і для нескінченого числа множин

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \overset{df}{=} A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n \cup A_{n+1} \cup \cdots.$$

Означення 12. *Різницею множин* A і B називається множина $A \setminus B$, яка складається з усіх тих елементів множини A, які не належать множині B, тобто $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$.

Приклад 5. Знайти $A \setminus B$ і $B \setminus A$, якщо:

а) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,3,4\}$;

б) $A = \{1,2,3,4,5,\dots,n,\dots\}$, $B = \{1,3,5,\dots,2n-1,\dots\}$.

Розв'язання.

а) $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{4\}$;

б) $A \setminus B = N \setminus B = \{2,4,6,\dots,2n,\dots\}$.

Означення 13. *Абсолютним доповненням* множини A називається множина $\overline{A}$, яка складається з усіх тих елементів, які не належать множині A, тобто

$$\overline{A} = U \setminus A,$$

де U – універсальна множина.

Універсальна множина – це така множина, що всі множини, які розглядаються у даному випадку є її підмножинами.

Операції різниці та абсолютного доповнення множин показано на рис. 5 та 6.

Приклад 6. Нехай $U = N$, $A = \{1,2,3\}$. Знайти $\overline{A}$.

Розв'язання. $\overline{A} = \{4,5,6,7,...\}$.

Можна також розглядати доповнення між будь-якими множинами A і B.

$A \setminus B$

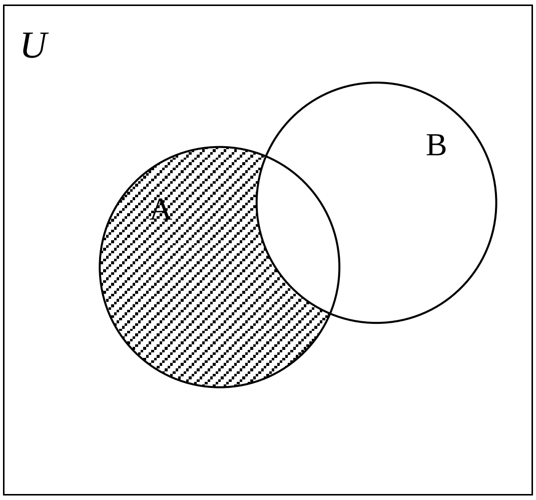


Рис.5.

$\overline{A}$

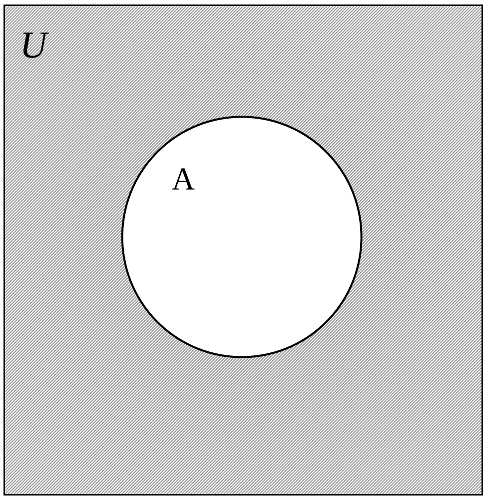


Рис.6.

Означення 14. *Доповненням* множини A до множини B називається множина $\overline{A}_B = B \setminus A$.

Якщо ж $B \subset A$, то доповнення множини A до множини B є порожньою множиною.

Означення 15. *Симетричною різницею* множин A і B називається множина $A \div B$, яка визначається згідно рівності $A \div B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Приклад 7. Нехай $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{3,4,5,6,7,8\}$. Знайти $A \div B$.

Розв'язання.

$A \setminus B = \{1,2\}$, $B \setminus A = \{7,8\}$, $A \div B = \{1,2\} \cup \{7,8\} = \{1,2,7,8\}$.

Закони операцій над множинами визначають наступні теореми:

Теорема 2. *Для довільних підмножин A, B, C деякої універсальної множини U мають місце такі рівності:*

1. а) $A \cap B = B \cap A$,

   б) $A \cup B = B \cup A$.

2. а) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,

   б) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

3. а) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

б) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

4. а) $A \cap \varnothing = \varnothing$,

б) $A \cup \varnothing = A$.

5. а) $A \cap A = A$,

б) $A \cup A = A$.

6. а) $A \cap U = A$,

б) $A \cup U = U$.

7. а) $A \cup (B \cap A) = A$,

б) $A \cap (B \cup A) = A$.

Теорема 3. *Для довільних підмножин* A, B, C *деякої універсальної множини* U *мають місце такі тотожності*:

1. а) $\overline{A} \cap A = \varnothing$; б) $\overline{A} \cup A = U$;

2. а) $A \setminus A = \varnothing$; б) $A \setminus \varnothing = A$;

3. а) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$; б) $B \setminus A = B \cap \overline{A}$;

4. а) *якщо* $A = B$, *то* $\overline{A} = \overline{B}$;

5. а) *якщо* $A \subset B$, *то* $\overline{B} \subset \overline{A}$;

6. а) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$; б) $(A \setminus B) \cup B = A \cup B$;

7. а) $(B \cup C) \setminus A = (B \setminus A) \cup (C \setminus A)$; б) $(B \cap C) \setminus A = (B \setminus A) \cap (C \setminus A)$;

8. а) $\overline{\overline{A}} = A$;

9. а) $\overline{A \cap B} = \overline{B} \cup \overline{A}$; б) $\overline{A \cup B} = \overline{B} \cap \overline{A}$.

4. Декартовий добуток множин

Означення 16. *Впорядкованою парою* (a,b) елементів a і b множини A називається пара (a,b) для якої визначено порядок елементів.

Із означення слідує, що $(a,b) = (b,a)$ тоді і тільки тоді, коли $a = b$.

Означення 17. *Декартовим добутком множин* A і B називається множина $A \times B$, яка складається з усіх впорядкованих пар

(a,b) між елементами множин A і B, де $a \in A$, $b \in B$, тобто за означенням

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \, i \, b \in B\}.$$

Приклад 8. Нехай $A = \{1,2\}$, $B = \{1,2,3\}$. Знайти декартовий добуток цих множин.

Розв'язання. $A \times B = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$ або

$$A \times B = \{(1,1),(2,1),(1,2),(2,2),(1,3),(2,3)\}.$$

Якщо множини A і B мають відповідно потужність n і m, тобто $|A| = n$, $|B| = m$, то число всіх елементів декартового добутку розглядуваних множин дорівнює $n \cdot m$, тобто

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = n \cdot m.$$

Елементи декартового добутку двох множин A і B, які складаються відповідно з n і m елементів, зручно розміщувати у вигляді прямокутної таблиці:

Таблиця 1.

$A \backslash B$	b_1	b_2	...	b_m
a_1	(a_1,b_1)	(a_1,b_2)	...	(a_1,b_m)
a_2	(a_2,b_1)	(a_2,b_2)	...	(a_2,b_m)
...	...	...	...	...
a_n	(a_n,b_1)	(a_n,b_2)	...	(a_n,b_m)

Множину точок декартового добутку $A \times B$ числових множин A і B зручно представляти множиною точок у декартовій системі координат на площині.

Поняття впорядкованої пари можна розширити на впорядковані трійки, четвірки і т.д. на впорядковані n-ки.

Означення 18. *Впорядкованою трійкою* елементів a, b і c множини A називається трійка (a,b,c) в якій визначено порядок слідування елементів a, b і c.

Означення 19. *Декартовим добутком* множин A, B і C називається множина, яка складається з усіх впорядкованих трійок (a,b,c) між елементами множин A, B і C, де $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$, тобто за означенням

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Аналогічно визначається впорядкована n-ка елементів із множини A $(a_1, a_2, ..., a_n)$, тобто впорядкована n-ка – це n, необов'язково різних між собою, елементів із множини A, заданих у певній послідовності.

Впорядковані n-ки називають іще *кортежами*.

Із визначення n-ки слідує, що $(a_1, a_2, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_n)$ тоді і тільки тоді, коли $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2, ...,$ $a_n = b_n$.

Означення 20. *Декартовим добутком множин* $A_1, A_2, ..., A_n$ називається множина, яка складається з усіх впорядкованих n-ок $(a_1, a_2, ..., a_n)$ між елементами множин $A_1, A_2, ..., A_n$, де $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n$, тобто за означенням

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}.$$

Якщо множини $A_1, A_2, ..., A_n$ співпадають, тобто $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = A$, то декартовий добуток $\underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n}$ називається декартовим добутком n-го степеня множини A (і позначається A^n).

Зокрема, $A^2 = A \times A$ – декартовий квадрат множини A; $A^3 = A \times A \times A$ – декартовий куб множини A і т.д.

Теорема 4. *Для довільних підмножин* A, B, C *деякої універсальної множини* U *мають місце наступні рівності*:

1. $A \times \varnothing = \varnothing \times A = A$ *для будь-якої множини* A;
2. *якщо* $A \neq B$, *то* $A \times B \neq B \times A$;
3. $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$;
4. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
5. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
6. $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

5. Формула включення та виключення

Нехай потрібно обчислити потужність множини $M = A \cup B$. Тоді, якщо $A \cap B = \varnothing$, то $|A \cup B| = |A| + |B|$. Якщо $A \cap B \neq \varnothing$, то

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|, \tag{1}$$

оскільки спільні елементи множин A і B враховуються двічі.

На основі формули (1) можна вивести формулу обчислення потужності множини $M = A \cup B \cup C$. Тоді

$$\begin{aligned}
|A \cup B \cup C| &= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = \\
&= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B \cap C|) = \\
&= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.
\end{aligned}$$

Теорема 5. *Для довільних скінчених множин* $A_1, A_2, \cdots A_n$, $(n \geq 2)$ *має місце наступна рівність*:

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i<j} |A_i \cap A_j| + \\
&+ (-1)^k \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}| + \\
&+ (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|
\end{aligned} \tag{2}$$

Рівність (2) можна записати і у такому вигляді:

$$\begin{aligned}
&|A_1 \cup A_2 \cup \cdots A_n| = (|A_1| + |A_2| + \cdots |A_n|) - (|A_1 \cap A_2| + |A_1 \cap A_3| + \cdots + \\
&+ |A_{n-1} \cap A_n|) + (|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + \ldots + \\
&+ |A_{n-2} \cap A_{n-1} \cap A_n|) + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|).
\end{aligned}$$

.

Завдання для самостійної роботи

Чи вірно, що

1. а) $\varnothing = \{\varnothing\}$,

   б) $\varnothing \in \{\varnothing\}$,

   в) $\varnothing \subset \{\varnothing\}$,

2. а) $1,2 \in \{\{1,3\},\{2,4\}\}$,

   б) $1,2 \in \{1,3\} \cap \{2,4\}$,

   в) $1,2 \in \{1,3\} \cup \{2,4\}$.

2. Нехай універсальна множина $U = N$, $A = \{1,2,5,6,7\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, $C = \{1,3,4,6,7\}$. Знайти:

а) $(A \cap C) \cup B$, б) $(A \setminus B) \cap \overline{C}$,

в) $\overline{A \div B} \cap C$, *де* $\div$ *– символ операції симетричної різниці множин*.

3. При умові, що $U = N$, $A = \left\{ \frac{2x+1}{3} \mid x < 15 \right\}$, $B = \{x \mid x - \textit{просте число}\}$, $C = \{1,3,4,6,7,8,9\}$, знайти:

а) $A \cap B \cap C$, в) $(A \cup C) \cap \overline{B}$.

б) $C \setminus (A \cap B)$,

4. Нехай $U = N$, $A = \{x \mid x - \textit{парне число менше 10}\}$, $C = \{2x \mid x^2 < 101\}$, $B = \{2x \mid x - \textit{просте число і } x^2 < 20\}$, знайти:

а) $(A \div \overline{B}) \cap (B \setminus C)$,

б) $(A \div C) \cap \overline{B}$.

5. При умові, що універсальна множина $U = N$, $A = \{x \mid x - \textit{просте число}\}$, $B = \{x \mid x - \textit{парне число}\}$, $C = \{x \mid 3x + 1 - \textit{просте число і } x < 15\}$, знайти $(C \setminus B) \cap (A \div C)$.

6. Нехай універсальна множина $U = N$, $A = \{x \mid x \geq 98\}$, $B = \{2x - 3 \mid x \leq 6\}$, $C = \{x \mid 2x + 1 \textit{ кратне 3}\}$, знайти:

а) $B \cap (C \setminus A)$, б) $\overline{A} \cap (B \cup C)$.

7. Нехай $U = N$, $A \setminus B = \{1,3,6,9\}$, $B \setminus A = \{2,4,10\}$, $A \cap B = \{5,7\}$. Знайти множини A і B.

8. Побудувати булеан множини $B(A)$, якщо:

а) $A=\{a,b,c,d\}$,

б) $A=\{\{1,3\},\{2,4\}\}$,

в) $A=\{\{1,3\},\{2,4\},5\}$.

9. Довести, що для довільних множин A і B справедливі співвідношення:

а) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$, б) $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

10. Нехай $A=\{1,2,3\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{2,4\}$. Знайти:

а) $A\times B$, в) $A^2\times C^2$,

б) $C\times A\times C$, г) B^3

11. Нехай $A=\{a,b\}$, $B=\{c,d\}$, $C=\{m,n\}$. Показати, що $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

12. У науково-дослідному інституті працюють 67 співробітників. З них французькою мовою володіють 20 співробітників, англійською – 47, німецькою – 35, англійською і французькою – 12, англійською і німецькою – 23, німецькою і французькою – 11, усіма трьома мовами – 5.

1. Скільки співробітників не володіють жодною з цих мов?
2. Скільки співробітників володіють тільки німецькою мовою?

13. Чи існують такі множини A,B,C, що $A\cap B\neq\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$, $(A\cap B)\setminus C=\varnothing$?

14. Використовуючи закони операцій алгебри множин довести, що $A\cap(B\div C)=(A\cap B)\div(A\cap C)$.

15. Спростити вираз $M=(A\cap B\cap C)\cup(\overline{A}\cap C)\cup(\overline{B}\cap C)$

Лабораторна робота

Теоретична частина

№ вар.	Запитання
1, 4, 7	1. *Навести означення множини.* 2. *Сформулювати означення декартового добутку множин, вказати потужність декартового добутку* n *множин.* 3. *Навести властивості відношення включення множин.*
2, 5, 8	1. *Вказати способи задання множин.* 2. *Сформулювати інтуїтивний принцип абстракції.* 3. *Навести означення операцій алгебри множин.*
3, 6, 9	1. *Навести означення булеана множини, вказати потужність булеана множини.* 2. *Сформулювати інтуїтивний принцип об'ємності.* 3. *Описати способи задання множин.*

Практична частина

***Завдання* 1**. Нехай $A = \{1, 2, 4, 7, 11, 16\}$, $B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$, $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 14\}$. При умові, що універсальна множина $U = N$, знайти множину M.

№ вар.	M	№ вар.	M	№ вар.	M
1.	$A \cap \overline{B \div C}$	4.	$A \cap (\overline{B} \div C)$	7.	$A \div \overline{B \cap C}$
2.	$(C \div \overline{B}) \cap \overline{A}$	5.	$C \div (A \cup \overline{B})$	8.	$(\overline{C} \div B) \cap \overline{A}$
3.	$\overline{B \div C} \cap A$	6.	$(C \div \overline{B}) \cap A$	9.	$(A \div \overline{C}) \cap B$

***Завдання* 2**. Нехай $A = \{x \in N \mid 2x + 1 \text{ - } \textit{просте число і } x < 25\}$,

$B = \{x \in N \mid x \text{ - } \textit{ділиться на } 2 \textit{ і не ділиться на } 3\}$,

$C = \{3x + 2 \mid x \in N \ \ і \ x^2 < 101\}$.

При умові, що універсальна множина $U = N$, знайти множину M.

№ вар.	M
1.	$(\overline{C} \setminus B) \cap A$
2.	$\overline{A} \cap (\overline{C} \setminus B)$
3.	$(A \cap \overline{B}) \setminus C$

№ вар.	M
4.	$(C \setminus \overline{B}) \cap A$
5.	$(C \setminus B) \cap A$
6.	$(C \setminus \overline{B}) \cap \overline{A}$

№ вар.	M
7.	$(C \cap B) \setminus A$
8.	$C \setminus \overline{B \cap A}$
9.	$(A \div C) \cap B$

***Завдання* 3**. Нехай U – множина всіх чотирикутників площини, A – множина прямокутників, B – множина квадратів, C – множина ромбів. Визначити множину M .

№ вар.	M
1.	$(\overline{C} \cup B) \cap A$
2.	$(C \cup \overline{B}) \cap A$
3.	$(B \setminus C) \cap A$

№ вар.	M
4.	$(B \setminus A) \cup C$
5.	$(A \cup C) \cap B$
6.	$\overline{\overline{B} \cup A} \cap C$

№ вар.	M
7.	$(A \cup B) \cap C$
8.	$(A \cap C) \setminus B$
9.	$(B \setminus A) \cap C$

***Завдання* 4**.

№ вар.	Умова завдання
1.	Нехай $A = \{2,3\}$, $B = \{a,b\}$. Знайти $A \times B^2$.
2.	Нехай $A = \{a,b\}$, $B = \{2,3\}$. Знайти $A^2 \times B$.
3.	Нехай $A = \{2,3\}$, $B = \{3,4\}$. Знайти $A \times B \times B$.
4.	Нехай $A = \{x \in N \mid x^2 < 9\}$. Знайти A^3.
5.	Нехай $A = \{x \in N \mid x - \textit{просте число і } x^2 < 10\}$, $B = \{1,2\}$. Знайти $A \times B^2$.
6.	Нехай $A = \{x \in N \mid x - \textit{просте число менше } 5\}$. Знайти A^3.
7.	Нехай $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$. Знайти $B \times A \times B$.
8.	Нехай $A = \{a,b\}$, $B = \{2\}$, $C = \{a,d\}$. Знайти $A \times B \times C$.
9.	Нехай $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x \in N \mid x - \textit{просте парне число}\}$. Знайти $A \times B \times A$.

***Завдання* 5**. Побудувати діаграму Ейлера-Венна для формули φ.

№ вар.	φ	**№ вар.**	φ	**№ вар.**	φ
1.	$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}\cup C}$	4.	$\overline{\overline{A}\cup B}\cap C$	7.	$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\cap C$
2.	$B\cap\overline{\overline{A}\cup C}$	5.	$\overline{\overline{A}\cup\overline{B}}\cup C$	8.	$\overline{A}\cap\overline{B\cap\overline{C}}$
3.	$\overline{\overline{A}\cap\overline{B}}\cup C$	6.	$\overline{\overline{B}\cup A}\cap C$	9.	$\overline{\overline{A}\cap\overline{C}}\cap\overline{B}$

Завдання 6.

№ вар.	**Умова завдання**
1.	З 20 людей двоє вивчали тільки англійську мову, троє – тільки німецьку, шестеро – тільки французьку. Ніхто не вивчав трьох мов. Один вивчав англійську і німецьку, троє – англійську і французьку. Скільки людей вивчало німецьку і французьку мови?
2.	У класі 38 учнів. З них 16 захоплюється математикою, 17 – фізикою, 18 – історією. Захоплюються двома предметами – математикою і фізикою – четверо, математикою й історією – троє, фізикою й історією – п’ятеро. Троє не захоплюються ні математикою, ні фізикою, ні історією. Скільки учнів захоплюється одночасно трьома предметами?
3.	У класі 38 учнів. З них 16 захоплюється математикою, 17 – фізикою, 18 – історією. Захоплюються двома предметами – математикою і фізикою – четверо, математикою й історією – троє, фізикою й історією – п’ятеро. Троє не захоплюються ні математикою, ні фізикою, ні історією. Скільки учнів захоплюється лише одним предметом?
4.	У класі 40 учнів. З них з української мови мають трійки 19 учнів, з математики – 17 і фізики – 22 учні. Лише з одного предмета мають трійки: з української мови – 4 учні, з математики – 4 і з фізики – 11 учнів. Сім учнів мають трійки і з математики, і фізики, з них п’ятеро мають трійки і з української мови. Скільки учнів мають трійки з двох предметів?

5.	Підлога кімнати площею 12 $м^2$ покрита трьома килимами: площа одного килима $5м^2$, другого – $4м^2$, третього – $3м^2$. Кожні два килими перекриваються по площі $1,5м^2$, причому $0,5м^2$ з цих $1,5м^2$ приходиться на ділянку підлоги, де перекриваються всі три килими. Яка площа підлоги, не покритої килимами?
6.	Підлога кімнати площею 12 $м^2$ покрита трьома килимами: площа одного килима $5м^2$, другого – $4м^2$, третього – $3м^2$. Кожні два килими перекриваються по площі $1,5м^2$, причому $0,5м^2$ з цих $1,5м^2$ приходиться на ділянку підлоги, де перекриваються всі три килими. Яка площа ділянки, покритої тільки одним килимом, площа якого $5м^2$?
7.	У ліцеї при деякому університеті 70 учнів. З них 27 займаються в драмгуртку, 32 співають у хорі, 22 захоплюються спортом. У драмгуртку 10 учнів з хору, у хорі 6 спортсменів, у драмгуртку 8 спортсменів, 3 спортсмена відвідують і драмгурток, і хор. Скільки учнів не співають у хорі і не захоплюються спортом?
8.	На протязі тижня в кінотеатрі демонстрували фільми X, Y, Z. Із 40 студентів групи будь-який з них подивився або всі три фільми, або один із трьох. Фільм X бачили 13 студентів, фільм Y – 16 студентів, Z – 19 студентів. Скільки студентів продивились всі три фільми?
9.	У ліцеї при деякому університеті 70 учнів. З них 27 займаються в драмгуртку, 32 співають у хорі, 22 захоплюються спортом. У драмгуртку 10 учнів з хору, у хорі 6 спортсменів, у драмгуртку 8 спортсменів, 3 спортсмена відвідують і драмгурток, і хор. Скільки учнів не захоплюються спортом і не займаються у драмгуртку?

Модульна робота
з теми “*Елементи теорії множин*”

Завдання **1.** Декартовий добуток множин (означення впорядкованої пари, декартового добутку двох множин, впорядкованої трійки, декартового добутку трьох множин, впорядкованої n-ки, декартового добутку n множин, сформулювати теорему про властивості декартового добутку, довести одну із властивостей (на вибір 3-6)).

Завдання **2.** Операції над множинами (означення різниці двох множин, абсолютного доповнення, доповнення двох множин, симетричної різниці, сформулювати без доведення теорему про властивості вказаних вище операцій).

Завдання **3.** Відношення включення множин і його властивості. Булеан множини (означення підмножини, власної і невласної підмножини, властивості відношення включення множин, означення булеана множини, сформулювати теорему про потужність булеана множини).

Завдання **4.** Нехай $A = \{x \in N \mid 2x+1 \text{ - } \textit{просте число} \text{ і } x < 25\}$,

$B = \{x \in N \mid x \text{ - } \textit{ділиться на } 2 \textit{ і не ділиться на } 3\}$,

$C = \{3x+2 \mid x \in N \text{ і } x^2 < 101\}$.

При умові, що універсальна множина $U = N$, знайти множину $M = (C \setminus \overline{B}) \cap A$.

Завдання 5. Нехай U – множина всіх чотирикутників площини, A – множина прямокутників, B – множина квадратів, C – множина ромбів. Визначити множину $M = (B \setminus A) \cup C$?

Завдання **6.** Нехай $A = \{x \in N \mid x^2 < 9\}$. Знайти A^3.

Завдання **7.** Побудувати діаграму Ейлера-Венна для формули $\varphi = \overline{\overline{A} \cup B} \cap C$.

Завдання **8**. (Задачу розв’язати використовуючи формулу включень виключень). *У науково-дослідному інституті працюють* 67 *співробітників. З них французькою мовою володіють* 20 *співробітників, англійською* – 47, *німецькою* – 35, *англійською і французькою* – 12, *англійською і німецькою* – 23, *німецькою і французькою* – 11, *усіма трьома мовами* – 5. *Скільки співробітників не володіють жодною з цих мов*

Література

№ п/п	Автор, назва посібника, рік видання
Основна література	
1.	*Капитонова Ю.В., Кривий С.Л., Летичевський О.А., Луцький Г.М., Печурін М.К.* Основи дискретної математики.– К.: Літсофт, 2000.– 380 с.
2.	*Латотин Ю.А., Макаренков В.В., Николаєва А.А. Столяр*. Математическая логика.– Мн.: Выш. шк. 1991.– 269 с.
3.	*Нефедов В.Н., Осипова В.А*. Курс дискретной математики.– М.: Из-во МАИ, 1992.– 264 с.
4.	*Бардачов Ю.М., Соколова Н.А., Ходаков В.Є.* Дискретна математика. – К.: Вища шк., 2002.– 287 с.
5.	*Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов.– М.: Наука, 1984.– 224 с.
Допоміжна література	
1.	*Горбатов В.А*. Фундаментальные основы дискретной математики. – М.: Наука, Физмат лит., 2000. – 544 с.
2.	*Акимов О. Е*. Дискретная математика: логика, группы, графы / О.Е. Єкимов.– 2-е изд., доп.– Лаборатория Базовых Знаний, 2003.– 376с.

Для нотаток