МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«УЖГОРОДСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ»
Факультет математики та цифрових технологій
Кафедра теорії ймовірностей і математичного аналізу

**Укладачі: О.О. Погоріляк, Г.І. Сливка-Тилищак,
П.В. Слюсарчук**

ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ

методичні вказівки до виконання типових індивідуальних завдань з математичного аналізу для студентів факультету математики та цифрових технологій

Ужгород – 2023

О.О. Погоріляк, Г.І. Сливка-Тилищак, П.В. Слюсарчук. **Методичні вказівки до виконання типових індивідуальних завдань з математичного аналізу для студентів факультету математики та цифрових технологій** – Ужгород, 2023. – 79с.

У методичних вказівках проілюстровано розв'язування опорних задач математичного аналізу з тем: «Елементи теорії множин, логіки, комбінаторики», «Функції, графіки функцій», «Теорія дійсних чисел», «Границя послідовності», «Монотонні послідовності, умови збіжності послідовностей», «Границя функції», «Чудові границі», «Нескінченно малі та нескінченно великі функції та їх порівняння», «Неперервність та рівномірна неперервність функції, точки розриву». Також після кожної з тем наведено завдання для індивідуальних робіт.

Рекомендовано до друку засіданням кафедри теорії ймовірностей і математичного аналізу, протокол № 4 від 13 листопада 2023 року.

Рекомендовано до друку засіданням методичної комісії математичного факультету, протокол № 11 від 22 листопада 2023 року.

Рецензенти:
П.П. Антосяк, кандидат фіз.-мат. наук, доцент (ДВНЗ «УжНУ»)
І.В. Шапочка, кандидат фіз.-мат. наук, доцент (ДВНЗ «УжНУ»)

ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ МНОЖИН, ЛОГІКИ, КОМБІНАТОРИКИ

Теоретичні питання

1. Множини. Операції над множинами.

Множина – базове поняття математики, яке не має строгого визначення. Під множиною розуміємо сукупність елементів довільної природи, що мисляться, розглядаються як єдине ціле. Задати множину означає описати закон чи правило за якими про кожний об'єкт можна сказати чи належить він цій множині чи ні. Цей закон ще називають характеристичною властивістю.

Об'єкти, з яких складається множина, називаються її елементами. Множини позначають великими латинськими літерами $A, B, C, \ldots,$ а їхні елементи малими латинськими літерами $a, b, c, \ldots.$

Факт включення елемента a в множину A позначають відношенням належності: $a \in A$.

Множини також можна задавати переліком їх елементів, наприклад $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Над множинами визначають операції.

Об'єднанням двох множин A та B називається множина $A \cup B$, що складається з тих елементів, що належать хоча б одній з множин A або B.

Перетином двох множин A та B називається множина $A \cap B$, що складається з тих елементів, що належать одночасно як множині A так і B.

Різницею двох множин A та B називається множина $A \setminus B$, що складається з тих елементів, що належать A та одночасно не належать до B.

2. Метод математичної індукції.

Принцип математичної індукції: якщо деяке твердження $T(n)$

1. виконується для $n = 1$;

2. із припущення, що дане твердження є правильне для $n = k$ можна довести правильність твердження для $n = k + 1$, то твердження виконується для будь-якого натурального числа n.

3. Елементи комбінаторики. Формула бінома Ньютона.

$P_n = n!$ – перестановки з n елементів(кількість всеможливих впорядкувань множини з n елементів).

$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$ – розміщення з n елементів по k елементів(кількість всеможливих k-елементних впорядкованих підмножин n-елементної множини).

$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – комбінації з n елементів по k елементів(кількість всеможливих k-елементних підмножин n-елементної множини).

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$ – формула бінома Ньютона.

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Запишіть різними способами множину парних чисел* $\mathbf{Z_2}$.
Розв'язок. а) Переліком елементів: $\mathbf{Z_2} = \{0, 2, -2, 4, -4, \ldots\}$.
б) За допомогою характеристичної властивості: $\mathbf{Z_2} = \left\{k \in \mathbf{Z} : \frac{k}{2} \in \mathbf{Z}\right\}$.
Завдання 2. *Множини задані переліком елементів. Запишіть їх за допомогою характеристичної властивості:*
а) $A = \{\ldots -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\}$;
б) $B = \{4, 7, 10, 13, \ldots\}$.
Розв'язок. а) $A = \{x : x = 4n, n \in \mathbf{Z}\}$(цілі числа, що кратні чотири).
б) $B = \{x : x = 3n+1, n \in \mathbf{N}\}$ (натуральні числа, що при діленні на три в остачі дають 1).
Завдання 3. *Множини задані за допомогою характеристичної властивості. Запишіть їх переліком елементів:*
а) $A = \left\{x : x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$;
б) $B = \left\{x : \sin^2 x + 1 = 0\right\}$.
Розв'язок. а) $A = \{1, 2\}$ – розв'язки відповідного квадратного рівняння.
б) $B = \varnothing$, оскільки тригонометричне рівняння $\sin^2 x = -1$ немає розв'язків.
Завдання 4. *Нехай* $A = \left\{x : (x-1)(x+2)(x-3)\operatorname{tg}(x - \frac{\pi}{4}) = 0\right\}$, $B = \left\{x : (x^2 + x - 2)\sin 4x = 0\right\}$. *Знайти* $A \cup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ B \setminus A$.
Розв'язок. Знайдемо вигляд множини A. Для цього розв'яжемо рівняння

$$(x-1)(x+2)(x-3)\operatorname{tg}(x - \tfrac{\pi}{4}) = 0.$$
$$x = 1 \text{ або } x = -2 \text{ або } x = 3 \text{ або } x - \tfrac{\pi}{4} = \pi k,\ k \in \mathbf{Z},$$
$$x = 1 \text{ або } x = -2 \text{ або } x = 3 \text{ або } x = \tfrac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$
$$A = \left\{x : x = \tfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbf{Z}\right\} \cup \left\{-2, 1, 3\right\}.$$

Аналогічно

$$(x^2+x-2)\sin 4x = 0,$$
$$x^2+x-2=0 \text{ або } \sin 4x = 0,$$
$$x=-2 \text{ або } x=1 \text{ або } 4x=\pi k,\ k\in\mathbf{Z},$$
$$x=-2 \text{ або } x=1 \text{ або } x=\tfrac{\pi}{4}k,\ k\in\mathbf{Z}.$$
$$B=\left\{x: x=\tfrac{\pi}{4}k, k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\{-2,1\}.$$

Оскильки $A\cup B$ складається з елементів котрі належать хоча б одній із множин A або B, то

$$A\cup B=\left\{x: x=\tfrac{\pi}{4}k, k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\{-2,1,3\}.$$

$A\cap B$ складається з елементів котрі належать одночасно як множині A так і B, тому

$$A\cap B=\left\{x: x=\tfrac{\pi}{4}+\pi k, k\in\mathbf{Z}\right\}\cup\{-2,1\}.$$

$A\setminus B$ складається з елементів котрі одночасно належать до множини A і не належать до множини B, тому

$$A\setminus B=\{3\}.$$

Аналогічно

$$B\setminus A=\left\{x: x=\tfrac{\pi}{2}k, k\in\mathbf{Z}\right\}.$$

Завдання 5. *Які з даних записів є вірними: а)* $\varnothing\in\mathbf{Q}$, *б)* $\{0\}\in\mathbf{Z}$, *в)* $\{0\}\subset\mathbf{Z}$, *г)* $\{\varnothing\}\subset\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$, *д)* $\mathbf{R}\subset\mathbf{Q}$.
Розв'язок. а) Множина раціональних чисел $\mathbf{Q}$ не містить своїм елементом порожню множину, тому запис $\varnothing\in\mathbf{Q}$ є невірний.
б) Запис $\{0\}\in\mathbf{Z}$ є невірним, оскільки множина цілих чисел $\mathbf{Z}$ містить 0 як елемент а не одноелементну множину $\{0\}$.
в) Запис $\{0\}\subset\mathbf{Z}$ означає, що $\{0\}$ є підмножиною $\mathbf{Z}$. Цей запис є вірний, оскільки кожний елемент множини $\{0\}$(він всього один) є елементом множини $\mathbf{Z}$.
г) Запис $\{\varnothing\}\subset\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$ є невірним, оскільки елемент $\varnothing$ множини $\{\varnothing\}$ не є елементом множини $\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$. Правильним є запис $\{\varnothing\}\in\{\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\}\}$.
д) Запис $\mathbf{R}\subset\mathbf{Q}$, очевидно, є невірним, бо будь-яке ірраціональне число(неперіодичний нескінченний десятковий дріб) не є раціональним.
Завдання 6. *Доведіть, що для будь-яких множин A та B справджуються рівності:*

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B};$$
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

Розв'язок. Доведемо, наприклад, другу рівність:

$$x \in \overline{A \cap B} \Leftrightarrow x \notin A \cap B \Leftrightarrow \overline{x \in A \cap B} \Leftrightarrow \overline{x \in A \wedge x \in B} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x \notin A \vee x \notin B \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cup \overline{B}.$$

Завдання 7. *За допомогою кванторів запишіть висловлювання «Довільне раціональне число можна представити у вигляді частки цілого та натурального чисел».*

Розв'язок. Нехай $q \in \mathbf{Q}$, $k \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$. Тоді

$$(\forall q \in \mathbf{Q}) \quad (\exists k \in \mathbf{Z}) \quad (\exists n \in \mathbf{N}) \quad q = \frac{k}{n}.$$

Завдання 8. *Якою має бути множина A, щоб висловлювання* $(\forall a \in A)$ $(\exists x \in \mathbf{R})$ $3a - 2ax - x^2 > 0$ *було істинним?*

Розв'язок. Дане висловлювання буде завжди істинним якщо нерівність $3a - 2ax - x^2 > 0$ при будь-якому a матиме принаймні один розв'язок. Для цього досить, щоб дискримінант відповідного квадратного рівняння був строго більшим за нуль, тобто $4a^2 + 12a > 0$. Отже $A = (-\infty, -3) \cup (0, +\infty)$.

Завдання 9. *Довести, що для довільного натурального числа n число* $5 \cdot 2^{3n-2} + 3^{3n-1}$ *ділиться на* 19.

Розв'язок. Нехай $n = 1$, тоді $5 \cdot 2^1 + 3^2 = 19 \div 19$. Припустимо, що твердження істинне при $n = k$, тобто

$$5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1} \div 19.$$

Покажемо, що й

$$5 \cdot 2^{3k+1} + 3^{3k+2} \div 19.$$

$$5 \cdot 2^{3k+1} + 3^{3k+2} = 40 \cdot 2^{3k-2} + 27 \cdot 3^{3k-1} = 8(5 \cdot 2^{3k-2} + 3^{3k-1}) + 19 \cdot 3^{3k-1}.$$

Перший доданок правої частини останньої рівності ділиться на 19 за припущенням індукції, другий – бо містить 19 множником, тому й ліва частина рівності повинна ділитись на 19. Отже, твердження має місце для всіх $n \in \mathbf{N}$.

Завдання 10. *Довести, що для довільного натурального числа n має місце рівність:*

$$1^3 + 2^2 + \ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Розв'язок. Переконаємось, що при $n = 1$ твердження істинне. Дійсно, $1 = 1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1$. Припустимо, що дане твердження виконується при $n = k$, тобто

$$1^3 + 2^2 + \ldots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2.$$

Доведемо, що дане твердження матиме місце і при $n = k + 1$:

$$1^3 + 2^2 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Використовуючи припущення індукції, перших k доданків останньої рівності замінимо на $\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2$.

$$1^3 + 2^2 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2 + (k+1)^3 =$$
$$= (k+1)^2\left(\frac{k^2}{4} + k + 1\right) = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2\left(k^2 + 4k + 4\right) = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right)^2.$$

Таким чином, за методом математичної індукції дана рівність істинна для довільного $n \in \mathbf{N}$.

Завдання 11. *Довести, що для довільного натурального числа n має місце нерівність:*

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Розв'язок. Застосуємо метод математичної індукції. При $n = 1$ маємо правильне твердження: $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{3}}$. Припустимо, що нерівність виконується при $n = k$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} < \frac{1}{\sqrt{2k+1}}.$$

На основі припущення доведемо, що вона справедлива і для $n = k + 1$, тобто

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} < \frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}}.$$

Домножимо обидві частини нерівності з припущення індукції на дріб $\frac{2k+1}{2(k+1)}$:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k+1}{2(k+1)} \leq \frac{2k+1}{2(k+1)\sqrt{2(k+1)+1}}.$$

Співставляючи останні дві нерівності(їх ліві частини співпадають) залишається показати, що

$$\frac{2k+1}{2(k+1)\sqrt{2(k+1)+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{2(k+1)+1}},$$

або те саме, що

$$\sqrt{(2n+1)(2n+3)} \leq 2n+2.$$

Очевидно, що

$$\sqrt{(2n+1)(2n+3)} = \sqrt{4n^2+8n+3} < \sqrt{4n^2+8n+4} = 2n+2.$$

Таким чином індукція завершена й нерівність доведена.

Завдання 12. *Від міста A до міста B веде n доріг, від міста B до міста C – k доріг. Скількома способами можна попасти іх міста A до C й вернутись назад? А якщо назад повертатись іншими дорогами?*

Розв'язок. Будь-яка дорога від міста A до міста C й назад складається з чотьрьох частин: $A \to B \to C \to B \to A$. Таким чином нам потрібно виконати читири дії: два рази обрати дорогу від міста A до міста B(одне й те саме, що й від B до A) та два рази обрати дорогу від міста B до міста C. Згідно основного принципу комбінаторики це може бути зроблене $n^2 \cdot k^2$ способами. Якщо ж назад вертатись іншими дорогами, то для вибору зворотнього шляху буде вже тільки $(n-1)(k-1)$ способів, тому кількість різних доріг від міста A до міста C й назад буде вже $n(n-1)k(k-1)$.

Завдання 13. *Скількома способами n людей можуть утворити чергу? А стати в коло?*

Розв'язок. Одна черга відрізнятиметься від іншої якщо хоча б двоє з людей, що її утворюють, стоятимуть на різних місцях в цих чергах. Таким чином, сукупність всіх різних черг утворюватиметься всеможливими взаємними впорядкуваннями людей, тобто складатиме перестановки з множини в n людей, тому кількість способів утворити чергу є $n!$. Незалежно від того якого геомертичного вигляду набуватиме черга(деяка незамкнена чи замкнена крива), суть впорядкованого розміщення людей не змінюється, тому коло n людей можуть утворити теж $n!$ способами.

Завдання 14. *Студенти першого курсу вивчають 7 предметів. В понеділок вони мають 4 пари з різних предметів. Скількома способами можна скласти розклад на понеділок?*

Розв'язок. Очевидно, що для складання розкладу потрібно спочатку вибрати чотири предмети з семи, а потім розглянути всеможливі порядки занять з обраних предметів. Тому, якщо переводити умову задачі на мову комбінаторики, нас цікавитимуть всеможливі впорядковані чорирьох елементні підмножини множини із семи елементів, тобто розміщення. Отже, розклад може бути складений $A_7^4 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$ способами.

Завдання 15. *В урні міститься 10 куль, серед яких 6 білих та 4 чорних. Скількома способами з урни можна витягти 3 кулі так, аби серед них були 1 біла та 2 чорні?*

Розв'язок. Для того, щоб серед обраних 3 куль були точно 1 біла та

2 чорні, потрібно білу кулю обирати серед білих(це можна зробити C_6^1 способами), а 2 чорні серед 4 чорних(це можна зродита C_4^2 способами), тому згідно основного принципу комбінаторики 3 кулі, серед яких 1 біла та 2 чорні можна вибрати $C_6^1 \cdot C_4^2 = \frac{6!}{1!5!} \cdot \frac{4!}{2!2!} = 36$ способами.

Завдання 16. *Розв'яжіть рівняння:*

$$A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101.$$

Розв'язок. Враховуючи, що $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots (n-k+1)$, $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, наше рівняння перепишеться у вигляді:

$$(x-2)(x-3) + \frac{x!}{(x-2)!2!} = 101,$$

або

$$(x-2)(x-3) + \frac{1}{2}(x-1)x = 101.$$

Розв'язками отриманого квадратного рівняння є -8 та 10. Розв'язком початкового рівняння є тільки 10, оскільки від'ємне число не підходить по змісту.

Завдання 17. *Знайдіть член розкладу бінома* $\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{a} + \frac{a}{x}\right)^{16}$, *який містить* x^{-1}.

Розв'язок. Скористаємось формулою бінома Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \ldots + C_n^n b^n,$$

$T_k = C_n^{k-1} a^{n-(k-1)} b^{k-1}$– k-ий член розкладу.

В нашому випадку роль змінних a, b, n відіграють $\frac{\sqrt[4]{x}}{a}$, $\frac{a}{x}$ та 16 відповідно, тому

$$\left(\frac{\sqrt[4]{x}}{a} + \frac{a}{x}\right)^{16} = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k \left(\frac{\sqrt[4]{x}}{a}\right)^{16-k} \left(\frac{a}{x}\right)^k = \sum_{k=0}^{16} C_{16}^k x^{\frac{16-k}{4} - k} a^{-(16-k)+k} =$$
$$\sum_{k=0}^{16} C_{16}^k x^{\frac{-5k+16}{4}} a^{2k-16}.$$

Для того, щоб член розкладу бінома містив x^{-1} потрібно, щоб існувало таке натуральне значення k, щоб показник степеня змінної x дорівнював -1. Щоб виявснити чи таке значення існує, достатньо розв'язати рівняння

$$\frac{-5k+16}{4} = -1.$$

Отже, $k = 4$. Оскільки розклад бінома містить $n + 1$ членів(сума починається з нуля), то шуканим буде п'ятий член

$$T_5 = C_{16}^4 \left(\frac{\sqrt[4]{x}}{a}\right)^{16-4} \left(\frac{a}{x}\right)^4 = \frac{16!}{4!12!} x^{-1} a^{-8} = \frac{1820}{xa^8}.$$

Завдання 18. *Знайдіть x, y, z, якщо відомо, що другий, третій і четвертий члени розкладу $(x+y)^z$ відповідно дорівнюють 240, 720 і 1080 відповідно.*

Розв'язок. Випишемо другий, третій і четвертий члени розкладу $(x+y)^z$:

$$T_2 = C_z^1 x^{z-1} y^1 = \frac{z!}{1!(z-1)!} x^{z-1} y = z x^{z-1} y;$$
$$T_3 = C_z^2 x^{z-2} y^2 = \frac{z!}{2!(z-2)!} x^{z-2} y^2 = \frac{z(z-1)x^{z-2}y^2}{2};$$
$$T_4 = C_z^3 x^{z-3} y^3 = \frac{z!}{3!(z-3)!} x^{z-3} y^3 = \frac{z(z-1)(z-2)x^{z-3}y^3}{6}.$$

За умовою завдання вони дорівнюють 240, 720 і 1080 відповідно, тому отримаєм систему трьох рівнянь:

$$\begin{cases} zx^{z-1}y = 240; \\ z(z-1)x^{z-2}y^2 = 1440; \\ z(z-1)(z-2)x^{z-3}y^3 = 6480. \end{cases}$$

Підставимо перше рівняння в друге, а друге в третє:

$$\begin{cases} zx^{z-1}y = 240; \\ \frac{(z-1)y}{x} \cdot 240 = 1440; \\ \frac{(z-1)(z-2)y^2}{x^2} \cdot 240 = 6480. \end{cases}$$

В процесі перетворень друге та третьє рівняння ми множили та ділили на x та x^2 відповідно. Це дійсно можна робити, оскільки жодна зі змінних не може дорівнювати нулю, бо тоді система не мала б розв'язків.

Підставимо друге рівняння в третє:

$$\begin{cases} zx^{z-1}y = 240; \\ (z-1)\frac{y}{x} = 6; \\ 6(z-2)\frac{y}{x} = 27. \end{cases}$$

Виразивши з двох останніх рівнянь системи $\frac{x}{y}$, та прирівнявши їх, отримаєм рівняння відносно змінної z :

$$\frac{6(z-2)}{27} = \frac{z-1}{6}.$$

Розв'язвши його, матимемо $z = 5$.

Таким чином, система має єдиний розв'язок $(2, 3, 5)$, що ї є розв'зком задачі.

Завдання для індивідуальної та самостійної робіт

Завдання 1. *Записати множини переліком їх елементів:*

1. $A = \{n : n = 3k + 2, k \in \mathbf{N}, n < 27\}$;
2. $A = \left\{x \in \mathbf{Z} : x^2 - 5x + 6 = 0\right\}$;
3. $A = \{n : n = 5k + 1, k \in \mathbf{N}, n < 42\}$;
4. $A = \left\{x \in \mathbf{Z} : x^2 - 3x + 2 = 0\right\}$;
5. $A = \left\{x \in \mathbf{R} : 2\sin x = -1, -\frac{\pi}{2} < x \le 4\pi\right\}$;
6. $A = \left\{x \in \mathbf{R} : 2\cos 2x = -\sqrt{2}, 0 \le x \le 3\pi\right\}$;
7. $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \sqrt{3}\,\mathrm{tg}(x + \frac{\pi}{6}) = 1, -3\pi \le x \le 0\right\}$;
8. $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \sin \pi x = 1, -\frac{1}{2} \le x \le 9\right\}$;
9. $A = \left\{x \in \mathbf{R} : 2^{x+1} - 7 \cdot 2^{x-2} = 16\right\}$;
10. $A = \left\{x \in \mathbf{R} : 2^{x+4} - \left(\frac{1}{2}\right)^{-x} = 120\right\}$;
11. $A = \left\{x \in \mathbf{Z} : \sin x < \cos x, -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{5\pi}{4}\right\}$;
12. $A = \left\{x \in \mathbf{Z} : \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 5x + 6) \ge -1\right\}$;
13. $A = \left\{x \in \mathbf{Z} : \sqrt{3}\sin x + \cos x < 1, -\frac{\pi}{4} \le x < 2\pi\right\}$;
14. $A = \left\{x \in \mathbf{Z} : \log_{\frac{1}{2}} \log_8(x^2 + 6x + 1) > 0\right\}$;
15. $A = \left\{x \in \mathbf{R} : \sin^2(2x) - \sin^2 x = \frac{1}{2}, 0 \le x \le 2\pi\right\}$;
16. $A = \left\{x \in \mathbf{R} : 2^{-x+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-x+3}\right\}$;
17. $A = \left\{x \in \mathbf{R} : 2^{|x-1|} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}\right\}$;
18. $A = \left\{x \in \mathbf{Z} : \lg^2 100x - 5\lg x > 6\right\}$;
19. $A = \{x \in \mathbf{R} : 16^x - 20 \cdot 4^x + 64 = 0\}$;
20. $A = \left\{x \in \mathbf{Z} : \lg(-x) + \lg x^2 - 3 < 0\right\}$.

Завдання 2. *Знайдіть* $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, *якщо*

№	A	B
1.	$\left\{x \in \mathbf{R} : x^2 + 6x + 8 < 0\right\}$	$\left\{x \in \mathbf{R} : x^2 + 3x < 0\right\}$
2.	$\{x \in \mathbf{R} : \|x - 3\| > 1\}$	$\{x \in \mathbf{R} : \|x - 1\| < 4\}$
3.	$\{x \in \mathbf{R} : \|x - 2\| \geq 2\}$	$\{x \in \mathbf{R} : \|x\| < 3\}$
4.	$\{x \in \mathbf{R} : \|x + 1\| < 2\}$	$\left\{x \in \mathbf{R} : -x^2 - 4x - 3 \geq 0\right\}$
5.	$\left\{x \in \mathbf{R} : x^2 - 6x - 7 < 0\right\}$	$\left\{x \in \mathbf{R} : x - x^2 \leq 0\right\}$
6.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x > y\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \leq 2y\right\}$
7.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \leq \sqrt{x}\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq x^2\right\}$
8.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > x^2\right\}$
9.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x - y \geq 0\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y < 0\right\}$
10.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy \geq 0\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y < x^2\right\}$
11.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy \leq 0\right\}$
12.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 < 16\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x + y < 2\right\}$
13.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x \geq 3y\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y < -x\right\}$
14.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \leq 4\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 > 9\right\}$
15.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 2x + 3y \geq 6\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - 2)^2 + y^2 \leq 4\right\}$
16.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : xy \geq 0\right\}$
17.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y < x^2\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - 1)^2 + y^2 < 9\right\}$
18.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 4\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq \frac{1}{x^2}\right\}$
19.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 3x - 4y < 12\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -2x + 4y > 4\right\}$
20.	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - 1)^2 + (y + 1)^2 \geq 4\right\}$	$\left\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : 3x - 6y < 9\right\}$

Завдання 3. *Довести, що для довільного натурального* n *мають місце співвідношення:*

1. число $n^3 - 7n$ ділиться на 6;
2. число $6^{2n} - 1$ ділиться на 35;
3. число $6^{2n-1} + 1$ ділиться на 7;
4. число $5^n - 3^n + 2n$ ділиться на 4;
5. $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
6. $5 + 45 + \ldots + (4n + 1)5^{n-1} = n5^n$;
7. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n - 1)^2 = \frac{n(4n^2-1)}{3}$;
8. $(n + 1)(n + 2) \cdot \ldots \cdot (n + n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n - 1)$;

9. $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}$;

10. $2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 2^2 + \ldots + (n+1) \cdot n^2 = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$;

11. $\frac{1}{1\cdot3\cdot5} + \frac{2}{3\cdot5\cdot7} + \ldots + \frac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$;

12. $\left(1 - \frac{4}{1}\right)\left(1 - \frac{4}{9}\right)\ldots\left(1 - \frac{4}{(2n-1)^2}\right) = \frac{1+2n}{1-2n}$;

13. $\frac{1}{1\cdot5} + \frac{1}{5\cdot9} + \ldots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}$;

14. $\frac{1\cdot4}{2\cdot3} + \frac{2\cdot5}{3\cdot5} + \ldots + \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+1)}{n+2}$;

15. число $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ ділиться на 7;

16. число $2^{2n} + 19^n - 2^{n-1}$ ділиться на 17;

17. $2^n > 2n + 1, n > 3$;

18. $3^n > 4n + 1, n > 3$;

19. $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

20. $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

Завдання 4. *Розв'яжіть рівняння:*

1. $\frac{A_x^7 - A_x^5}{A_x^5} = 89$;	11. $C_{2x}^x = 6C_{2x+1}^{x+1}$;
2. $A_7^x = xA_7^{x-1}$;	12. $C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$;
3. $5C_x^3 = C_{x+2}^4$;	13. $C_{4x+9}^{4x+4} = 5A_{4x+7}^3$;
4. $\frac{1}{C_4^x} = \frac{1}{C_5^x} + \frac{1}{C_6^x}$;	14. $C_{x+1}^5 = \frac{3}{8}A_x^3$;
5. $A_{x+2}^{n+2} \cdot P_{x-n} = 110P_x$;	15. $C_{x+4}^{x+1} - C_{x+3}^x = 15(x+2)$;
6. $C_{x+1}^{x-4} = \frac{7}{15}A_{x+1}^3$;	16. $C_{x+3}^{x+1} = C_{x+1}^{x-1} + C_{x+1}^x + C_x^{x-2}$;
7. $\frac{A_{x-5}^2}{C_{x-5}^{x-7}} = \frac{112}{A_{x-5}^2}$;	17. $(x+2)! = 132A_x^k \cdot P_{x-k}$.
8. $\frac{P_{x+3}}{A_x^5 P_{x-5}} = 720$;	18. $A_x^2 = 28x - 12C_x^3$;
9. $A_{x+1}^{x-2} = P_x + P_{x-1}$;	19. $\frac{A_{x+1}^3 - C_x^4}{C_x^4} = 23$;
10. $A_{x-2}^2 + C_x^{x-2} = 101$;	20. $A_x^{x-1} + 2P_{x-1} = \frac{30}{7}P_x$.

Завдання 5.

1. У розкладі бінома $\left(x^2y + xy^2\right)^8$ знайти доданок, що містить $x^{11}y^3$.
2. У розкладі бінома $\left(2x^2 - \frac{a}{2x^3}\right)^{10}$ знайти член, що не містить x.
3. Знайти середній член розкладу $\left(\frac{a}{x} - x^{\frac{1}{2}}\right)^{16}$.
4. У розкладі бінома $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ п'ятий член розкладу не залежить від x. Знайти n.
5. У розкладі бінома $\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^n$ визначити член розкладу, який містить x^3.
6. Знайти сьомий член розкладу бінома $\left(a^2\sqrt{a} + \frac{\sqrt[3]{a}}{a}\right)^n$, якщо біноміальний коефіцієнт третього члена розкладу дорівнює 36.
7. При якому значенні x коефіцієнт четвертого члена розкладу бінома $(a+b)^{\lg x - 2}$ дорівнює показнику бінома?
8. Знайти x, якщо п'ятий член розкладу бінома $\left(\sqrt{x} + x^{-1}\right)^6$ дорівнює $\frac{5}{9}$.
9. Знайти значення x в виразі $\left(x + x^{\lg x}\right)^5$, третій член розкладу якого дорівнює 10^6.
10. Знайти члени розкладу бінома $\left(\sqrt[5]{3} + \sqrt[7]{2}\right)^{24}$, які не містять ірраціональності.
11. Знайти п'ятий член розкладу бінома $\left(\sqrt[3]{2} - \sqrt{2^{-1}}\right)^n$, якщо останній член цього розкладу дорівнює $\left(3\sqrt[3]{9}\right)^{-\log_3 8}$.
12. Знайдіть той член розкладу бінома $(\sqrt{a} + \sqrt[4]{a})^{20}$, котрий містить множник a^7.
13. Знайти x, якщо третій член розкладу бінома $\left(2\sqrt[x]{2^{-1}} + \frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ дорівнює 240.
14. Знайти значення x в виразі $\left((\sqrt{x})^{\frac{1}{\operatorname{tg} x+1}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$, четвертий член розкладу якого дорівнює 200.

15. Які члени розкладу (за номером) бінома $(a^4 - a^{-1})^{10}$ містять a з від'ємним показником? Знайдіть ці члени.

16. У розкладі бінома $(\sqrt[3]{a} + \sqrt{a^{-1}})^{15}$ визначити елемент, який не залежить від a.

17. Знайдіть член, який має x^4 в розкладі бінома $(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^9$.

18. Шостий і десятий біноміальні коефіцієнти рівні між собою. Обчисліть їх.

19. Шостий і десятий біноміальні коефіцієнти розкладу $(x + a)^n$ рівні між собою. Запишіть четвертий член цього розкладу.

20. Знайдіть середній член розкладу $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^{14}$.

ФУНКЦІЇ. ГРАФІКИ ФУНКЦІЙ

Теоретичні питання

1. Поняття функції. Область визначення, область значення функції.

Нехай задано дві непорожні множини X та Y. Якщо кожному значенню $x \in X$ ставиться у відповідність єдине значення $y \in Y$, то кажуть, що на множині X задана функція $y = f(x)$ зі значеннями в Y. При цьому X називають областю визначення функції $f(x)$,(позначають D_f) а Y – областю значення $f(x)$(позначають E_f).

Графіком функції $y = f(x)$ називається сукупність точок $\{(x, f(x)) : x \in D_f\}$.

2. Основні елементарні фнукції. Монотонність, парність, періодичність.

Основними елементарними функціями є:

1. Степенева функція $y = x^\alpha, \alpha \in \mathbf{R}$;

2. Показникова функція $y = a^x, a > 0, a \neq 1$;

3. Логарифмічна функція $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$;

4. Тригонометричні функції $y = \sin x, y = \cos x, y = \operatorname{tg} x, y = \operatorname{ctg} x$;

5. Обернені тригонометричні функції $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \operatorname{arctg} x, y = \operatorname{arcctg} x$.

Функція $y = f(x)$ називається монотонно зростаючою (спадною) якщо $\forall x_1, x_2 \in D_f$, $x_1 < x_2$ виконується умова $f(x_1) < f(x_2)(f(x_1) > f(x_2))$.

Функція $y = f(x)$ називається парною(непарною) якщо $\forall x \in D_f$, виконується умова $f(-x) = f(x)(f(-x) = -f(x))$.

Якщо не виконується жодна із вище наведених умов, то функція називається ні парною ні непарною.

Графік парної функції симетричний відносно осі OY, графік непарної симетричний відносно початку координат.

Функція $y = f(x)$ називається періодичною якщо $\exists T > 0$ таке, що $\forall x \in D_f$ виконується $f(x+T) = f(x)$. Найменше T для якого виконується така умова називається періодом функції $y = f(x)$.

3. Суперпозиція функцій. Обернена функція.

Нехай задані функції $y = f(x)$, $x = \varphi(t)$. Суперпозицією цих функцій або складеною функцією назвемо функцію, визначену за правилом $y = f(\varphi(t))$.

Якщо рівняння $y = f(x)$ може бути однозначно розв'язане відносно змінної x, тобто існує така функція $x = g(y)$, що $y = f(g(y))$, то функція $x = g(y)$ називається оберненою до $y = f(x)$.

4. Графіки функцій. Перетворення графіків функцій.

$f(x) \to f(x) + (-)a, a > 0$ – паралельний перенос графіка функції $y = f(x)$ вздовж осі OY на a одиниць вгору(вниз).

$f(x) \to f(x + (-)a), a > 0$ – паралельний перенос графіка функції $y = f(x)$ вздовж осі OX на a одиниць вліво(вправо).

$f(x) \to -f(x)$ – симетрія відносно осі OX.

$f(x) \to f(-x)$ – симетрія відносно осі OY.

$f(x) \to f(|x|)$ – симетрія відносно осі OY тієї частини графіку $y = f(x)$, що знаходиться праворуч відносно осі OY.

$f(x) \to |f(x)|$ – симетрія відносно осі OX тієї частини графіку $y = f(x)$, що знаходиться нижче відносно осі O.

$f(x) \to cf(x), c > 0$ – розтяг(стиск) графіку функції $y = f(x)$ вздовж осі OY в $c((\frac{1}{c}))$ разів якщо $c > 1(0 < c < 1)$.

$f(x) \to f(cx), c > 0$ – стиск(розтяг) графіку функції $y = f(x)$ вздовж осі OX в $c\left(\frac{1}{c}\right)$ разів якщо $c > 1(0 < c < 1)$.

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Знайти область визначення функцій:*

$$а)\ f(x) = \arccos\frac{3}{4+2\sin x}, \qquad б)\ f(x) = \frac{\operatorname{tg} x}{\sqrt{x^2-x+1}}.$$

Розв'язок. а) Функція визначена для тих x, для яких

$$-1 \le \frac{3}{4+2\sin x} \le 1.$$

Оскільки $4+2\sin x > 0$ для всіх x, то подвійна нерівність зводиться до одинарної

$$\frac{3}{4+2\sin x} \le 1.$$

Таким чином, маємо

$$3 \le 4+2\sin x, \text{ або } \sin x \ge \frac{1}{2}.$$

Розв'язуючи останню нерівність, отримаємо

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi k \le x \le \frac{7\pi}{6}+2\pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

б) Оскільки $x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$, то знаменник дробу визначений для будь-яких значень x та не перетворюється в нуль. Чисельник дробу $\operatorname{tg} x$ не є визначеним при $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Таким чином, весь дріб визначений при всіх значеннях x, окрім $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$. Іншими словами, область визначення функції задається нерівностями:

$$\pi n-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}+\pi n, \; n \in \mathbf{Z}.$$

Завдання 2. *Знайти область значень функцій:*

$$\text{а) } f(x)=\frac{1}{2-\cos 3x}, \quad \text{б) } f(x)=\frac{x}{1+x^2}.$$

Розв'язок. а) Прирівняємо вираз $\frac{1}{2-\cos 3x}$ до змінної y та розв'яжемо відносно $\cos 3x$ отримане рівняння. Матимемо, що

$$\cos 3x=\frac{2y-1}{y}.$$

Оскільки $-1 \le \cos 3x \le 1$, то й $-1 \le \frac{2y-1}{y} \le 1$. Враховуючи, що $y>0$ (оскільки як чисельник так і знаменник дробу є додатніми) та розв'язавши подвійну нерівність, отримаємо:

$$-y \le 2y-1 \le y \text{ або } \frac{1}{3} \le y \le 1.$$

б) Аналогічно розв'яжемо відносно x рівняння $\frac{x}{1+x^2}=y:$

$$x=\frac{1 \pm \sqrt{1-4y^2}}{2y}.$$

Область зміни функції y визначається із співвідношення

$$1 - 4y^2 \geq 0.$$

Звідки

$$-\tfrac{1}{2} \leq y \leq \tfrac{1}{2}.$$

Завдання 3. *Дослідіть на монотонність наступні функції:*
а) $f(x) = x^3 + 3x + 5$;
б) $f(x) = \frac{3}{4+x^2}$;
в) $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x^3 - 2x + 3\right)$;
г) $f(x) = (x^2 - 2x + 3)\ln(x^2 - 2x + 3)$.
Розв'язок. а) Відмітимо, що функція визначена на всій числовій осі. Виберемо довільні дві точки $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ такі, що $x_1 < x_2$ та складемо різницю значень функції в цих точках:

$$\begin{gathered} f(x_2) - f(x_1) = (x_2^3 + 3x_2 + 5) - (x_1^3 + 3x_1 + 5) = \\ = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2) + 3(x_2 - x_1) = \\ = (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_1x_2 + x_1^2 + 3) = \\ = (x_2 - x_1)\left[\left(x_1 + \tfrac{1}{2}x_2\right)^2 + \tfrac{3}{4}x_2^2 + 3\right]. \end{gathered}$$

Оскільки $x_2 - x_1 > 0$ а також вираз, що стоїть в квадратних дужках додатній при всіх $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$, то й $f(x_2) - f(x_1) > 0$, тобто $f(x_2) > f(x_1)$. А це означає, що функція $f(x)$ зростає для всіх $x \in \mathbf{R}$.
б) Оскільки знаменник не перетворюється в нуль, то функція визначена для всіх $x \in \mathbf{R}$. Для $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+$ таких, що $x_1 < x_2$,

$$\begin{gathered} x_1^2 < x_2^2, \\ 4 + x_1^2 < 4 + x_2^2, \\ \tfrac{1}{4+x_1^2} > \tfrac{1}{4+x_2^2}, \\ f(x_1) = \tfrac{3}{4+x_1^2} > \tfrac{3}{4+x_2^2} = f(x_2). \end{gathered}$$

Тобто при $x \in \mathbf{R}^+$ функція є спадною.

Нехай $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^-$ такі, що $x_1 < x_2$, тоді

$$\begin{gathered} x_1^2 > x_2^2, \\ 4 + x_1^2 > 4 + x_2^2, \\ \tfrac{1}{4+x_1^2} < \tfrac{1}{4+x_2^2}, \\ f(x_1) = \tfrac{3}{4+x_1^2} < \tfrac{3}{4+x_2^2} = f(x_2). \end{gathered}$$

Таким чином при $x \in \mathbf{R}^-$ функція є зростаючою.
в) Оскільки $f(x) = \operatorname{arctg} z$, $z \in \mathbf{R}$ функція зростаюча, а функція $z = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ зростає при $x > 1$ та спадає при $x < 1$, то

функція $f(x) = \operatorname{arctg}\left(x^3 - 2x + 3\right)$ є зростаючою при $x > 1$ та спадною при $x < 1$.
г) Функція $f(x) = z \ln z$ при $z > 1$ є добутком двох зростаючих додатних функцій, тому й сама є зростаючою. Функція $z = x^2 + 4x + 6 = (x+2)^2 + 2$ зростає при $x > -2$ та спадає при $x < -2$, а її значення є більшими від одиниці. Тому й функція $f(x) = (x^2 - 2x + 3)\ln(x^2 - 2x + 3)$ зростає при $x > -2$ та спадає при $x < -2$.
Завдання 4. *Дослідіть наступні функції на парність чи непарність:*
а) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$;
б) $f(x) = \lg\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$;
в) $f(x) = x^5 - 3x^3 + x$;
г) $f(x) = \sin x + \cos x$.
Розв'язок. а) Функція $f(x)$ визначена на проміжку $|x| \leq 1$ симетричному відносно початку координат.

$$f(-x) = \sqrt{1 - (-x)^2} = \sqrt{1 - x^2} = f(x).$$

Отже, функція $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ є парною.
б) Відмітимо, що $1 + x^2 > 0$ й $x^2 + \sqrt{1 + x^2} > 0$ для всіх $x \in \mathbf{R}$, тобто областю визначення функції є вся числова пряма.

$$\begin{gathered} f(-x) = \lg\left(-x + \sqrt{1 + (-x)^2}\right) = \lg \frac{\left(-x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \\ = \lg \frac{1+x^2-x^2}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \lg \frac{1}{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)} = \lg\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)^{-1} = \\ = -\lg\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right) = -f(x). \end{gathered}$$

Дана функція непарна.
в) Область визначення фукнції вся числова вісь.

$$f(-x) = (-x)^5 - 3(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 3x^3 - x = -(x^5 - 3x^3 + x) = -f(x).$$

Функція непарна.
г) Область визначення фукнції вся числова вісь. Враховуючи, що елементарні функції $\sin x$, $\cos x$ є непарною та парною відповідно

$$f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x = -(\sin x - \cos x).$$

Оскільки $f(-x) \neq -f(x)$ а також $f(-x) \neq f(x)$, то функція не є ні парною ні непарною.
Завдання 5. *Визначити чи є наступні функції періодичними та знайти їх найменший період:*
а) $f(x) = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{3}$;

б) $f(x) = \sin 3x + \sin \sqrt{2}x$;
в) $f(x) = \sin x^2$;
г) $f(x) = \cos^2 \frac{2x}{3}$.
Розв'язок. Найменший період тригонометричних функцій $y = \sin \omega x$, $y = \cos \omega x$ дорівнює $\frac{2\pi}{\omega}$, а для функцій $y = \operatorname{tg} \omega x$, $y = \operatorname{ctg} \omega x$ він дорівнює $\frac{\pi}{\omega}$. Якщо функції $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$ мають періоди T_1 та T_2 відповідно, то $T = \text{НСК}\,(T_1, T_2)$ буде періодом функції $y = \varphi(x) + \psi(x)$. Справді, якщо $T = kT_1$, $k \in \mathbf{N}$, $T = lT_2$, $l \in \mathbf{N}$, то

$$\varphi(x+T) + \psi(x+T) = \varphi(x+kT_1) + \psi(x+lT_2) = \varphi(x) + \psi(x).$$

а) Функції $2\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ та $\operatorname{tg}\frac{x}{3}$ мають періоди 2π та 3π відповідно, тому $T = \text{НСК}\,(2\pi, 3\pi) = 6\pi$ є періодом даної функції. Залишається ще показати, що цей період є найменшим. Нехай T – період фкнції $f(x)$, тоді при будь-якому значенні x із області визначення функції $f(x)$

$$2\operatorname{tg}\frac{x+T}{2} + \operatorname{tg}\frac{x+T}{3} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{tg}\frac{x}{3},$$

або, після відповідних перетворень,

$$\frac{2\sin\frac{T}{2}}{\sin\left(\frac{x+T}{2}\right)\cos\frac{x}{2}} + \frac{\sin\frac{T}{3}}{\sin\left(\frac{x+T}{3}\right)\cos\frac{x}{3}} = 0.$$

Остання тотожність матиме місце тільки якщо $\sin\frac{T}{2} = 0$ та $\sin\frac{T}{3} = 0$. Найменшим додатнім числом, що задовольняє останнім двом рівностям є $T = 6\pi$. Таким чином 6π й буде найменшим періодом функції $f(x)$.
б) Найменші періоди функцій $y = \sin 3x$ та $y = \sin\sqrt{2}x$ дорівнюють $\frac{2\pi}{3}$ та $\pi\sqrt{2}$ відповідно. Ці числа не мають спільного кратного, тому слід очікувати, що в даному випадку функція $f(x)$ не буде періодичною. Це дійсно так і доводиться вище наведеним методом.
в) Дана функція не буде періодичною. Доведемо це. Припустимо, що це не так, тобто існує число $T > 0$ таке, що для всіх $x \in \mathbf{R}$ виконується рівність

$$\sin x^2 = \sin(x+T)^2.$$

В отриманій рівності покладемо $x = 0$, отримаємо $0 = \sin T^2$, або $T = \sqrt{\pi n}$, $n \in \mathbf{Z}$. Підставивши отримане значення T в останню рівність, матимемо:

$$\sin x^2 = \sin\left(x + \sqrt{\pi n}\right)^2 = \sin\left(x^2 + 2x\sqrt{\pi n} + \pi n\right).$$

Виберемо x таким чином, щоб воно не співпадало з числами виду $\frac{2m\pi - n\pi}{2\sqrt{n\pi}}$, $m, n \in \mathbf{Z}$. Тоді $2x\sqrt{n\pi} + n\pi \neq 2m\pi$, тому

$$\sin x^2 \neq \sin\left(x^2 + 2x\sqrt{\pi n} + \pi n\right).$$

Отримане протиріччя й доводить, що фнукція $f(x) = \sin x^2$ не є періодичною.
г) Якщо число T є періодом функції $f(x)$, то воно буде й періодом функції $f^n(x)$, $n \in \mathbf{Q}$. Дійсно,

$$f^n(x+T) = (f(x+T))^n = (f(x))^n = f^n(x).$$

Таким чином функція $f(x) = \cos^2 \frac{2x}{3}$ має той самий період що й $\cos \frac{2x}{3}$ рівний 3π.
Завдання 6. *Для функції* $y = f(x)$ *знайти обернену* $y = f^{-1}(x)$, *якщо:*
а) $f(x) = 2x + 6$;
б) $f(x) = 2x - x^2, x \geq 1$;
в) $f(x) = \frac{4-x}{4+x}$;
г) $f(x) = \sin x$.
Розв'язок. а) Функція $y = 2x + 6$ визначена та зростає на всій числові осі. Тому існує обернена, що також є зростаючою. Розв'язуючи рівняння $y = 2x+6$ відносно змінної x, отримаємо: $x = \frac{y}{2}-3$. Змінивши позначення незалежної та залежної змінних на загально прийняті, матимемо:

$$y = \tfrac{x}{2} - 3.$$

б) З'ясуємо чи є дана функція оборотною. Для цього дослідимо її на монотонність. Нехай $1 \leq x_1 < x_2$, складемо різницю:

$$f(x_2) - f(x_1) = 2x_2 - x_2^2 - \left(2x_1 - x_1^2\right) =$$
$$= 2(x_2 - x_1) - (x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = (x_2 - x_1)(2 - x_2 - x_1).$$

Оскільки $x_1, x_2 \geq 1$, то $2 - x_1 - x_2 < 0$, а також $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) < 0$, тобто при $x \geq 1$ функція є спадною, а отже і оборотною.

Співвідношення $y = 2x - x^2$ розв'яжемо відносно змінної $x : x = 1 \pm \sqrt{1-y}$. За умовою задачі змінна $x \geq 1$, тому візьмемо тільки $x = 1 + \sqrt{1-y}$. Отже, обернена функція має вигляд:

$$y = 1 + \sqrt{1-x}, \quad x \leq 1.$$

в) Функція визначена та є монотонно спадною на всій числовій прямій окрім точки $\{-4\}$. Покажемо, що це дійсно так. Віднімемо та додамо в чисельнику 4 та виділимо цілу частину:

$$y = \tfrac{4-x}{4+x} = \tfrac{-4-x+8}{4+x} = -1 + \tfrac{8}{4+x}.$$

Нехай $x_1 < x_2 < -4$, тоді

$$4 + x_1 < 4 + x_2 < 0,$$
$$\tfrac{1}{4+x_1} > \tfrac{1}{4+x_2},$$
$$f(x_1) = -1 + \tfrac{8}{4+x_1} > -1 + \tfrac{8}{4+x_2} = f(x_2),$$

тобто функція є спадною. Аналогічно розглядається випадок коли $-4 < x_1 < x_2$.

Співвідношення $y = \frac{4-x}{4+x}$ розв'яжемо відносно змінної $x : x = \frac{4-4y}{1+y}$. Змінивши x та y місцями, матимемо вигляд оберненої функції:

$$y = \tfrac{4-4x}{1+x}.$$

г) Область визначення функції $y = \sin x$ – вся числова вісь, область значень – відрізок $[-1, 1]$. Однак умова оборотності не виконується.

Розіб'ємо вісь Ox на відрізки $\pi n - \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi n + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$. Якщо n – парне, то на даних відрізках функція зростає, якщо ж непарне, то спадає. Таким чином на кожному з цих відрізків існує обернена функція, визначена на $[-1, 1]$, зокрема, для відрізку $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ існує обернена $x = \arcsin y$.

В загальному ж випадку, обернена до функції $y = \sin x$ на відрізку $\pi n - \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi n + \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbf{Z}$ виражається через $\arcsin y$ та після перейменування змінних має вигляд:

$$y = (-1)^n \arcsin x + \pi n,\ n \in \mathbf{Z}.$$

Завдання 7. *Побудувати графіки функцій:*
а) $f(x) = -\frac{x^2}{2} - x - \frac{3}{2}$;
б) $f(x) = \frac{4x-2}{2x+3}$;
в) $f(x) = \log_2(3x+2)^4$;
г) $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$.
Розв'язок. а) Виділимо повний квадрат:

$$f(x) = -\tfrac{x^2}{2} - x - \tfrac{3}{2} = -\tfrac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 3\right) = -\tfrac{1}{2}\left(x^2 + 2x + 1\right) - 1 = \\ = -\tfrac{1}{2}\left(x+1\right)^2 - 1.$$

Таким чином графік даної функції можна отримати шляхом наступних геометричних перетворень із графіку функції $y = x^2$:

$$x^2 \to (x+1)^2 \to \tfrac{1}{2}(x+1)^2 \to -\tfrac{1}{2}(x+1)^2 \to -\tfrac{1}{2}(x+1)^2 + 1.$$

Перше перетворення є паралельним перенесенням графіку функції $y = x^2$ вздовж осі OX в сторону від'ємного напрямку на одиницю; друге –

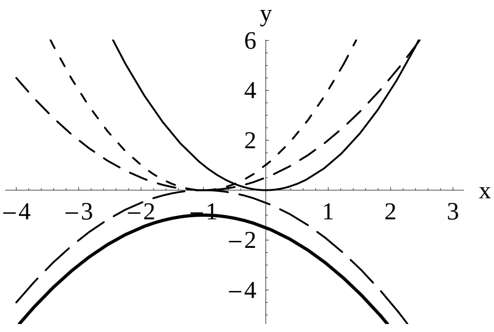

Рис. 1

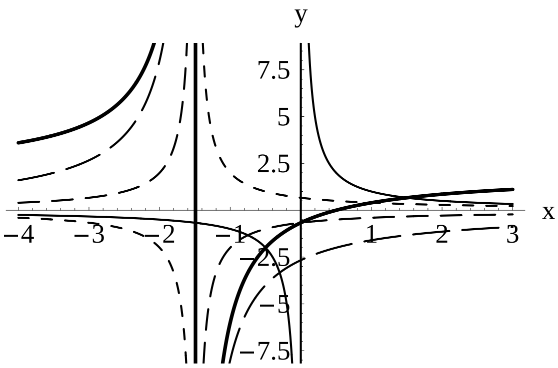

Рис. 2

стиском вже перенесеного графіку до осі OX в два рази; третє – дзеркальним відображенням вже стиснутого графіку відносно осі OX; четверте – паралельним перенесенням останнього графіку вздовж додатнього напряму осі OY на одиницю. Послідовність даних перетворень зображена на рис 1.
б) Виконаємо наступні елементарні перетворення:

$$f(x) = \frac{4x-2}{2x+3} = \frac{4x+6-8}{2x+3} = 2 + \frac{-8}{2x+3} = 2 + \frac{-8}{2\left(x+\frac{3}{2}\right)} = 2 - \frac{4}{x+\frac{3}{2}}.$$

Отже, графік даної функції можна отримати із графіку функції $y = \frac{1}{x}$ шляхом наступних геометричних перетворень:

$$\frac{1}{x} \to \frac{1}{x+\frac{3}{2}} \to -\frac{1}{x+\frac{3}{2}} \to -\frac{4}{x+\frac{3}{2}} \to 2 - \frac{4}{x+\frac{3}{2}}$$

Перше перетворення є паралельним перенесенням графіку функції $y = \frac{1}{x}$ вздовж осі OX в сторону від'ємного напрямку на $\frac{3}{2}$ одиниці; друге – дзеркальним відображенням відносно осі OX; третє – розтягом від осі OX в чотири рази; четверте – паралельним перенесенням вздовж додатнього напряму осі OY на дві одиниці. Послідовність даних перетворень зображена на рис 2.
в) Оскільки

$$f(x) = \log_2(3x-2)^4 = 4\log_2|3x-2| = 4\log_2\left(3\left|x-\tfrac{2}{3}\right|\right),$$

то графік даної функції можна отримати із графіку функції $y = \log_2 x$ шляхом наступних геометричних перетворень:

$$\log_2 x \to \log_2(3x) \to \log_2(3|x|) \to \log_2\left(3\left|x-\tfrac{2}{3}\right|\right) \to 4\log_2\left(3\left|x-\tfrac{2}{3}\right|\right).$$

Перше перетворення є стиском графіку функції $y = \log_2 x$ в три рази до осі OY; друге – дзеркальним відображенням відновно осі OY тієї

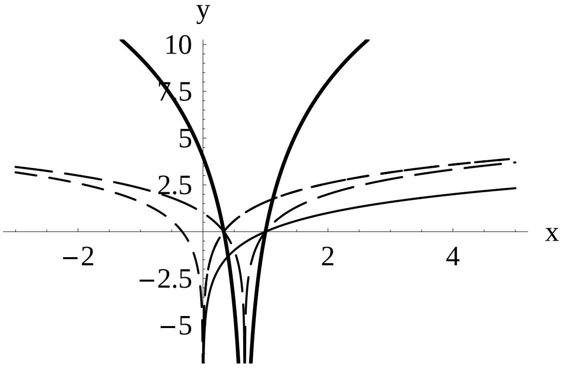

Рис. 3

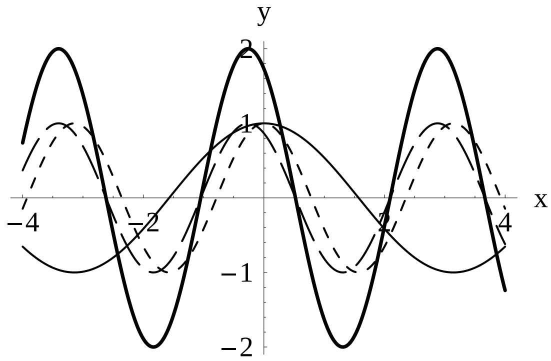

Рис. 4

частини графіку, що знаходиться справа від осі OY; третє – паралельним перенесенням вздовж осі OX в сторону додатнього напрямку на $\frac{2}{3}$; четверте – розтягом від осі OX в чотири рази. Послідовність даних перетворень зображена на рис 3.
г) Виконаємо наступні елементарні перетворення:

$$f(x) = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) = 2\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \\ = 2\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Таким чином, графік даної функції можна отримати із графіку функції $y = \cos x$ шляхом наступних геометричних перетворень:

$$\cos x \to \cos 2x \to \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right) \to 2\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right).$$

Перше перетворення є стиском графіку функції $y = \cos x$ до осі OY в два рази; друге – паралельним перенесенням вздовж від'ємного напряму осі OX на $\frac{\pi}{6}$ одиниць; третє – розтягом від осі OX в два рази. Послідовність даних перетворень зображена на рис 4.

Завдання для індивідуальної та самостійної робіт

Завдання 1. *Знайдіть область визначення функцій:*

1. $f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{6-x}$;	11. $f(x) = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$;
2. $f(x) = \frac{3x-1}{2x^2-3x-1}$;	12. $f(x) = \lg\left(\sqrt{x-4} + \sqrt{6-x}\right)$;
3. $f(x) = \lg\left(x^2 - 4x + 3\right)$;	13. $f(x) = \sqrt{9-x^2} + \lg \frac{x+1}{x-2}$;
4. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-3x+2}}$;	14. $f(x) = \arccos \frac{3}{4+2\sin x}$;
5. $f(x) = \sqrt{\sin x} + \sqrt{16-x^2}$;	15. $f(x) = \arcsin \frac{x-3}{2} - \lg(4-x)$;

6. $f(x)=\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}+\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$;

7. $f(x)=\frac{\ln(1+x)}{x-1}$;

8. $f(x)=\arccos\frac{x-4}{2}+\ln(x-3)$;

9. $f(x)=\arcsin\frac{x-2}{2}+\sqrt{x^2-4x+3}$;

10. $f(x)=\arccos\frac{2x}{x^2+3}$;

16. $f(x)=\lg\left[1-\lg\left(x^2-5x+16\right)\right]$;

17. $f(x)=\lg\frac{x+3}{x-3}+\sqrt{x-8}$;

18. $f(x)=\frac{x-3}{x^2+10x+25}+\arccos\frac{x-10}{10}$;

19. $f(x)=\log_2(x^2-5x+6)$;

20.$f(x)=\frac{1}{x}+2^{\arcsin x}+\frac{1}{\sqrt{x-2}}$.

Завдання 2. *Визначити парними чи непарними є наступні функції:*

1. $f(x)=2^{-x^2}, \quad f(x)=\log_2|x-1|$;
2. $f(x)=|\cos x|, \quad f(x)=\sin x+\cos 2x$;
3. $f(x)=\cos(x+1), \quad f(x)=x^3-x$;
4. $f(x)=\sqrt{1-x^2}, \quad f(x)=x+\sin x^2$;
5. $f(x)=\frac{1}{2}\left(3^x+3^{-x}\right), \quad f(x)=x^2-4x+1$;
6. $f(x)=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}, \quad f(x)=\lg\sin x$;
7. $f(x)=\ln(3-x)-\ln(3+x), \quad f(x)=x^2-|x|$;
8. $f(x)=x\sin^2 x-x^3, \quad f(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$;
9. $f(x)=\frac{(1+2^x)^2}{2^x}, \quad f(x)=\lg\frac{1+x}{1-x}$;
10. $f(x)=\sin^2 x-\cos^3 x, \quad f(x)=x^{2n+1}+3,\ n\in\mathbf{N}$;
11. $f(x)=x^3\operatorname{arctg}2x, \quad f(x)=\frac{x-1}{x^2+1}$;
12. $f(x)=4x^9+\operatorname{tg}x^3, \quad f(x)=e^{-x^2}+x^4-6x^2+11$;
13. $f(x)=\sin^5 3x\cos^2 6x, \quad f(x)=\sqrt{2x^2-3x+4}$;
14. $f(x)=|\sin 3x|, \quad f(x)=x^2+7x+1$;
15. $f(x)=|\arccos x|, \quad f(x)=e^{x^2-1}$;
16. $f(x)=|\operatorname{arctg}x|, \quad f(x)=\log_2(x^2-3)$;
17. $f(x)=|\arcsin x|, \quad f(x)=\frac{\sin x}{x}$;
18. $f(x)=\arccos|x|+x^2, \quad f(x)=\operatorname{tg}x-\ln x$;
19. $f(x)=\arcsin|x|-x^2, \quad f(x)=\sqrt{x^2+\sqrt{2}}-\sqrt{3}$;
20. $f(x)=\cos x^3+7x^{12}+\sin^2 x, \quad f(x)=\lg\frac{2+x}{2-x}$.

Завдання 3. *Визначити, які з даних фунцій є періодичними та вказати їх основний період:*

1. $f(x) = 4\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right);$ 11. $f(x) = \sin^2 x + \sin 2x;$
2. $f(x) = 2\cos\left(\frac{x-\pi}{3}\right) + \sin 5x;$ 12. $f(x) = 3\sin\frac{x}{2} + 4\operatorname{tg}\frac{x}{\sqrt{2}};$
3. $f(x) = \sin\frac{\pi x}{3} + \sin\frac{\pi x}{4};$ 13. $f(x) = \cos x^2;$
4. $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + 3\right);$ 14. $f(x) = \lg|\sin x|;$
5. $f(x) = \cos x + \sin\left(x\sqrt{2}\right);$ 15. $f(x) = 2^{\sin^2 x};$
6. $f(x) = \sin\frac{2x+1}{2};$ 16. $f(x) = x\cos x;$
7. $f(x) = \cos\frac{2x+1}{2};$ 17. $f(x) = x\sin x + 1;$
8. $f(x) = \sin x + \sin\left(x\sqrt{3}\right);$ 18. $f(x) = \cos^2 x + 3;$
9. $f(x) = \cos x + \sin(2x+3);$ 19. $f(x) = \sin^3 x;$
10. $f(x) = \sin\frac{1}{x} + \cos 3x;$ 20. $f(x) = 2^{|\cos x|}.$

Завдання 4. *Визначити, чи є дана функція оборотною. Знайти проміжок $X \subset D(f)$ на якому звуження даної функції буде оборотнім. Знайти на X обернену функцію:*

1. $f(x) = \sqrt{x^2-1};$ 11. $f(x) = \frac{4-x}{4+x};$
2. $f(x) = \sqrt{1+x^2};$ 12. $f(x) = \frac{2x}{1-x};$
3. $f(x) = \frac{1-x}{1+x};$ 13. $f(x) = \sqrt[3]{x-27};$
4. $f(x) = x^2 + 4x;$ 14. $f(x) = x^2 - x;$
5. $f(x) = \frac{1}{2-x};$ 15. $f(x) = \sqrt{1-x^2};$
6. $f(x) = 2x - x^2;$ 16. $f(x) = \operatorname{sh} x = \frac{e^x - x^{-x}}{2};$
7. $f(x) = 2\sqrt{x^2-3};$ 17. $f(x) = \frac{x-3}{x+2};$
8. $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2+x^2};$ 18. $f(x) = \frac{2}{x-3};$
9. $f(x) = \frac{1}{2(x-2)};$ 19. $f(x) = x^2 - 7;$
10. $f(x) = \frac{8+x}{8-x};$ 20. $f(x) = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + x^{-x}}{2}.$

Завдання 5. *Побудувати графіки функцій:*

1. $f(x) = 2\sqrt{x-3}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right);$
2. $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1), \quad f(x) = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\right|;$
3. $f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right), \quad f(x) = -2^{2x-3};$
4. $f(x) = -2\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f(x) = \frac{3}{2}\log(2x-1);$
5. $f(x) = -3^{|x-1|}, \quad f(x) = x^2 - 4x + 2;$
6. $f(x) = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad f(x) = \log_3(2-x);$
7. $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\sin 3x - 2;$
8. $f(x) = |1+x|, \quad f(x) = 1 - \log_{\frac{1}{3}}(x+1);$
9. $f(x) = \sin x - |\sin x|, \quad f(x) = 1 - 3^{x-3};$
10. $f(x) = 2 + 3\cos(\pi - x), \quad f(x) = \frac{x+3}{x-1};$
11. $f(x) = -2\cdot 3^{2x-2}, \quad f(x) = \operatorname{tg}\left|\frac{1-x}{2}\right|;$
12. $f(x) = 4\arccos(2-x), \quad f(x) = -\log_{\frac{1}{2}}(x-1);$
13. $f(x) = \cos x - |\cos x|, \quad f(x) = \left|3x^2 - 6x + 2\right|;$
14. $f(x) = \sqrt{2x-1}, \quad f(x) = 3\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right);$
15. $f(x) = \log_3(x-2), \quad f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1};$
16. $f(x) = -2^{|x-1|}, \quad f(x) = x^2 - 3x + 1;$
17. $f(x) = 2\operatorname{arctg}(x-1), \quad f(x) = \log_2|x| + 1;$
18. $f(x) = \frac{1-x}{2-x}, \quad f(x) = \frac{1}{3}\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right);$
19. $f(x) = -3^{2x} + 1, \quad f(x) = \cos|x-3|;$
20. $f(x) = e^{-2x+1} + 3, \quad f(x) = -2\arcsin(4x+2).$

ТЕОРІЯ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ

Теоретичні питання

1. Натуральні, цілі, раціональні, ірраціональні, дійсні числа.

Натуральні числа — це числа, які виникають природним чином при лічбі. Позначаються літерою $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Цілі числа – це множина, що складається з натуральних чисел, нуля, та множини від'ємних чисел, що є протилежними до натуральних. Позначаються літерою $\mathbf{Z} = \{\ldots, -n, \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.

Раціональні числа – це множина, що складається з нескоротних дробів $\frac{p}{q}$ із цілим чисельником p та натуральним знаменником q. Позначаються літерою $\mathbf{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbf{Z}, q \in \mathbf{N} \right\}$. Раціональне число є скінченним або нескінченним але періодичним дробом.

Ірраціональні числа – це нескінченні пнеперіодичні дроби. Наприклад, число $\pi = 3,14159265\ldots$, число $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$.

Дійсні числа – множина, що складається з раціональних та ірраціональних чисел. Позначаються літерою $\mathbf{R}$. Кожному дійсному числу ставиться у відповідність одна точка на числовій прямій та навпаки, кожна точка числової прямої являє собою дійсне число.

2. Обмежені та необмежені множини. Мінімум, максимум, інфінум та супремум числових множин.

Нехай $\exists d \in \mathbf{R}\, \forall a \in A\; a \leq d)$, то число d називається верхньою межею числової множини A, а саму множиину A називають обмеженою зверху. Якщо $\exists c \in \mathbf{R}\; \forall a \in A\; a \geq c)$, то число c називається нижньою межею числової множини A, а саму множиину A називають обмеженою знизу. Якщо множина обмежена і знизу і зверху одночасно, то вона називаються обмеженою.

Нехай $A \in \mathbf{R}$. Якщо $\exists M \in A, \forall a \in A\; a \leq M$, то M називається найбільшим(максимальним) елементом множини A ($M = \max A = \max\limits_{a \in A} a$).

Якщо $\exists m \in A, \forall a \in A\; a \geq m$, то m називається найменшим(мінімальним) елементом множини A ($m = \min A = \min\limits_{a \in A} a$).

Якщо числова множина A обмежена знизу(зверху), то вона має нескінченне число нижній(верхніх) граней. Тому розглядають найбільшу з усіх нижній граней і називають її точною нижньою гранню(позначають $\alpha = \inf A$) та найменшу з усіх верхніх граней і називають її точною верхньою гранню(позначають $\beta = \sup A$.)

Точна нижня грань характеризується властивостями:

1. $\forall a \in A,\, \alpha \leq a$;

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon,\, a_\varepsilon < \alpha + \varepsilon$.

Точна верхня грань характеризується властивостями:

1. $\forall a \in A,\, a \leq \beta$;

2. $\forall \varepsilon > 0, \exists a_\varepsilon,\, a_\varepsilon > \beta - \varepsilon$.

3. Властивості абсолютної величини дійсних чисел.

Модулем або абсолтною величиною дійсного числа a називають число a, якщо $a \geq 0$, та протилежне йому число $-a$, якщо $a < 0$.

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Властивості абсолютної величини:

1. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$;
2. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$;
3. $|a \pm b| \leq |a| + |b|$;
4. $|a - b| \geq |a| - |b|$.

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Нехай A та B не порожні числові множини, $A + B$ – їх арифметична сума: $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$. Довести, що* $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

Розв'язок. Нехай $M = \sup A$, $N = \sup B$. Оскільки $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$, то $M > \infty$, $N > \infty$. Можливі два випадки:

а) $M + N < \infty$, тоді M і N скінченні числа та за означенням точної верхньої грані

$$\forall a \in A \quad a \leq M; \quad \forall b \in B \quad b \leq N; \tag{1}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists a^{'} \in A \quad a^{'} > M - \frac{\varepsilon}{2}; \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists b^{'} \in B \quad b^{'} > N - \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Із співвідношень (1) випливає, що будь-який елемент $a + b$ множини $A + B$ задовольняє нерівності

$$a + b \leq M + N. \tag{3}$$

Згідно (2) для елемента $a^{'} + b^{'}$ множини $A + B$ виконується, що

$$a^{'} + b^{'} > M + N - \varepsilon. \tag{4}$$

Із нерівностей (3) та (4) випливає, що $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

б) $M + N = \infty$. Це можливо тоді, коли $M = \infty$ або $N = \infty$. Нехай, для визначеності $M = \infty$. Тоді множина A необмежена зверху, тобто $\forall L \in \mathbf{R} \quad \exists a_0 \in A \quad a_0 > L$.

Нехай b_0 – деякий елемент B, а K– довільне дійсне число. Покладемо $L = K - b_0$, тоді $a_0 + b_0 \in A + B$ та $a_0 > L = K - b_0$, тобто $a_0 + b_0 > K$.

Остання нерівність доводить, що множина $A+B$ необмежена зверху, а отже $\sup(A+B)=\infty$. Таким чином

$$\sup(A+B)=\sup A+\sup B.$$

Завдання 2. *Для множини* $E=(0,1]$ *знайти* $\inf E$, $\sup E$, $\min E$, $\max E$.

Розв'язок. Дана множина найменшого елемента не має, тобто $\min E$ не існує, оскільки $\forall x\in(0,1]\quad\exists x^*\in E$ такий, що $x^*<x$. Множина нижніх меж для E – це множина $(-\infty,0]$ з найбільшим елементом 0, який і є точною нижньою гранню півінтервалу $(0,1]$. Отже, $\inf(0,1]=0$.

Найбільший елемент для $(0,1]$ існує і дорівнює 1. Множина верхніх меж – це множина $[1,\infty)$ з найменшим елементом, що дорівнює 1, який і є точною верхньою гранню множини E. Отже, $\max(0,1]=\sup(0,1]=1$.

Завдання 3. *Довести, що множина* $A=\left\{\frac{n}{2n+1}:n\in\mathbf{N}\right\}$ обмежена та знайти $\inf A$ та $\sup A$.

Розв'язок. Очевидно, що $\forall n\in\mathbf{N}\ 0<\frac{n}{2n+1}<1$, тобто множина A обмежена. Перетворимо вираз $\frac{n}{2n+1}$:

$$\frac{n}{2n+1}=\frac{n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{2n+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4n+2}.$$

Використовуючи останнє співвідношення, множину A запишемо у вигляді $A=B-C$, де $B=\left\{\frac{1}{2}\right\}$, $C=\left\{\frac{1}{4n+2}:n\in\mathbf{N}\right\}$.

Скористаємось рівностями($X\in\mathbf{R}$, $Y\in\mathbf{R}$):

$$\sup(X+Y)=\sup X+\sup Y;\quad \inf(X+Y)=\inf X+\inf Y;$$

$$\sup(-X)=-\inf X;\quad \inf(-X)=-\sup X.$$

Легко бачити, що при $n\in\mathbf{N}\quad 4n+2\geq 6\Rightarrow\frac{1}{4n+2}\leq\frac{1}{6}$. При $n=1$ $\frac{1}{4n+2}=\frac{1}{6}$, а отже $\sup C=\max C=\frac{1}{6}$.

$\forall n\in\mathbf{N}\quad \frac{1}{4n+2}>0$. При довільному $\varepsilon>0$ нерівність $\frac{1}{4n+2}<\varepsilon$ має розв'язок $n_\varepsilon\in\mathbf{N}$. Відповідно, $\frac{1}{4n_\varepsilon+2}\in C$ та $\frac{1}{4n_\varepsilon+2}<\varepsilon$. Отже, $\inf C=0$.

Для множини B мають місце рівності: $\inf B=\sup B=\frac{1}{2}$, отже

$$\sup A=\sup(B-C)=\sup B+\sup(-C)=\sup B-\inf C=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2},$$

$$\inf A=\inf(B-C)=\inf B+\inf(-C)=\inf B-\sup C=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Завдання 4. *Знайдіть* $\inf\left\{\sup\left\{2nx-6x^2 : x\in\mathbf{R}\right\} : n\in\mathbf{N}\right\}$.
Розв'язок. Спочатку знайдемо $\sup\left\{2nx-6x^2 : x\in\mathbf{R}\right\}$. Оскільки вираз $f(x,n)=2nx-6x^2$ по змінній x є параболою вітки якої напрямлені вниз, то найбільшого значення він набуватиме в вершині параболи, абсциса якої обчислюється за формулою $x_в=\frac{-b}{2a}$. Таким чином $x_в=\frac{-2n}{2(-6)}=\frac{n}{2}$. Отже,

$$\sup\left\{2nx-6x^2 : x\in\mathbf{R}\right\}=2nx-6x^2\Big|_{x=\frac{n}{6}}=2n\frac{n}{6}-6\frac{n^2}{36}=\frac{n^2}{6}.$$

У виразі $\frac{n^2}{6}$ знаменник є константою, тому даний дріб найменшого значення набуває тоді, коли чисельник є найменшим, тобто

$$\inf\left\{\frac{n^2}{6} : n\in\mathbf{N}\right\}=\frac{1}{6}.$$

Завдання 5. *Розв'яжіть рівняння* $\left|3x^2-10x+3\right|+\left|x^2+x-12\right|=0.$
Розв'язок. Скористаємось методом інтервалів. Коренями квадратичних тричленів, що стоять під знаком абсолютних величин є числа $\frac{1}{3}$, 3 та -4 і 3 відповідно. Розіб'ємо відповідними точками числову вісь на чотири проміжки: $(-\infty,-4)$, $\left[-4,\frac{1}{3}\right)$, $\left[\frac{1}{3},3\right)$, $[3,+\infty)$. На кожному з проміжків розкриємо абсолютну величину.

При $x\in(-\infty,-4)$ початкове рівняння матиме вигляд:

$$3x^2-10x+3+x^2+x-12=0;$$

$$4x^2-9x-9=0;$$

$$x_1=-\frac{3}{4},\quad x_2=3.$$

Оскільки $-\frac{3}{4}\notin(-\infty,-4)$, $3\notin(-\infty,-4)$, то ні $-\frac{3}{4}$ ні 3 не є розв'язком початкового рівняння.

При $x\in\left[-4,\frac{1}{3}\right)$:

$$3x^2-10x+3-x^2-x+12=0;$$

$$2x^2-11x+15=0;$$

$$x_1=\frac{5}{2},\quad x_2=3.$$

Ні $\frac{5}{2}\notin\left[-4,\frac{1}{3}\right)$, ні $3\notin\left[-4,\frac{1}{3}\right)$, тому жодне значення не є розв'язком початкового рівняння.

При $x \in \left[\frac{1}{3}, 3\right)$:

$$-3x^2 + 10x - 3 - x^2 - x + 12 = 0;$$

$$-4x^2 + 9x + 9 = 0;$$

$$x_1 = -\frac{3}{4}, \quad x_2 = 3.$$

Ні $-\frac{3}{4} \notin \left[\frac{1}{3}, 3\right)$, ні $3 \notin \left[\frac{1}{3}, 3\right)$, тому жодне значення не є розв'язком початкового рівняння.

При $x \in [3, +\infty)$:

$$3x^2 - 10x + 3 + x^2 + x - 12 = 0;$$

$$4x^2 - 9x - 9 = 0;$$

$$x_1 = -\frac{3}{4}, \quad x_2 = 3.$$

Оскільки $-\frac{3}{4} \notin [3, +\infty)$, а $3 \in [3, +\infty)$, то розв'язком початкового рівняння є лише $x = 3$.

Таким чином, множиною розв'язків початкового рівняння є одноточкова множина $\{3\}$.

Завдання 5. *Розв'яжіть нерівність* $|3x + 1| - |x + 2| > 3$.

Розв'язок. Вигляд кожної з абсолютних величин $|3x + 1|$, $|x + 2|$ залежить від того, яке значення приймає змінна x(зліва чи справа) відносно їх коренів. Тому розіб'ємо відповідними коренями числову вісь на три інтервали $(-\infty, -2)$, $[-2, -\frac{1}{3})$, $[-\frac{1}{3}, +\infty)$ та на кожному з них розв'яжемо отриману нерівність.

Для $x \in (-\infty, -2)$ вихідна нерівність матиме вигляд:

$$-3x - 1 + x + 2 > 3. \tag{5}$$

Розв'язком нерівності (5) є інтервал $(-\infty, -1)$, що містить в собі інтервал $(-\infty, -2)$, тому $(-\infty, -2)$ є розв'язком вихідної нерівності.

Для $x \in [-2, -\frac{1}{3})$:

$$-3x - 1 - x - 2 > 3. \tag{6}$$

Розв'язком нерівності (6) є інтервал $(-\infty, -\frac{3}{2})$. Оскільки змінна x розглядається тільки на проміжку $[-2, -\frac{1}{3})$, то в якості розв'язку вихідної нерівності потрібно взяти перетин $[-2, -\frac{1}{3}) \bigcap (-\infty, -\frac{3}{2}) = [-2, -\frac{3}{2})$.

Для $x \in [-\frac{1}{3}, +\infty)$:

$$3x + 1 - x - 2 > 3. \tag{7}$$

Розв'язком нерівності (7) є інтервал $(2, +\infty)$, що міститься в інтервалі $[-\frac{1}{3}, +\infty)$, тому $(2, +\infty)$ є розв'язком вихідної нерівності.

Розв'язком вихідної нерівності буде об'єднання її розв'язків на кожному з трьох розглядуваних інтервалів:

$$(-\infty, -2) \bigcap \left[-2, -\frac{3}{2}\right) \bigcap (2, +\infty) = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \bigcap (2, +\infty) .$$

Завдання для індивідуальної та самостійної робіт

Завдання 1. *Дослідіть на обмеженість множину* X, *якщо:*

1. $X = \left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$;
2. $X = \left\{\frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \ldots, \frac{1}{n!}, \ldots\right\}$;
3. $X = \left\{2, 2^2, \ldots, 2^n, \ldots\right\}$;
4. $X = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3^2}, \ldots, \frac{1}{3^n}, \ldots\right\}$;
5. $X = \left\{2 + \frac{1}{1!}, 2 + \frac{1}{2!}, \ldots, 2 + \frac{1}{n!}, \ldots\right\}$;
6. $X = \left\{1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, (-1)^n \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$;
7. $X = \left\{3, 3 - \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{2^2}, \ldots, 3 - \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$;
8. $X = \left\{1, 1 + \frac{1}{6}, 1 + \frac{1}{6^2}, \ldots, 1 + \frac{1}{6^n}, \ldots\right\}$;
9. $X = \left\{2, 2 - \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{3}, \ldots, 2 - \frac{1}{n}, \ldots\right\}$;
10. $X = \left\{1 - \frac{1}{2}, 1 - \frac{1}{2^2}, \ldots, 1 - \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$;
11. $X = \left\{3, 3 + \frac{1}{3}, 3 + \frac{1}{3^2}, \ldots, 3 + \frac{1}{3^{n-1}}, \ldots\right\}$;
12. $X = \{\lg 1, \lg 2, \ldots, \lg n, \ldots\}$;
13. $X = \left\{(2 + 3), -\left(2 + \frac{3}{2}\right), \ldots, (-1)^{n-1}\left(2 + \frac{3}{n}\right), \ldots\right\}$;
14. $X = \left\{\frac{-1}{1!}, \frac{1}{2!}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n!}, \ldots\right\}$;
15. $X = \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$;
16. $X = \left\{1 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{3^2}, \ldots, 1 - \frac{1}{3^n}, \ldots\right\}$;
17. $X = \left\{2 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2^2}, \ldots, 2 - \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$;

18. $X = \{\log_2 1, \log_2 2, \ldots, \log_2 n, \ldots\}$;

19. $X = \left\{2, \frac{3}{2}, \ldots, \frac{n+1}{n}, \ldots\right\}$;

20. $X = \left\{3 + \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{2^2}, \ldots, 3 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n}, \ldots\right\}$.

Завдання 2. *Знайти* $\inf A$, $\sup A$, *якщо*

1. $A = \left\{\frac{n+2}{2n+3} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
2. $A = \left\{\frac{-n}{3n+1} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
3. $A = \left\{\frac{2-n}{2n-1} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
4. $A = \left\{\frac{4n+2}{n+2} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
5. $A = \left\{2n^2 - 4n : n \in \mathbf{N}\right\}$.
6. $A = \left\{\frac{n^2}{2n^2+1} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
7. $A = \left\{-n^2 + 2n + 3 : n \in \mathbf{N}\right\}$.
8. $A = \left\{2n^2 + 2n + 1 : n \in \mathbf{N}\right\}$.
9. $A = \left\{\frac{n^2+3}{n^2+1} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
10. $A = \left\{\frac{4n+5}{2n+4} : n \in \mathbf{N}\right\}$.

8. $A = \left\{\frac{5n+6}{10n+2} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
9. $A = \left\{\frac{1}{n-\frac{3}{2}} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
10. $A = \left\{\frac{3n^2+4}{6n^2+2} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
11. $A = \left\{\frac{4n^2+2}{6n^2+1} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
12. $A = \left\{\frac{n^2}{4n^2+5} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
13. $A = \left\{10n - 2n^2 - 12 : n \in \mathbf{N}\right\}$.
13. $A = \left\{\frac{3n+6}{n+1} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
13. $A = \left\{\frac{2n+3}{4n} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
13. $A = \left\{1 + 2n - n^2 : n \in \mathbf{N}\right\}$.
14. $A = \left\{n^2 - 3n - 4 : n \in \mathbf{N}\right\}$.

Завдання 3. *Знайдіть*

1. $\sup\left\{\sup\left\{\frac{m+1}{2n+m} : n \in \mathbf{N}\right\} : m \in \mathbf{N}\right\}$.
2. $\inf\left\{\sup\left\{\frac{3n-0{,}8}{2m+40} : m \in \mathbf{N}\right\} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
3. $\sup\left\{\inf\left\{\frac{3m-n}{12m+4n} : n \in \mathbf{N}\right\} : m \in \mathbf{N}\right\}$.
4. $\inf\left\{\sup\left\{\frac{2n}{4m+2n} : m \in \mathbf{N}\right\} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
5. $\inf\left\{\sup\left\{\frac{1}{2n+x^2} : n \in \mathbf{N}\right\} : x \in \mathbf{R}\right\}$.
6. $\sup\left\{\inf\left\{2x^2 - 5nx : x \in \mathbf{R}\right\} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
7. $\inf\left\{\sup\left\{2nx - 6x^2 : x \in \mathbf{R}\right\} : n \in \mathbf{N}\right\}$.
8. $\sup\left\{\inf\left\{\frac{m-2n}{n+m} : n \in \mathbf{N}\right\} : m \in \mathbf{N}\right\}$.
9. $\inf\left\{\sup\left\{\frac{m+2n}{m+n} : n \in \mathbf{N}\right\} : m \in \mathbf{N}\right\}$.

10. $\sup\left\{\inf\left\{\frac{m-n}{m+n} : n\in\mathbf{N}\right\} : m\in\mathbf{N}\right\}.$

11. $\inf\left\{\sup\left\{\frac{1}{2nx+x^2} : n\in\mathbf{N}\right\} : x\in\mathbf{R}\right\}.$

12. $\sup\left\{\inf\left\{2x^2-4nx : x\in\mathbf{R}\right\} : n\in\mathbf{N}\right\}.$

13. $\sup\left\{\sup\left\{\frac{m}{n+m} : n\in\mathbf{N}\right\} : m\in\mathbf{N}\right\}.$

14. $\inf\left\{\sup\left\{\frac{m+n}{2n+m} : n\in\mathbf{N}\right\} : m\in\mathbf{N}\right\}.$

15. $\sup\left\{\sup\left\{\frac{2m+1}{n+m} : n\in\mathbf{N}\right\} : m\in\mathbf{N}\right\}.$

16. $\inf\left\{\sup\left\{\frac{3n-2}{m+6} : m\in\mathbf{N}\right\} : n\in\mathbf{N}\right\}.$

17. $\sup\left\{\inf\left\{\frac{2m-4}{4m+n} : n\in\mathbf{N}\right\} : m\in\mathbf{N}\right\}.$

18. $\inf\left\{\sup\left\{\frac{n}{2m+1} : m\in\mathbf{N}\right\} : n\in\mathbf{N}\right\}.$

19. $\inf\left\{\sup\left\{\frac{1}{n+2x^2} : n\in\mathbf{N}\right\} : x\in\mathbf{R}\right\}.$

20. $\sup\left\{\inf\left\{3x^2-2nx : x\in\mathbf{R}\right\} : n\in\mathbf{N}\right\}.$

Завдання 3. *Розв'яжіть рівняння або нерівність*

1. $|x+6| = |x-10|.$
2. $2|x-2| + 3|2-x| = 15.$
3. $|x+5| + |x| = 5.$
4. $|2x+2| - |6-x| = |x-8|.$
5. $|9-3x| = |2x+1| + |x-10|.$
6. $|3x+2| - |x| \geq 2.$
7. $|2x-1| - |4x-5| < 2.$
8. $|3x-1| + |x-3| \geq 20.$
9. $|5x+1| - |2x-2| \leq 5.$
10. $|x+2| - |x-1| > 1.$
11. $|6x-8| - |5x+1| = |x-9|.$
12. $|3x-8| = |2x+1| = |x-9|.$
13. $|4x-8| = |2x+2| + |10-2x|.$
14. $\left|x^2-x-6\right| = 6+x-x^2.$
15. $\left|3x^2-11x-42\right| = 42+11x-3x^2.$
16. $|5x-1| \leq |3x-9|.$
17. $|4x-3| - |x-1| > 5.$
18. $|x+2| - |x-2| \leq 12.$
19. $|3x+6| - |x+1| \leq 1.$
20. $|x+1| - |x-1| > 3x.$

ГРАНИЦЯ ПОСЛІДОВНОСТІ

Теоретичні питання

1. Означення збіжності та границі послідовності на мові «ε–N» та околів.

Послідовність $\{x_n\}$ називається збіжною, якщо існує таке число a, що

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) > 0, \forall n \geq N : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Число a при цьому називається границею послідовності x_n. Позначається цей факт $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Іншими словами, послідовність x_n називається збіжною до числа a, якщо починаючи з деякого номера N, всі елементи цієї послідовності будуть потрапляти в ε-окіл точки a.

2. Властивості збіжних послідовностей.

1. Збіжна числова послідовність має єдину границю.
2. Кожна збіжна послідовність є обмеженою(обернене твердження в загальному випадку не вірне).
3. Сума, добуток, частка збіжних послідовностей є послідовність збіжна(при умові, що границя знаменника для части не є нулем), причому границя суми довівнює сумі границь, границя добутку дорівнює добутку границь, границя частки дорівнює частці границь.

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *На мові «ε–N» доведіть, що*
а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$, б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^4+n^3+2}{2n^3} = \infty$.
Розв'язок. а) За означенням границі послідовності на мові «ε–N» потрібно довести, що

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}) \quad (\forall n > N) \quad \left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| < \varepsilon.$$

Нехай ε – довільне додатнє фіксоване число. Розв'яжемо нерівність $\left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| < \varepsilon$ відносно n :

$$\left|\frac{2n+1-2n-4}{n+2}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{3}{n+2} < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{3}{\varepsilon} - 2.$$

В якості $N(\varepsilon)$ потрібно взяти цілу частину числа $\frac{3}{\varepsilon} - 2$. Таким чином показано, що для всіх натуральних $n > N(\varepsilon) = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 2\right]$ виконується нерівність $\left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| < \varepsilon$.
б) За означенням границі послідовності на мові «ε–N» потрібно довести, що

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}) \quad (\forall n > N) \quad \left|\frac{3n^4 + n^3 + 2}{2n^3}\right| > \varepsilon.$$

Для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ маємо:

$$\frac{3n}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n^3} > \varepsilon \quad \Leftarrow \quad \frac{3n}{2} > \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{3}\varepsilon.$$

Взявши $N(\varepsilon) = \left[\frac{2}{3}\varepsilon\right]$, для всіх натуральних $n > N(\varepsilon)$ виконуватиметься нерівність $\left|\frac{3n^4+n^3+2}{2n^3}\right| > \varepsilon$.
Завдання 2. *Доведіть, що число $a = 1$ не є границею послідовності $a_n = \frac{5n+1}{2n+3}$.*
Розв'язок. Згідно означення, число $a = 1$ не є границею послідовності $a_n = \frac{5n+1}{2n+3}$, якщо

$$(\exists \varepsilon > 0) \quad (\forall N(\varepsilon) \in \mathbf{N}) \quad (\exists n > N) \quad \left|\frac{5n + 1}{2n + 3} - 1\right| \geq \varepsilon.$$

Оцінимо знизу абсолютну величину різниці $\frac{5n+1}{2n+3} - 1$:

$$\left|\frac{5n + 1}{2n + 3} - 1\right| = \frac{3n - 2}{2n + 3} = \frac{3}{2} - \frac{13}{4n + 6} \geq \frac{3}{2} - \frac{13}{4 \cdot 1 + 6} = \frac{1}{5}.$$

Таким чином, при $\varepsilon < \frac{1}{5}$ нерівність $\left|\frac{5n+1}{2n+3} - 1\right| \geq \varepsilon$ виконується при довільному значенні n. Отже, число $a = 1$ не є границею послідовності $a_n = \frac{5n+1}{2n+3}$.
Завдання 3. *Доведіть, що якщо $|q| < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.*
Розв'язок. Потрібно показати, що

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N = N(\varepsilon) \in \mathbf{N}) \quad (\forall n > N) \quad |q^n - 0| < \varepsilon.$$

У випадку коли $q = 0$, твердження очевидне. Нехай $q \neq 0$. Оскільки $0 < |q| < 1$, то $\frac{1}{|q|} > 1$, відповідно, існує додатнє число α таке, що $\frac{1}{|q|} = 1 + \alpha$. Так як $\alpha > 0$, то із нерівності Бернуллі отримаємо, що для довільного натурального числа n має місце оцінка:

$$\frac{1}{|q|^n} = \left(\frac{1}{|q|}\right)^n = (1 + \alpha)^n \geq 1 + n\alpha > n\alpha.$$

Звідси одержимо, що $|q|^n < \frac{1}{n\alpha} \quad \forall n \in \mathbf{N}$, де $\alpha = \frac{1}{|q|} - 1$. Таким чином, матимемо:

$$|q^n - 0| = |q|^n < \frac{1}{n\alpha} < \varepsilon.$$

Вибравши $N(\varepsilon) > \frac{1}{\alpha\varepsilon}$ й отримаємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Завдання 4. *Доведіть, що* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$

Розв'язок. Для того, щоб число 1 було границею послідовності $\sqrt[n]{n}$ необхідно й досить, щоб послідовність $\alpha_n = \sqrt[n]{n} - 1$ була нескінчено малою. Покажемо, що це дійсно так, тобто $\alpha_n \to 0$ при $n \to \infty$. Оскільки $\sqrt[n]{n} = 1 + \alpha_n$, то за формулою бінома Ньютона

$$n = (1 + \alpha_n)^n = 1 + n\alpha_n + \frac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2 + \ldots + \alpha_n^n.$$

Оскільки всі доданки в правій частині останнньої рівності при $n > 2$ додатні, то

$$n > 1 + \tfrac{n(n-1)}{2}\alpha_n^2, \quad \Rightarrow \quad \tfrac{2}{n} > \alpha^2.$$

Із співвідношень $0 < \alpha_n < \sqrt{\frac{2}{n}}$ та $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$ випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ (за теоремою про три послідовності).

Завдання 5. *Доведіть, що* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^{10}}{3^n} = 0$.

Розв'язок. $\dfrac{n^{10}}{3^n} = \left(\dfrac{n}{\sqrt[10]{3^n}}\right)^{10} = \left(\dfrac{n}{a^n}\right)^{10}$, де $a = \sqrt[10]{3} > 1$.

Оскільки

$$0 < \frac{n}{a^n} = \frac{n}{(1 + (a-1))^n} = \frac{n}{1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 + \ldots + (a-1)^n} <$$

$$< \frac{n}{\frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2} = \frac{2}{(n-1)(a-1)^2} = \frac{\frac{2}{(a-1)^2}}{n-1},$$

а $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n-1} = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{a^n} = 0$.

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{a^n}\right)^{10} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}}{3^n} = 0.$$

Завдання 6. *Доведіть, що* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

Розв'язок.

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{2}{n} \le 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} = \frac{9}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Оскільки $\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \to 0$ при $n \to \infty$ (див. завдання 3), то використовуючи властивості границі отримаємо, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$.

Завдання 7. *Доведіть, що послідовність* $x_n = \dfrac{n\cos\pi n}{n+1}$ *обмежена, але розбіжна.*

Розв'язок. Обмеженість послідовності $\{x_n\}$ випливає з нерівностей

$$\left|\frac{n\cos\pi n}{n+1}\right| \le \frac{n}{n+1} < 1, \quad n \in \mathbf{N}.$$

Знайдемо значення членів даної послідовності:

$$\{x_n\} = \left\{-\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; -\frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots\right\}.$$

Легко бачити, що члени з парними індексами прямують до числа 1, а члени з непарними індексами прямують до -1. Доведемо на мові околів, що послідовність $\{x_n\}$ є розбіжною, тобто

$$(\forall a \in \mathbf{R}) \quad (\exists U_\varepsilon(a)) \quad (\forall N \in \mathbf{N}) \quad (\exists n > N) \quad x_n \notin U_\varepsilon(a).$$

Якщо $a \ge \frac{1}{2}$, то $x_{2k-1} = \frac{-2k+1}{2k} \notin U_{\frac{1}{2}}$ при довільному $k \in \mathbf{N}$. Таким чином, при $a \ge \frac{1}{2}$ в ролі ε можна взяти $\varepsilon = \frac{1}{2}$, а в ролі n можна вибрати будь-яке непарне натуральне число.

Якщо $a < \frac{1}{2}$, то $x_{2k} = \frac{2k}{2k+1} \ge \frac{2}{3}$ при довільному $k \in \mathbf{N}$. Нехай $\varepsilon = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, тоді $x_{2k} > a - \varepsilon \quad (a + \varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3})$, тобто $x_{2k} \notin U_{\frac{1}{6}}$. Отже, при $a < \frac{1}{2}$ в ролі ε можна взяти $\varepsilon = \frac{1}{6}$, а в ролі n можна вибрати будь-яке парне натуральне число.

Таким чином, ми показали, що жодне з чисел $a \in \mathbf{R}$ не може бути границею послідовності, тобто послідовність $\{x_n\}$ є розбіжною.

Завдання 8. *Обчислити границі:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n^3 + 2n^2 - 3n + 7}{4n^3 - 2n + 11}$;
4. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n^8 + 2n^2 + 1}$;
2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{n^3+1} + \sqrt{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+n} - \sqrt{n}}$;
5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2}{3n^2+1} + \frac{\cos^2(2n+1)}{n}\right)$;
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{1-n^3} + n\right)$;
6. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 3^n}{n^4 - 4^n}$.

Розв'язок. 1) Винесемо старший степінь в чисельнику та знаменнику за дужки:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{5n^3+2n^2-3n+7}{4n^3-2n+11}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3(5+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{7}{n^3})}{n^3\left(4-\frac{2}{n^2}+\frac{11}{n^3}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{7}{n^3}}{4-\frac{2}{n^2}+\frac{11}{n^3}}=\left(\frac{5+0-0+0}{4-0+0}\right)=\frac{5}{4}.$$

2) Аналогічно до переднього прикладу виносимо старший степінь в чисельнику та знаменнику дробу за дужки:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n+2}}{\sqrt[4]{n^3+n}-\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}\right)}{n^{\frac{3}{4}}\left(\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[4]{\frac{1}{n}}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^{\frac{3}{4}}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^3}}}{\sqrt[4]{1+\frac{1}{n^2}}-\sqrt[4]{\frac{1}{n}}}=\left(\infty\cdot\frac{1+0}{1-0}\right)=\infty.$$

3) Використаємо формулу скороченого множення $(a-b)(a^2-ab+b^2)=$ $=a^3+b^3$. Перетворимо вираз під знаком границі, домноживши та поділивши його на $\sqrt[3]{(1-n^3)^2}-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{1-n^3}+n\right)\left(\sqrt[3]{(1-n^3)^2}-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2\right)}{\sqrt[3]{(1-n^3)^2}-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+n^3-n^3}{\sqrt[3]{(1-n^3)^2}-n\sqrt[3]{1-n^3}+n^2}=\left(\frac{1}{\infty}\right)=0.$$

4) Використаємо наступні вже нам відомі границі:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1,\ a>0.$$

Із другої рівності випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\alpha_n}=1$, якщо α_n– невід'ємна обмежена послідовність. Враховуючи сказане, матимемо:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n^8+2n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{5n^8\left(1+\frac{2}{5n^6}+\frac{1}{5n^8}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}5^{\frac{1}{n}}n^{\frac{8}{n}}\left(1+\frac{2}{5n^6}+\frac{1}{5n^8}\right)^{\frac{1}{n}}=(1\cdot1\cdot1)=1.$$

5) Скористаємось теоремою про границю суми двох послідовностей. Очевидно, що $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{3n^2+1}=0$, а другий доданок є добутком обмеженої послідовності $\left\{\cos^2(2n+1)\right\}$ на нескінченно малу $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, тому його границя також дорівнює нулю. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3n^2+1}+\frac{\cos^2(2n+1)}{n}\right)=0$.

6) Винесемо в чисельнику та знаменнику даного дробу доданок, котрий найшвидше прямує до нескінченності, тобто 4^n :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+3^n}{n^4-4^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^3}{4^n}+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{\frac{n^4}{4^n}-1}=\left(\frac{0+0}{0-1}\right)=0.$$

Завдання для індивідуальної та самостійної робіт

Завдання 1. *Користуючись означенням границі послідовності на мові «ε–N» доведіть, що*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+5}{9n+4}=\frac{1}{3}$.	11. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4^n+1}{4^n}=1$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+3}{4n+1}=\frac{5}{4}$.	12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^4}{n^3+1}=+\infty$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n+1}=1$.	13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n+1}{2\cdot3^n+3}=\frac{1}{2}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n-3}{4n+5}=\frac{1}{2}$.	14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{1+3^n}=0$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+5}{6n^2+2}=\frac{1}{2}$.	15. $\lim\limits_{n\to\infty}3^{n^2}=\infty$.
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10n^4+1}{5n^4+n^2}=2$.	16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n+n}=0$.
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+4}{9n^3+n}=\frac{1}{3}$.	17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n+1}=+\infty$.
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+5}{2n+3}\neq1$.	18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+1}{4n}\neq0$.
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{6n}\neq2$.	19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+4}{5n-1}\neq2$.
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{4n+1}{2n+3}\neq0$.	20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+1}\neq1$.

Завдання 2. Обчислити границі

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+n+1}{1-n+n^3}$; $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{n}{n+2}}{n+2}$; $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3}-n\right)$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{2n-1}{3n-2}\right)$; $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sin n}{n+2}+\frac{n}{2n+1}\right)$; $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+1}\right)$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2-n-n^2}{n}$; $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\cos(n^2-3)}{n}+\frac{n-1}{n+1}\right)$; $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[3]{n^2+n^3}-n\right)$.

4. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n^2+5n+4}{2+n^2}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sin(1-n)}{n^{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{n^2+n+1}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-1}-n\right)$.

5. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2n+2}-\sqrt{n^2-4n+3}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3+2^n+\cos n}{2^n+\sin n}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^n+n+1}$.

6. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1+2+...+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2}-\sqrt[3]{(n-1)^2}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6n^2+5n}$.

7. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^3+2n}-n}{n+2}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^8+4n}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2}{3n^3-2}\cos\frac{2n+1}{2n+4}-\frac{(-1)^n}{n(n^2+1)}\right)$.

8. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+3^n+\cos n}{3^n+\sin n}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-3+4n^3}{2n^3+n+1}$.

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{5n^5+7n^3+2}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n}{2n^2-1}\cos\frac{n+1}{2n-1}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n+3^n+n}{2^{n+1}+5^n+1}$.

10. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt{n^4+n+1}-\sqrt{n^4+1}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{6n^3+2}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{4^n+2^n+n^2}{4^{n+2}+n^2}$.

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{3-n}{2n+1}-\frac{3n^2+2}{4n^2+1}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(2^n-n^5\right)^{\frac{1}{n}}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[3]{(n^2+n+1)^2}-\sqrt[3]{(n+1)^2}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n^2+1}\sin\frac{n-1}{2n+1}+\frac{(-1)^n n^2}{n^3+1}\right)$;
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^4+4^n+n+4}{n^3+3^n+n+3}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sqrt{n^2+1}+n\right)^2}{\sqrt[3]{n^6+1}}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^3+4^n+1}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} n^{\frac{1}{3}}\left(\sqrt[3]{(n^2+1)^2}-\sqrt[3]{(n^2-1)^2}\right)$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\ldots+\frac{n}{n^3}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\cos n$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+4^n+5^n}{2^n+6^n}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^3-n^2+3n-5}{n^2-n^3+3}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{n+3}{n}}{n+2}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+2}-n\right)$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2n+1}{n^2}+\frac{2n-\frac{1}{2}}{3n+1}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\cos n}{n+1}+\frac{n^2+6}{n-2n^2+3}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}n-\sqrt{2n^2+3}\right)$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-n^2+n}{2n+6}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sin(3-n)}{n}+\frac{2n-3}{2n+1}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{1+n^3}-n\right)$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2+7n-1}{1+2n^2}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\cos(n+1)}{\sqrt{n}}+\frac{3}{3n^2+3n+1}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2-1}-n\right)$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2-4n+1}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3^n+n^2+\sin n}{3^n+\cos n}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+3+n}$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}-\frac{n}{2+2n}$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt[3]{n^2}-\sqrt[3]{(n+1)^2}\right)$; $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{4n^2+3n}$.

МОНОТОННІ ПОСЛІДОВНОСТІ. УМОВИ ЗБІЖНОСТІ ПОСЛІДОВНОСТЕЙ.

Теоретичні питання

1. Фундаментальні послідовності. Критерій Коші збіжності числової послідовності.

Послідовність x_n називається фундаментальною, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N = N(\varepsilon)) \quad (\forall n > N) \quad (\forall p \in \mathbf{N}) \quad |n_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

Критерій Коші: Для того, щоб послідовність x_n була збіжною, необхідно й досить, щоб вона була фундаментальною.

2. Монотонні послідовності. Умови збіжності.

Послідовність x_n називається монотонно зростаючою(спадною), якщо кожен член починаючи з другого, більший(менший) від попереднього

$$\forall n \in \mathbf{N} \; x_n < (>) x_{n+1}.$$

Послідовність x_n називається монотонно не спадною(не зростаючою), якщо кожен член починаючи з другого, не менший(не більший) від попереднього

$$\forall n \in \mathbf{N} \; x_n \leq (\geq) x_{n+1}.$$

Не спадні та не зростаючі послідовності називають монотонними, а зростаючі та спадні – строго монотонними.

3. Граничні точки, нижня та верхня границі послідовностей.

Точка x називається граничною точкою (частковою границею) послідовності x_n, якщо з неї можна виділити підпослідовність x_{n_k},, збіжну до числа x.

Найбільша(найменша) з усіх граничних точок послідовності x_n називається верхньою(нижньою) границею та позначається $\overline{x} = \overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$($\underline{x} = \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$).

4. Число Ейлера.

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{n}\right)^n.$$

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Користуючись Критерієм Коші, довести збіжність послідовності*

$$x_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n}{2^n}.$$

Розв'язок. Згідно критерію Коші, потрібно довести, що

$$(\forall \varepsilon > 0) \quad (\exists N = N(\varepsilon)) \quad (\forall n > N) \quad (\forall p \in \mathbf{N}) \quad |n_{n+p} - x_n| < \varepsilon.$$

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| = \left| \frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}} \right| \leq \\ \leq \frac{|\sin(n+1)|}{2^{n+1}} + \frac{|\sin(n+2)|}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{|\sin(n+p)|}{2^{n+p}} \leq \\ \leq \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} \leq \\ \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+p}} + \frac{1}{2^{n+p+1}} + \ldots \leq \frac{\frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n} < \varepsilon, \end{aligned}$$

при довільному $n > [-\log_2 \varepsilon] = N(\varepsilon)$ та всіх натуральних p.

Завдання 2. *Користуючись Критерієм Коші, довести розбіжність послідовності*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Розв'язок. Нехай ε довільне число з інтервалу $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Оскільки

$$|x_{n+p} - x_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p},$$

а при $n = p$

$$|x_{n+p} - x_p| > \frac{1}{2} > \varepsilon$$

для всіх n, то послідовність є розбіжною.

Завдання 3. *Дослідити на монотонність послідовності:*

$$\text{а) } x_n = \frac{n^2}{n^2+1}; \quad \text{б) } x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}.$$

Розв'язок. Складемо різницю

$$x_{n+1} - x_n = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{(n+1)^2(n^2+1) - \left((n+1)^2+1\right)n^2}{\left((n+1)^2+1\right)(n^2+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)^2(n^2+1-n^2) - n^2}{\left((n+1)^2+1\right)(n^2+1)} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{\left((n+1)^2+1\right)(n^2+1)}.$$

Оскільки $x_{n+1} - x_n > 0$, або одне й те саме, що $x_{n+1} > x_n$ при довільному натуральному n, то послідовність є зростаючою.
б) Складемо частку

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\sqrt{(n+1)+1} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}} =$$
$$\frac{\left(\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} =$$
$$= \frac{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+2} + \sqrt{n+1}\right)} < 1.$$

Оскільки всі члени послідовності x_n додатні, то для довільного $n \in \mathbf{N}$ із нерівності $\frac{x_{n+1}}{x_n} < 1$ випливає, що $x_{n+1} < x_n$. Отже, дана послідовність є спадною.

Завдання 4. *Знайдіть найбільший член послідовності* x_n :

$$\text{а) } x_n = \frac{n^2}{2^n}; \quad \text{б) } x_n = \frac{\sqrt{n}}{100+n}.$$

Розв'язок. а) Очевидно, що

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 < 1$$

при довільному натуральному $n > 2$, тобто при $n > 2$ послідовність є монотонно спадною. Тому найбільший елемент послідовності повинен міститись серед елементів x_1, x_2, x_3. Безпосередньою перевіркою знаходимо, що $\max x_n = x_2 = \frac{9}{8}$.
б) Виконаємо наступні перетворення:

$$x_n = \frac{\sqrt{n}}{(\sqrt{n}-10)^2 + 20\sqrt{n}} = \frac{1}{\frac{(\sqrt{n}-10)^2}{\sqrt{n}} + 20}.$$

Звідси отримаємо, що $x_n \leq \frac{1}{20}$, причому знак рівності досягається при $n = 100$. Відповідно, $\max x_n = x_{100} = \frac{1}{20}$.
Завдання 5. *Користуючись теоремою про існування границі монотонної обмеженої послідовності, довести збіжність наступних послідовностей:*

$$\text{а) } x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \frac{1}{5^3+1} + \ldots + \frac{1}{5^n+1}; \quad \text{б) } x_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}.$$

Розв'язок. а) Послідовність x_n зростає, оскільки $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{5^{n+1}+1} > x_n$. Також вона є обмеженою:

$$x_n = \frac{1}{5+1} + \frac{1}{5^2+1} + \frac{1}{5^3+1} + \ldots + \frac{1}{5^n+1} < \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{5^3} + \ldots + \frac{1}{5^n} =$$

$$= \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{5^{n+1}}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{5^n}\right) < \frac{1}{4}.$$

Таким чином, границя послідовності існує.
б) Складемо співвідношення

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)! \cdot (2n+1)!!}{(2n+3)!! \cdot n!} = \frac{n+1}{2n+3}.$$

Оскільки $\frac{n+1}{2n+3} < \frac{1}{2}$ для будь-якого $n \geq 1$, то $x_{n+1} < \frac{1}{2}x_n < x_n$. Отже, дана послідовність є спадною.

Для будь-якого $n \geq 1$ виконується нерівності $0 < x_n \leq x_1 = \frac{1}{3}$, тобто послідовність є обмеженою, звідки випливає, що й збіжною.

Знайдемо її границю. Позначимо $c = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. В силу вже обгрунтованої збіжності даної послідовності й $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = c$. Перейдемо до границі в рівності $x_{n+1} = x_n \cdot \frac{n+1}{2n+3}$.

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \tfrac{n+1}{2n+3} \cdot \lim_{n\to\infty} x_n,$$

звідки $c = \frac{1}{2}c$, $c = 0$. Отже, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

Завдання 6. *Для послідовності* $x_n = \dfrac{(3\cos\frac{\pi}{2}n - 1)n + 1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$ *знайти* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} x_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} x_n$.

Розв'язок. Для $n = 4k$ маємо:

$$x_n = \frac{3(\cos 2\pi n - 1)n + 1}{n} = \frac{2n+1}{n} = 2 + \frac{1}{n},$$

і, отже, $\lim\limits_{k\to\infty} x_{4k} = 2$, $2 < x_{4k} < 2 + \frac{1}{4}$, причому $x_4 = \frac{9}{4}$.

Для $n = 4k+1$ та $n = 4k+3$ маємо:

$$x_n = \frac{\left(3\cos\left(\frac{\pi}{2}(4n+1)\right) - 1\right)n + 1}{n} = \frac{-n+1}{n} = -1 + \frac{1}{n},$$

отже, $-1 < x_n < 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} x_{4k+1} = \lim\limits_{x\to\infty} x_{4k+3} = -1$.

Для $n = 4k + 2$ маємо:

$$x_n = \frac{\left(3\cos\left(\frac{\pi}{2}(4n+2)\right) - 1\right)n + 1}{n} = \frac{-4n+1}{n} = -4 + \frac{1}{n},$$

отже, $-4 < x_n < 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} x_{4k+2} = -4$.

Таким чином, числа $2, -1, 4$ є частковими границями даної послідовності. Розглянуті чотири підпослідовності $\{x_{4k}\}$, $\{x_{4k+1}\}$, $\{x_{4k+2}\}$, $\{x_{4k+3}\}$ разом складають всю дану послідовність, звідки випливає, що інших часткових границь дана послідовність не має.

Верхня та нижня границі – це відповідно найбільша та найменша із часткових границь, тому

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = 2, \ \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = -4.$$

З попередніх викладок очевидно, що

$$\sup_{n\in\mathbf{N}} x_n = \tfrac{9}{4}, \ \inf_{n\in\mathbf{N}} x_n = -4.$$

Завдання 7. *Обчислити границі*

$$\text{а) } \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n+1}, \quad \text{б) } \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n.$$

Розв'язок. а) Скористаємось відомою нам границею:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = e.$$

а)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-3}{n+2}\right)^{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-5}{n+2}\right)^{2n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{5}{n+2}\right)^{-\frac{n+2}{5}}\right]^{\left(-\frac{5}{n+2}\right)(2n+1)} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{5}{n+2}(2n+1)} = e^{-10}.$$

б)

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n^2}\cdot n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = 1.$$

Завдання для індивідуальної та самостійної робіт

Завдання 1. *Користуючись Критерієм Коші, довести збіжність послідовності:*

1. $x_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^n}$;
2. $x_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$;
3. $x_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{3^n}$;
4. $x_n = \frac{1}{4+1} + \frac{1}{4^2+1} + \ldots + \frac{1}{4^n+1}$;
5. $x_n = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}$;
6. $x_n = \frac{\sin 1!}{3} + \frac{\sin 2!}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n!}{3^n}$;
7. $x_n = \frac{e^{-1}}{1\cdot 2} + \frac{e^{-2}}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{e^{-n}}{n\cdot(n+1)}$;
8. $x_n = \frac{\cos 1^2}{2} + \frac{\cos 2^2}{2^2} + \ldots + \frac{\cos n^2}{2^n}$;
9. $x_n = \frac{\sin 1}{2^2} + \frac{\sin 2}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n}{n^2}$;
10. $x_n = \frac{\sin 1+\cos 1}{1\cdot 2} + \frac{\sin 2+\cos 2}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\sin n+\cos n}{n\cdot(n+1)}$;
11. $x_n = \frac{\operatorname{arctg} 1}{1\cdot 2} + \frac{\operatorname{arctg} 2}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{\operatorname{arctg} n}{n\cdot(n+1)}$;
12. $x_n = \frac{\sin 1\cdot\cos 2}{4} + \frac{\sin 2\cdot\cos 3}{4^2} + \ldots + \frac{\sin n\cdot\cos(n+1)}{4^n}$.
13. $x_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}$;
14. $x_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+2)}$;
15. $x_n = \frac{1}{3+1} + \frac{1}{3^2+1} + \ldots + \frac{1}{3^n+1}$;
16. $x_n = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{(n+1)!}$;
17. $x_n = \frac{\cos 1}{3} + \frac{\cos 2}{3^2} + \ldots + \frac{\cos n!}{3^n}$;
18. $x_n = \frac{2^{-1}}{1\cdot 2} + \frac{2^{-2}}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{2^{-n}}{n\cdot(n+1)}$;
19. $x_n = \frac{\sin 1^2}{2} + \frac{\sin 2^2}{2^2} + \ldots + \frac{\sin n^2}{2^n}$;

20. $x_n = \frac{\sin 1}{2^2} + \frac{\sin 2}{3^2} + \ldots + \frac{\sin n}{n^2}$;

Завдання 2. *Дослідити на монотонність послідовності:*

1. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.
2. $x_n = \frac{2n-1}{3n+4}$.
3. $x_n = n^3 + 2n$.
4. $x_n = \frac{n^2}{n^2+10}$.
5. $x_n = \frac{n^4+3n^2+1}{n^4+3n^2+6}$.
6. $x_n = 3 - \arcsin \frac{1}{n^2+4}$.
7. $x_n = \lg\left(\frac{n^4}{n^4+8} + 1\right)$.
8. $x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.
9. $x_n = \frac{3n-1}{2-6n}$.
10. $x_n = \frac{2n^2-n+1}{2n^2-n+5}$.
11. $x_n = \sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}$.
12. $x_n = \frac{1}{n+1} + 3^{-n}$.
13. $x_n = \ln\left(n^2 + 2n + 1\right)$.
14. $x_n = 2^{-n} + 4^{-n}$.
15. $x_n = \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{n^2}$.
16. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.
17. $x_n = -\frac{6}{2n^2+3n+6}$.

178. $x_n = \sqrt[3]{n+2} - \sqrt[3]{n+1}$.

19. $x_n = 2^{-n} + \frac{1}{n}$.
20. $x_n = \log_3 \frac{1}{n}$.

Завдання 3. *Знайти найбільший елемент послідовності:*

1. $x_n = \frac{n+4}{n+3}$.
2. $x_n = \frac{-2n-11}{n+6}$.
3. $x_n = \frac{n^2+3}{n^2+1}$.
4. $x_n = x_n = -n^2 + 6n - 7$.
5. $x_n = \frac{2n+7}{2n+6}$.
6. $x_n = \frac{21}{n^2+3n+2}$.
7. $x_n = -n^2 + 4n + 12$.
8. $x_n = \frac{n^2+n+4}{n^2+n+3}$.
9. $x_n = -(2n+1)(3n-9)$.
10. $x_n = \frac{2+n+n^2}{1+n+n^2}$.

Знайти найменший елемент послідовності:

11. $x_n = 2n^2 - 16n + 25$.
12. $x_n = \frac{n^2}{n^2+2}$.
13. $x_n = n + \frac{1}{n}$.
14. $x_n = 2n^2 + n - 1$.
15. $x_n = \frac{2n^3+4}{n^3+3}$.
16. $x_n = 6n^2 - 5n + 1$.
17. $x_n = \frac{n+4}{2n}$.
18. $x_n = 2(n+1)(n-7)$.
19. $x_n = 2n^2 - 7n + 6$.
20. $x_n = \frac{2n+4}{3n}$.

Завдання 4. *Користуючись теоремою про існування границі монотонної обмеженої послідовності, довести збіжність наступних послідовностей:*

1. $x_n = \frac{1}{3+5} + \frac{1}{3^2+5} + \ldots + \frac{1}{3^n+5}$.
2. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}$.
3. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}$.
4. $x_n = 1 + \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{2^n+1}$.
5. $x_n = \left(1 + \frac{1}{5}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{5^n}\right)$.
6. $x_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \ldots + \frac{1}{3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n+1)}$.
7. $x_n = \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)$.
8. $x_n = \frac{1}{2+1} + \frac{1}{2^2+1} + \ldots + \frac{1}{2^n+1}$.
9. $x_n = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)^2}$.
10. $x_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{3^n}\right)$.

8. $x_n = \frac{1}{2+2} + \frac{1}{2^2+3} + \ldots + \frac{1}{2^n+(n+1)}$.
9. $x_n = \frac{10 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot (n+9)}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}$.
10. $x_n = \frac{5^n}{n!}$.
11. $x_n = \frac{3n^2-1}{3n^2}$.
12. $x_n = \frac{7^n}{n!}$.
13. $x_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^n}$.
14. $x_n = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$.
8. $x_n = \frac{1}{3+2} + \frac{1}{3+2^2} + \ldots + \frac{1}{3+2^n}$.
10. $x_n = \frac{2^n}{n!}$.
12. $x_n = \frac{4^n}{n!}$.

Завдання 5. *Для послідовності* x_n *знайти* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, $\sup\limits_{n\in\mathbf{N}} x_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbf{N}} x_n$, *якщо*

1. $x_n = (-1)^n n + 1$.
2. $x_n = n^{(-1)^n} + 1$.
3. $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$.
4. $x_n = 3\left(1 - \frac{1}{n}\right) + 2(-1)^n$.
5. $x_n = \frac{n+1}{n-1} \cos^2 \frac{\pi n}{2}$.
6. $x_n = 1 + 3(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.
7. $x_n = \frac{2n-1}{n+1} \sin^2 \frac{\pi n}{2}$.
8. $x_n = \frac{n+1}{n-1} \sin \frac{\pi n}{2}$.
9. $x_n = 1 + 2(-1)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$.
10. $x_n = \frac{n-1}{2n+1} \sin^2 \frac{\pi n}{2}$.
11. $x_n = (-1)^n + \cos \pi n$.
12. $x_n = n \sin \frac{\pi n}{2}$.
13. $x_n = \frac{n+1}{n+2} \sin^2 \frac{\pi n}{2}$.
14. $x_n = \frac{2n}{2n+1} \cos^2 \frac{\pi n}{2}$.
15. $x_n = \frac{n \sin \frac{\pi n}{2} + 1}{n+1}$.
16. $x_n = \frac{((-1)^n - 1)n^2 + n + 1}{n}$.
17. $x_n = n \cos \frac{\pi n}{2}$.
18. $x_n = \frac{n \cos \frac{\pi n}{2} + 1}{n+1}$.
19. $x_n = \frac{((-1)^n - 1)n + 1}{n}$.
20. $x_n = n^2 \cos \frac{\pi n}{2}$.

Завдання 6. *Обчислити границю*

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-3}\right)^{n}$.
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n}$.
4. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+3}\right)^{2n-5}$.
5. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}$.
6. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$.
7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{n+3}\right)^{n^2-3}$.
8. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$.
9. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n}$.
10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^{3n+1}$.
11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+5}{2n+6}\right)^{3n^2+1}$.
12. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{7n^2-n+1}{7n^2-n+7}\right)^{2n+3}$.
13. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{-n^2+3n+2}{-n^2+3n-2}\right)^{n^2-2}$.
14. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{4n^2-3n}{4n^2-3n+3}\right)^{7^n-3}$.
15. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1-2n^2+4n}{-2n^2+4n-1}\right)^{5^n-1}$.
16. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-n+4}{n^2-n-1}\right)^{2^n+2}$.
17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^3+n+4}{n^3-n+1}\right)^{3^n-3}$.
18. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n-5}{2n-6}\right)^{3n^2+1}$.
19. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-n}{3n^2-n+3}\right)^{2n+3}$.
20. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+2}{n^2+3n-2}\right)^{n^2}$.

ГРАНИЦЯ ФУНКЦІЇ

Теоретичні питання

1. Означення границі функції на мовах "$\varepsilon-\delta$" околів, послідовностей.

Число b називають границею функції $f(x)$ в точці x_0, якщо

$$\forall\varepsilon>0\quad\exists\delta=\delta(\varepsilon)\quad\forall x\in D_f\quad 0<|x-x_0|<\delta\quad|f(x)-b|<\varepsilon.$$

Число b називають границею функції $f(x)$ в точці a(при $x\to a$), якщо для довільної послідовності x_n, $x_n\neq a$, збіжної до числа a, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збігається до числа b($\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$).

2. Властивості границі функції.

Нехай функції $f(x)$ та $g(x)$ визначені на одній і тій самій множині X, x_0 – гранична точка множини X. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=c$, тоді існують

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x)) = b\pm c$;

2. $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = b\cdot c$;

3. $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{b}{c}$ (якщо $c\neq 0$).

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Користуючись означенням границі функції на мові "$\varepsilon-\delta$", довести, що* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x+2}{x-1} = 8$. *Яким повинно бути* δ, *якщо* $\varepsilon = 0.001$?

Розв'язок. Згідно з означенням границі функції, ми повинні довести твердження:

$$(\forall\varepsilon>0)\quad(\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0)\quad(\forall x\in X)\quad 0<|x-2|<\delta\Rightarrow\left|\frac{3x+2}{x-1}-8\right|<\varepsilon. \tag{8}$$

Для знаходження числа δ залежного від ε, ми повинні розв'язати нерівність (1) відносно $|x-2|$. Як правило, така задача складна. Ми можемо спростити останню нерівність в (1), замінюючи її підсиленою, але такою, що виконується при всіх достатньо маленьких $|x-2|$. Запишемо цю нерівність в еквівалентній формі:

$$\left|\frac{3x+2}{x-1}-8\right| = \left|\frac{3x+2-8x+8}{x-1}\right| = \left|\frac{5(x-2)}{(x-2)+1}\right|<\varepsilon,\ \text{або}\left|1+\frac{1}{x-2}\right|>\frac{5}{\varepsilon}.$$

Останню нерівність замінимо на більш сильну:

$$\frac{1}{|x-2|}-1>\frac{5}{\varepsilon} \tag{9}$$

або

$$|x-2|<\frac{\varepsilon}{5+\varepsilon}. \tag{10}$$

Виберемо додатнє число δ так, щоб виконувалась нерівність $\delta\le\dfrac{\varepsilon}{5+\varepsilon}$. Тоді при $|x-2|<\delta$ буде виконуватись нерівність (3) (або ж (2)) і, тим більше, нерівність (1). Якщо $\varepsilon = 0.001$, то в ролі δ можна взяти $\dfrac{0.001}{5+0.001}\approx 0.0002$.

Завдання 2. *Користуючись означенням границі функції на мові околів, довести, що*

$$\lim_{x\to -2}(4x^3-3) = -35.$$

Розв'язок. Потрібно довести, що

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x \in X)\ x \in \hat{U}_\delta(-2) \Rightarrow 4x^3 - 3 \in \hat{U}_\varepsilon(-35).$$

Умова $4x^3 - 3 \in \hat{U}_\varepsilon(-35)$ рівносильна нерівності

$$|4x^3 - 3 - (-35)| = 4|x+2||x^2 - 2x + 4| < \varepsilon.$$

Для полегшення знаходження проколотого околу $\hat{U}_\delta(-2)$ на число δ покладемо обмеження $\delta \le 1$. Нехай $x \in \hat{U}_\delta(-2)$. Тоді $|x+2| < \delta$, або ж $-3 < x < -1$, отже $|x^2 - 2x + 4| \le 19$. Знайдемо δ із нерівності $4 \cdot 19 \cdot \delta < \varepsilon$, тобто покладемо $\delta < \dfrac{\varepsilon}{76}$. Тоді $x \in \hat{U}_\delta(-2) \Rightarrow |4x^3 - 3 - (-35)| < 4 \cdot 19 \cdot \delta < \varepsilon$, тобто $x \in \hat{U}_\delta(-2) \Rightarrow f(x) \in \hat{U}_\varepsilon(-35)$.

Завдання 3. *Довести, що при $x \to 1$ функція $f(x) = \sin \dfrac{1}{x-1}$ не має границі.*

Розв'язок. Згідно означення границі функції на мові послідовностей, досить знайти дві послідовності $\{x_n\}$ і $\{x_n^{'}\}$ такі, що $x_n \to 1, x_n^{'} \to 1$ при $n \to \infty$ та $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \ne \lim\limits_{n\to\infty} f(x'_n)$.

Покладемо $x_n = 1 + \dfrac{1}{n\pi}$, $x'_n = 1 + \dfrac{2}{(4n-3)\pi}$, $n \in N$.

Тоді $f(x_n) = \sin n\pi = 0 \to 0$, $f(x'_n) = \sin \dfrac{4n-3}{2}\pi = 1 \to 1$, при $n \to \infty$.

Потрібне твердження доведено.

Завдання 4. *Обчислити границі:*

$$\text{а)} \lim_{x\to 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}; \qquad \text{б)} \lim_{x\to\pi} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos^3 x}.$$

Розв'язок. Безпосереднє обчислення границі частки двох функцій може привести до невизначеності виду $\frac{0}{0}$. Як правило, в таких випадках слід виділити множники, за рахунок яких чисельник і знаменник прямують до нуля. Скорочуючи дріб на однакові множники, можемо уникнути невизначеності $\frac{0}{0}$. Виходячи із сказаного,

а)

$$\lim_{x\to 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5} = \lim_{x\to 5} \frac{2(x-5)(x-\frac{1}{2})}{3(x-5)(x+\frac{1}{3})} = \lim_{x\to 5} \frac{2x-1}{3x+1} = \frac{9}{16};$$

б)

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos^2 x}{1+\cos^3 x}=\lim_{x\to\pi}\frac{(1+\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x+\cos^2 x)}=$$
$$=\lim_{x\to\pi}\frac{1-\cos x}{1-\cos x+\cos^2 x}=\frac{2}{3}.$$

Завдання 5. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{4-2x}}$.

Розв'язок. Як і в попередній задачі, маємо невизначеність $\frac{0}{0}$. Методика знаходження подібних границь така ж, як і в задачі 4, але для виділення вказаних множників ми множимо чисельник і знаменник дробу на спряжені вирази, при цьому використовуємо формули скороченого множення:

$$\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{4-2x}}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(\sqrt{3+x}-\sqrt{2x-3})(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x-3})(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)(4-2x)}+\sqrt[3]{(4-2x)^2})}{(\sqrt[3]{(x+2)}+\sqrt[3]{4-2x})(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)(4-2x)}+\sqrt[3]{(4-2x)^2})(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{(6-x)(\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)(4-2x)}-\sqrt[3]{(4-2x)^2})}{(6-x)(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x-3})}=$$

$$=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}-\sqrt[3]{(x+2)(4-2x)}-\sqrt[3]{(4-2x)^2}}{\sqrt{3+x}+\sqrt{2x-3}}=\frac{4+4+4}{3+3}=2$$

Завдання 6. *Обчислити границі:*

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^7-4x^4+5x^3-7x+1}{4-2x^3+3x^5-x^7}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x+5\cdot 3^x}{3^x+7}$; в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(4x^3-7x^2+8)}{\ln(5x^2+4x-3)}$.

Розв'язок. При розкритті невизначеності $\frac{\infty}{\infty}$ в нескінченості часто застосовують ділення чисельника і знаменника на деякий вираз. Так, наприклад:

$$\text{а) }\lim_{x\to\infty}\frac{3x^7-4x^4+5x^3-7x+1}{4-2x^3+3x^5-x^7}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{4}{x^3}+\frac{5}{x^4}-\frac{7}{x^6}+\frac{1}{x^7}}{\frac{4}{x^7}-\frac{2}{x^4}+\frac{3}{x^2}-1}=-3;$$

$$\text{б) }\lim_{x\to\infty}\frac{2^x+5\cdot 3^x}{3^x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\frac{2}{3})^x+5}{1+\frac{7}{3^x}}=5;$$

в) $$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(4x^3-7x^2+8)}{\ln(5x^2+4x-3)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x^3(4-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^3})}{\ln x^2(5+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{3\ln x+\ln(4-\frac{7}{x}+\frac{8}{x^3})}{2\ln x+\ln(5+\frac{4}{x}-\frac{3}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{\ln(4-7/x+8/x^3)}{\ln x}}{2+\frac{\ln(5+4/x-3/x^2)}{\ln x}}=\frac{3}{2}.$$

Завдання 7. *Знайти границі :*

а) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$; *б)* $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})$.

Розв'язок. Невизначеність виду $\infty-\infty$ зводиться до виду $\frac{\infty}{\infty}$, або $\frac{0}{0}$ шляхом елементарних перетворень виразів (зведення до спільного знаменника, множенням і діленням на спряжений вираз і т. д.)
а)

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{2+x}-\frac{12}{x^3+8}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+4-12}{x^3+8}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-4)}{(x+2)(x^2-2x+4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-4}{x^2-2x+4}=-\frac{1}{2};$$

б)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+x})(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x})}{(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+x})}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x(\sqrt{1+2/x}+\sqrt{1+1/x})}=\frac{1}{2}.$$

Завдання для індивідуальної та самостійної робіт

Завдання 1. *Користуючись різними означеннями границі функції, доведіть, що:*

1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{3x+6}{2}=6$;
2. $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x+3}=2$;
3. $\lim\limits_{x\to 2}\cos\frac{1}{x-2}$ – не існує;
4. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x-6}{3}=-\frac{8}{3}$;
5. $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt{x+1}=3$;
6. $\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}$ – не існує;
7. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{5x+6}{2}=-\frac{1}{2}$;
8. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+3}}{2}=\frac{1}{2}$;
9. $\lim\limits_{x\to 2}\sin\frac{1}{x-2}$ – не існує;
10. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{8x+5}{3}=-\frac{11}{3}$;
11. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x-6}{3}=-\frac{8}{3}$;
12. $\lim\limits_{x\to 8}\sqrt{x+1}=3$;
13. $\lim\limits_{x\to 1}\sin\frac{1}{x-1}$ – не існує;
14. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{3x-2}{3}=-\frac{8}{3}$;
15. $\lim\limits_{x\to -1}\sqrt{x+5}=2$;
16. $\lim\limits_{x\to -1}\cos\frac{1}{x+1}$ – не існує; ll
17. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{7x-3}{4}=1$;
18. $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt{14+x}=4$;
19. $\lim\limits_{x\to 3}\cos\frac{1}{x-3}$ – не існує;
20. $\lim\limits_{x\to 9}\sqrt{x+16}=5$.

Завдання 2. *Обчисліть границі функцій:*

1. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}-\sqrt[5]{x^4-1}}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x+7}-\sqrt{2x+10}}{\sqrt{4x+13}-\sqrt{x+22}}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\operatorname{tg}2x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4-2x^2-3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^5}{(x^2+5)^4}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-\sqrt{8x+1}}{3(x-1)}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.

3. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+6)^{10}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}-7\sqrt[5]{x}}{\sqrt{4x+5}+\sqrt[3]{x-7}}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{9x^2-4}-3x)$.

4. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{3x^2+x-10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^3+x-2)}{\ln(x+x^2-7)}$;
в) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x+1}{\sqrt{6x^2+3}+3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x(\sqrt{x^2+4}-x)$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3+3x^2-9x-2}{x^3-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4+x)(3-x)(3x^2-7)}{x^4+3x-1}$;
в) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{3-\sqrt[3]{7x+6}}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2x\operatorname{tg}x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$.

6. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-\sqrt{x^2+2})^2+(x+\sqrt{x^2+2})^2}{x^2+3x-1}$;
в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}/2-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{2}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

7. а) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+5x^2+3x-9}{x^3-3x^2-45x-81}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\sqrt[3]{x}+5\sqrt{x}+7\sqrt[4]{x}}{\sqrt{x-7}+\sqrt[3]{2x-1}}$;
в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-1}-\dfrac{x^2}{3x+1}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg}2x}{\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2-4x+8}{x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^7+5x^5-7)}{\ln(x^3+3x+1)}$;
в) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sqrt{1-\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\operatorname{tg}x}}{\sin 2x}$; г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x-1})$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x-4}{\sqrt[3]{x^3+4x-1}}$; б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-1}{x^2+3x+2}$;
в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}^3 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{\frac{1}{3}}\left((x+1)^{\frac{1}{3}}-(x-1)^{\frac{1}{3}}\right)$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x^4-4x^3+4x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$;
в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{4\operatorname{tg}x-5+\operatorname{tg}^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+1}-\sqrt[3]{x^2-1}}{\sqrt[4]{x^4+1}+\sqrt[5]{1-32x^5}}$;
в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{4x^2+3}-2x)$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-x^2-x+1}{x^3-3x+2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(4x-1)^2(x+5)(2x-3)}{4x^4+5x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x^2-9}-\dfrac{7}{x^3+4x^2-9x-36}\right)$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-12x+16}{x^3-3x^2+4}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7x}{\sqrt[3]{6x-1}+\sqrt[3]{2x+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{\sqrt[4]{(1-\cos x)^2}}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+7}-3\sqrt{2x-3}}{\sqrt[3]{x+6}-2\sqrt[3]{2x-3}}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{x^3+2x^2-x-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{4}{2x-x^2}-\dfrac{8}{4-x^2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin 6x\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)$.

15. а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+5x+2}{2x^3+7x^2+6x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt[3]{27x^3+1}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{\cos 7x-\cos 3x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x^2}-4}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{2+x}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{\sqrt[3]{(1-\sin x)^2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+4}-x)$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-1-x}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-9x+1}-x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg} x}\right)$; г) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+3}-x)$.

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-8x-7}{3x^2+7x+10}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$;

в) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$; г) $\lim\limits_{x\to -3}\left(\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{6}{9-x^2}\right)$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x^2-8x^3+x+6}{3x+2x^2+10}$; б) $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+12}-\sqrt{4-x}}{x^2+2x-8}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(\sqrt{x^2+5}-x)$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(x-\dfrac{\pi}{3})}{1-2\cos x}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x+3)^3(3x-2)^5}{(x^2+5)^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^3+x-2)}{\ln(x+x^2-7)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\sqrt{3}/2-\cos x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{3x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right)$.

ОДНОСТОРОННІ ТА «ЧУДОВІ» ГРАНИЦІ

Теоретичні питання

1. Означення односторонніх границь на мові $\varepsilon-\delta$, околів. Зв'язок з границею.

Нехай x_0 – гранична точка множини X, на якій визначена функція $f(x)$. Число b називається лівосторонньою(правосторонньою) границею функції $f(x)$ в точці x_0 якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)\ \forall x\in(x_0-\delta,x_0)\,((x_0,x_0+\delta))\ |f(x)-b|<\varepsilon.$$

Функція $f(x)$ має границю в точці x_0 тоді і тільки тоді, коли в даній точці існують лівостороння границя, правостороння границя і вони співпадають між собою.

2. Формула для обчислення числа Ейлера.

$$e=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}},\ e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\tfrac{1}{x}\right)^x.$$

3. «Чудові» границі.

$$\lim_{x\to 0}\tfrac{\log_a(1+x)}{x}=\tfrac{1}{\ln a},\quad \lim_{x\to 0}\tfrac{a^x-1}{x}=\ln a,\quad \lim_{x\to 0}\tfrac{(1+x)^a-1}{x}=a.$$

4. Границі степенево-показникових функцій.

$$\lim_{x\to a}(\varphi(x))^{\psi(x)}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)\ln\varphi(x)}=$$
$$e^{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)\ln(1+(\varphi(x)-1))}=e^{\lim\limits_{x\to a}\psi(x)(\varphi(x)-1)}.$$

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Знайти односторонні границі функцій* $f(x)=\dfrac{x}{|x|}+x^2$ *в точці* $x=0$. *Запишіть результат на мові «$\varepsilon-\delta$».*

Розв'язок.

Якщо $x>0$, то $f(x)=1+x^2$. Отже, $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}(1+x^2)=1$. На мові "$\varepsilon-\delta$" це означає, що

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in R),0<x<\delta\Rightarrow\left|\frac{x}{|x|}+x^2-1\right|=x^2<\varepsilon.$$

Легко бачити, що число «δ» повинно задовольняти нерівності $0 < \delta \leq \sqrt{\varepsilon}$.

Якщо $x < 0$, то $f(x) = x^2 - 1$. Отже, $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = -1$. Це твердження можна записати так:

$$(\forall \varepsilon_1 > 0)(\exists \delta_1 > 0)(\forall x \in R) - \delta_1 < x < 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{|x|} + x^2 + 1\right| = x^2 < \varepsilon_1.$$

З останнього запису видно, що δ_1 повинно задовольняти нерівності $0 < \delta_1 \leq \sqrt{\varepsilon_1}$.

Завдання 2. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.

Розв'язок. Скористаємось теоремою про заміну змінної під знаком границі. Покладемо $x = t^{15}$. Очевидно, що при $x \to -1 \quad t \to -1$.

Отже,

$$\lim_{x\to -1} \frac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}} = \lim_{t\to -1} \frac{1+t^5}{1+t^3} = \lim_{t\to -1} \frac{(1+t)(1-t+t^2-t^3+t^4)}{(1+t)(1-t+t^2)} = \frac{5}{3}.$$

Завдання 3. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x+5}$.

Розв'язок. Під знаком границі маємо степенево-показниковий вираз, основа якого прямує до 1, а показник – до нескінченості. Невизначеності типу 1^∞ найчастіше розкривають за допомогою формули $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$. Після простих перетворень одержуємо:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^{3x+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^{3x}}{(2x-1)^{3x}} \cdot \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-1}\right)^5 =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x}{3}}\right)^{\frac{2x}{3}}\right]^{\frac{9}{2}}}{\left[\left(1+\frac{1}{-2x}\right)^{-2x}\right]^{-\frac{3}{2}}} = \frac{\lim\limits_{u\to\infty}\left[(1+\frac{1}{u})^u\right]^{\frac{9}{2}}}{\lim\limits_{v\to\infty}\left[(1+\frac{1}{v})^v\right]^{\frac{-3}{2}}} = \frac{e^{9/2}}{e^{-3/2}} = e^6.$$

Зауважимо, що ми користувались теоремами про границю добутку і частки функцій, про заміну змінної під знаком границі, про перехід до границі в основі степеневої функції.

Завдання 4. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

Розв'язок. При розв'язанні цієї задачі зручно користуватися рівністю:

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a} v(x)[u(x)-1]}.$$

Шляхом простих перетворень одержуємо:

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0}(\cos\sqrt{x})^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}(\cos\sqrt{x}-1)\cdot\frac{1}{x}} = e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2(\sqrt{x}/2)}{x}} =$$

$$= e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2(\sqrt{x}/2)}{2(\sqrt{x}/2)^2}} = e^{\frac{-1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Завдання 5. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

Розв'язок. Скористаємось теоремами про границю добутку функцій, про заміну змінної під знаком границі та формулою: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin z}{z} = 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin 2x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}\cdot(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin 2x} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{1} =$$

$$= \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x/2}{x/2}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin 2x}\cdot\lim_{x\to 0}(1+\cos x+\cos^2 x) = 3/4.$$

Завдання 6. *Знайти границю* $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}, (a>0)$.

Розв'язок. Скористаємось формулами $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \ln a$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\mu-1}{x} = \mu$, також відомими теоремами про границю функцій:

$$\lim_{x\to a}\frac{a^x-x^a}{x-a} = \lim_{z\to 0}\frac{a^{z+a}-(a+z)^a}{z} = \lim_{z\to 0}a^a\cdot\frac{a^z-1-\left[\left(1+\frac{z}{a}\right)^a-1\right]}{z} =$$

$$= \lim_{z\to 0}a^a\cdot\frac{a^z-1}{z} - \lim_{z\to 0}\frac{a^a\left(1+\frac{z}{a}\right)^a-1}{a\cdot\frac{z}{a}} = a^a(\ln a-1) = a^a\ln\frac{a}{e}.$$

Завдання для індивідуальної та самостійної робіт

Завдання 1. *Знайдіть односторонні границі функції $f(x)$ в точці x_0, якщо:*

№ п/п	x_0	$f(x)$	№ п/п	x_0	$f(x)$
1.	1	$\dfrac{1}{3-3^{\frac{2}{x-1}}}$	**11.**	1	$\begin{cases} 3x+5, & x \le 1; \\ \frac{x-3}{x^3+1}, & x > 1. \end{cases}$
2.	2	$\dfrac{4-x^2}{\lvert 2-x \rvert}$	**12.**	0	$\dfrac{1}{3+5^{\frac{1}{\sin x}}}$
3.	0	$\dfrac{\operatorname{tg} x}{x^2-3x}$	**13.**	0	$\dfrac{\cos 2x}{1-3^{\frac{1}{\sin 2x}}}$
4.	2	$7^{\frac{1}{2-x}}$	**14.**	-3	$\dfrac{2^{\frac{1}{x+3}}-1}{2^{\frac{1}{x+3}}+1}$
5.	$\frac{1}{2}$	$\begin{cases} \sqrt{1-x^2}, & 0 < x \le \frac{1}{2}; \\ 2-x, & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$	**15.**	$\frac{\pi}{4}$	$\dfrac{\lvert \operatorname{tg}(4x-\pi) \rvert}{2x-\frac{\pi}{2}}$
6.	1	$4+\dfrac{1}{2^{\frac{x}{1-x}}}$	**16.**	2	$\dfrac{x^3-8}{\lvert x-2 \rvert}$
7.	0	$\operatorname{arcctg} \frac{1}{x}$	**17.**	0	$\operatorname{arctg} \frac{1}{x}$
8.	1	$\dfrac{1}{2-2^{\frac{3}{x-1}}}$	**18.**	3	$\frac{\lvert 3-x \rvert}{x^2-9}$
9.	$\sqrt{2}$	$\dfrac{2-x^2}{\lvert \sqrt{2}-\sqrt{x} \rvert}$	**19.**	0	$\dfrac{1}{1-4^{\frac{1}{\sin x}}}$
10.	2	$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}}$	**20.**	-3	$\dfrac{-2}{2^{\frac{1}{x+3}}+1}$

Завдання 2. *Знайдіть границі функцій:*

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+2x-1}{x^2-3x-2}\right)^{1/x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^4}-\cos x^2}{x^4}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x-\operatorname{tg} x}{\sin 2x-\sin x}$;

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+7}{2x-1}\right)^{x+7}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{1+\cos x}{1+\operatorname{ctg} x}\right)^{\dfrac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}$;

   в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$; г) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sec x-\sec a}{x-a}$;

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+x-3}{x^2+4}\right)^{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{2}{x^{3/2}}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sin x}{\operatorname{tg}^2 x+1-\cos 2x}$;

4. а) $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{4x^2}-1}{\ln\cos 2x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1}{3x-2}\right)^{x}$;

5. а) $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$; б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin 2x}-e^{\sin x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{2x+2}\right)^{x}$;

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-7}{3x^2+1}\right)^{4x^2+7}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

в) $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\ln\cos\frac{\pi}{n}$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+5e^x)}{\ln\left(1+2e^{2x}\right)}$;

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$; б) $\lim\limits_{x\to1}(2-x)^{\sec\frac{\pi x}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{2}\operatorname{tg} 6x}{\sqrt{1-\cos 4x}}$; г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$;

8. а) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\operatorname{tg}^2 2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-5}{2x+3}\right)^{x+3}$;

9. а) $\lim\limits_{x\to1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$; в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos 5x}{e^{\cos x}e^{\sqrt{1+4x^2}}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 3x-\cos 2x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2+5}{5x^2+1}\right)^{x^2}$;

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{2}{x^{3/2}}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x)}{5^x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-4}{x^2}\right)^{x^2+5}$;

11. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-\sqrt[5]{1+10x}}{\ln(1+\sin x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{3x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg}x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$;

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{1/x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{\sin^2 x}-1}{\ln(1-4\operatorname{tg}^2 x)}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$; г) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[x-2]{5-2x}$;

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt[x-1]{\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\operatorname{tg}2x}$; д) $\lim\limits_{x\to\infty}x[\ln(2+x)-\ln x]$;

14. а) $\lim\limits_{x\to 2}\sqrt[x-2]{1+\sin\dfrac{\pi x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{3x+5}\right)^{x-4}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\ln\cos(x-2)}{\sqrt[3]{6+x}-2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\operatorname{tg}2x}-e^{\operatorname{tg}x}}{x}$;

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin 3x}-e^{\sin x}}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{x\arcsin(2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-3x}$;

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-1}\right)^{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{e^{2x}-e^{-2x}}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$;

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+2}\right)^{\frac{x}{2}}$; б)д) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}5x}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \ln \dfrac{x^2+1}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\log_2(x-1)}{\sqrt{5+2x}-3}$;

18. а) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x + \sin x)^{\frac{1}{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\sqrt[3]{6-5x}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}} - \sqrt[3]{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{4}}}{x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+\frac{x^2}{2}}-1}$;

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{7x-3x^3}{-3x^3+2x}\right)^{\frac{x}{2}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\sqrt[3]{1-4x}\right)^{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln(1+2^{-x^2})}{\ln(1+3^{-x^3})}$; г) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^3-1}$;

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{2x-10}{2x+3}\right)^{\frac{2x+1}{3}}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sin\dfrac{2}{x} + \cos\dfrac{2}{x}\right)^{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x} - \sqrt[5]{1+x}}{\ln(1+\sin 2x)}$; г) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{x^3-8}{x^2+3x+2}$.

НЕСКІНЧЕННО МАЛІ ТА ВЕЛИКІ ФУНКЦІЇ

Теоретичні питання

1. Нескінченно малі та нескінченно великі функції.
Функція $\alpha(x)$ зназивається нескінченно малою в точці x_0 якщо

$$\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Функція $f(x)$ зназивається нескінченно великою в точці x_0 якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty.$$

Якщо $\alpha(x)$ є нескінченно малою в точці x_0, при цьому поблизу цієї точки значення функції не перетворюється в нуль, тоді $\frac{1}{\alpha(x)}$ є нескінченно великою в точці x_0. І навпаки, якщо $f(x)$ є нескінченно великою в точці x_0, то $\frac{1}{f(x)}$ є нескінченно малою в точці x_0.

2. Порівняння нескінченно малих та нескінченно великих функцій.

Нехай $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ дві нескінченно малі функкіх в точці x_0.

1. Якщо $\lim\limits_{xtox_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = konst \neq 0$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають нескінченно малими однакового порядку в точці x_0. Позначають цей факт $\alpha(x) = O(\beta(x))$ при $x \to x_0$.(О-велике – символ Ландау.)

2. Якщо $\lim\limits_{xtox_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ та $\beta(x)$ називають еквівалентними нескінченно малими в точці x_0. Позначають цей факт $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to x_0$.

3. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то $\alpha(x)$ називають нескінченно малою вищого порядку в порівнянні з $\beta(x)$ в точці x_0. Позначають цей факт $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to x_0$.(о-мале – символ Ландау.)

3. Порядок нескінченно малих і великих функцій. Виділення головної частини.

Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{(\beta(x))^k} = konst \neq 0$, то $\alpha(x)$ називають нескінченно малою k-го порядку в порівнянні з $\beta(x)$ в точці x_0, тобто $\alpha(x) = O((\beta(x))^k)$ при $x \to x_0$.

Якщо існують константи c та n такі, що $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{\alpha(x)}{c(\beta(x))^k} = 1$, то $c\beta^k(x)$ називаються головною частною нескічненно малої $\alpha(x)$ при $x \to x_0$.

4. Еквівалентні нескінченно малі для елементарних функцій.

$$a^x - 1 \sim x \ln a, \quad \log_a(1+x) \sim \tfrac{x}{\ln a}, \quad (1+x)^a - 1 \sim ax \text{ при } x \to 0.$$
$$x \sim \sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1 \text{ при } x \to 0.$$

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Визначити, які з наведених функцій будуть нескінченно малими одного порядку, нижчого або вищого порядку в порівнянні з нескінченно малою $\beta(x) = x$ при $x \to 0$:*

$$\text{а) } \alpha(x) = \sqrt{4+3x} - \sqrt{x+4}, \quad \text{б) } \alpha(x) = \sqrt[4]{\sin^3 2x}.$$

Розв'язок. Знайдемо границю відношення функцій $y = \alpha(x)$ і $y = x$ при $x \to 0$:

а)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{4+3x} - \sqrt{x+4}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{4 - 3x - x - 4}{x(\sqrt{4+3x} + \sqrt{x+4})} =$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{2}{\sqrt{4+3x} + \sqrt{x+4}} = \frac{1}{2};$$

$$б)\ \lim_{x\to 0_+}\frac{\sqrt[4]{\sin^3 2x}}{x}=\lim_{x\to 0_+}\frac{(\sin 2x)^{3/4}}{x(2x)^{3/4}}\cdot\frac{2^{3/4}}{x^{1/4}}=+\infty.$$

В першому випадку нескінченно малі функції $y=\alpha(x)$ і $y=x$ при $x\to 0$ одного порядку, а в другому випадку функція $y=\alpha(x)$ нескінченно мала нижчого порядку в порівнянні з $y=x$.

Завдання 2. *Визначити порядок нескінченно малої функції* $f(x)=\ln\left(1+x^2+x^3\right)$ *в порівнянні з* $y=x$ *при* $x\to 0$.

Розв'язок. Нехай порядок малості функції $f(x)$ дорівнює k. Тоді границя $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\left(1+x^2+x^3\right)}{x^k}$ повинна мати скінченне значення, відмінне від нуля. Використовуючи «чудову» границю для логарифма одержимо:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2+x^3\right)}{x^k}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+x^2+x^3\right)}{x^2+x^3}\cdot\frac{x^2+x^3}{x^k}=\lim_{x\to 0}x^{2-k}$$

Остання границя має потрібне значення (рівне 1) при $k=2$. Це означає, що функція $f(x)$ є нескінченно малою другого порядку в порівнянні з $y=x$ при $x\to 0$.

Завдання 3. *Довести рівність* $\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2)=O^*(x^2)$ *при* $x\to 0$.

Розв'язок. Потрібно довести, що $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2)}{x^2}$ має скінченне значення. Це дійсно так:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin(\sqrt{4+x^2}-2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{4+x^2}-2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2(\sqrt{4+x^2}+2)}=\frac{1}{4}.$$

Завдання 4. *Виділити головний член виду* $C\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{\alpha}$ *нескінченно великої функції* $A(x)=\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\pi x}$ *при* $x\to 1$.

Розв'язок. Згідно означення, $y=B(x)$ є головною частиною нескінченно великої функції $y=A(x)$ при $x\to x_0$, якщо $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{A(x)}{B(x)}=1$. Ми повинні визначити число C і n так, щоб виконувалась остання рівність при $B(x)=C\left(\frac{1}{x-1}\right)^n$ і $x_0=1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\pi x}}{C\left(\frac{1}{x-1}\right)^n}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^n}{C\operatorname{tg}^2\pi x}=\lim_{z\to 0}\frac{(z)^n}{C\operatorname{tg}^2\pi(z+1)}=\lim_{z\to 0}\frac{(\pi z)^2}{\operatorname{tg}^2\pi z}\cdot\frac{z^{n-2}}{C\pi^2}=1$$

при $n=2$ і $C=\frac{1}{\pi^2}$. Отже, головною частиною нескінченно великої функції $A(x)$ є $B(x)=\dfrac{1}{\pi^2(x-1)^2}$.

Завдання 5. *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt[3]{x}\ln(1+6x)}{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2(e^{5\sqrt[3]{x}}-1)}$.

Розв'язок. Скористаємось теоремою про заміну нескінченно малих функцій під знаком границі на еквівалентні. Якщо $y=\alpha(x)$ – нескінченно мала функція при $x\to x_0$, то $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x), \operatorname{arctg}\alpha(x)\sim\alpha(x), \ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x), e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$, тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\sqrt[3]{x}\ln(1+6x)}{(\operatorname{arctg}\sqrt{x})^2(e^{5\sqrt[3]{x}}-1)}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x}6x}{x5\sqrt[3]{x}}=\frac{6}{5}.$$

Завдання 6. *Обчислити границю* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\cos 3x}{\operatorname{tg}x\ln(1+x)}$.

Розв'язок. Заміняти нескінченно малі доданки в алгебраїчній сумі на еквівалентні нескінченно малі, взагалі кажучи, не можна. Це може привести до помилкового результату. В таких випадках можна скористатися співвідношеннями (при $x\to 0$):

1. $\sin x=x+o(x)$, **2.** $\cos x=1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)$,
3. $\ln(1+x)=x+o(x)$, **4.** $e^x=1+x+o(x)$,
5. $(1+x)^\alpha=1+\alpha x+o(x)$, **6.** $\sqrt[n]{1+x}=1+\frac{x}{n}+o(x)$.

В загальному випадку, якщо $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to x_0$, то $\alpha(x)=\beta(x)+o(x-x_0)$.

Враховуючи сказане, можемо написати:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-\cos 3x}{\operatorname{tg}x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)-\left[1-\dfrac{9x^2}{2}+o(x^2)\right]}{x\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5x^2+o(x^2)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left[5+\frac{o(x^2)}{x^2}\right]=5.$$

Завдання 7. *Обчислити наближено* $\sqrt{9,075}$.

Розв'язок. Оскільки $\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}$, то $\sqrt{1+x}\sim 1+\frac{x}{2}$. Скористаємось цією наближеною рівністю:

$$\sqrt{9,075}=\sqrt{9+0,075}=3\sqrt{1+0,025}\approx 3\left(1+\frac{0,025}{2}\right)=3,0375.$$

Завдання для індивідуальної та самостійної робіт

Завдання 1. *Порівняйте нескінченно малу функцію $y=\alpha(x)$ з нескінченно малою $y=\beta(x)$, а нескінченно велику функцію $y=A(x)$ з нескінченно великою $y=B(x)$ при $x\to x_0$.*

№ п/п	x_0	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	№ п/п	x_0	$A(x)$	$B(x)$
1.	0	$\sin\sqrt{x\sqrt{x}}$	$\sqrt{x^2+\sqrt{x^3}}$	**2.**	0	$\frac{1}{\operatorname{tg}x+x}$	$\frac{1}{2\sin x}$
3.	0	$\sin x-\cos^2 x+1$	x	**4.**	1	$\frac{x^2}{x^2-1}$	$\frac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$
5.	0	$\frac{x}{x-1}$	$x\operatorname{tg}x+\sin^2 x$	**6.**	0	$\frac{1}{2\sqrt{\sin x}}$	$\frac{1}{\operatorname{tg}x+x^2}$
7.	0	$\sqrt{x^2+3x}-x$	$\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$	**8.**	0	$\frac{1}{\operatorname{tg}x}$	$\frac{1}{2x^3+3x^2}$
9.	0	$2^x-\cos x$	$\sin\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{2}\right)$	**10.**	2	$\frac{1}{(x-2)^2}$	$\frac{1}{\sin\pi x}$
11.	0	$\ln^2(1+3x)$	x	**12.**	0	$\operatorname{ctg}^2 3x$	$\frac{1}{x}$
13.	0	$3^{\sqrt{x}}-1$	$2\sqrt{\sin x}$	**14.**	0	$\frac{1}{1-\cos\sqrt{x}}$	$\frac{1}{x^4+\sqrt{x}}$
15.	0	$\operatorname{arctg}\frac{1}{3\sqrt{x}}$	x	**16.**	2	$\operatorname{tg}\frac{1}{x-2}$	$\frac{1}{x-2}$
17.	0	$\sqrt{x+\sqrt{x}}$	$\sin x$	**18.**	$-\infty$	$\frac{1}{e^x}$	$\frac{1}{2^x}$
19.	0	$e^{x^2}-\cos x$	x	**20.**	∞	x^3	e^x

Завдання 2. *Визначте порядок нескінченно малої функції $y=\alpha(x)$ у порівнянні з нескінченно малою $y=\beta(x)$, а нескінченно великої функції $y=A(x)$ з нескінченно великою $y=B(x)$ при $x\to x_0$.*

№ п/п	x_0	$\alpha(x)$	$\beta(x)$	№ п/п	x_0	$A(x)$	$B(x)$
1.	0	$\cos 3x-\cos x$	x	**2.**	1	$\frac{\sin x}{\sqrt[3]{1-x^2}}$	$\frac{1}{1-x}$
3.	2	$\sqrt[3]{\sin\pi x}$	$x-2$	**4.**	0	$\operatorname{ctg}\sqrt[3]{x\sqrt[3]{x}}$	$\frac{1}{x}$
5.	0	$2\sin^4 x-x^5$	x	**6.**	1	$\frac{1}{e^{\cos\frac{\pi x}{2}}-1}$	$\frac{1}{x-1}$
7.	0	$1-2\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$	x	**8.**	0	$\frac{1-2x+x^2}{3x^3}$	$\frac{1}{x}$
9.	0	$\sin 2x-2\sin x$	x	**10.**	1	$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$	$\frac{1}{x-1}$
11.	0	$\cos x-\sqrt[3]{\cos x}$	x	**12.**	2	$\frac{1}{e^{x-2}+\cos(x-2)}$	$\frac{1}{x-2}$
13.	0	$\ln\left(1+\sqrt{x\sin x}\right)$	x	**14.**	0	$\frac{\operatorname{ctg}\frac{\pi x}{2}}{\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{x}$

15.	0	$\sqrt{\cos 2x - 1}$	$\sin x$	**16.**	0	$\dfrac{x+2}{x^2\sqrt{x}}$	$\dfrac{1}{x}$
17.	0	$3\sin 3x - 1$	x	**18.**	0	$\dfrac{x^2-3x+4}{\sqrt{x\sqrt{x}}}$	$\dfrac{1}{x}$
19.	0	$\sin\left(\sqrt{16+x}-4\right)$	x	**20.**	1	$\sqrt{\dfrac{2x+3}{2x-2}}$	$\dfrac{1}{x-1}$

Завдання 3. *Виділіть головний член виду $y = v(x)$ нескінченно малої або нескінченно великої функції $y = u(x)$при $x \to x_0$:*

№ п/п	x_0	$u(x)$	$v(x)$	№ п/п	x_0	$u(x)$	$v(x)$
1.	0	$\sqrt{1+\sin 3x}-1$	cx^n	**2.**	1	$\operatorname{ctg}^2 \pi x$	$c\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^n$
3.	0	$\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x^3}$	cx^n	**4.**	0	$\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$	$c\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$
5.	1	$\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$	$c(x-1)^n$	**6.**	1	$\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$	$c\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^n$
7.	0	$\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$	cx^n	**8.**	0	$\dfrac{1}{\sin^2 x + x^4}$	$c\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$
9.	0	$\cos x - \cos 2x$	cx^n	**10.**	$+\infty$	$\dfrac{\sqrt{x}-x^{10}}{x^7+x\sqrt{x}+3}$	cx^n
11.	0	$\operatorname{tg} x^2 \sin\sqrt{x}$	cx^n	**12.**	0	$\dfrac{1}{\operatorname{tg}^3 x - \sin^2 x}$	$c\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$
13.	1	$\ln\left(x^2+2x-2\right)$	$c\,(x-1)^n$	**14.**	$+\infty$	$\sqrt{4+x}-\sqrt{4-x}$	$c\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$
15.	0	$\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}$	cx^n	**16.**	0	$\dfrac{1}{x\sin x}$	$c\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$
17.	0	$x\,(\sin x - \sin 3x)$	cx^n	**18.**	$+\infty$	$\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}$	$c\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$
19.	1	$\operatorname{tg}\left(x-x^2\right)$	$c\,(x-1)^n$	**20.**	0	$\dfrac{1}{x^2\cos x^3}$	$c\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$

Завдання 4. *Обчисліть границю функцій, користуючись правилом заміни нескінченно малих:*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\ln(1-x)}$; **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{2\sin^2 x + x\operatorname{tg} 7x}$;

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3+(\cos x-1)^2}{3\arcsin^3 x}$; **4.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{\sqrt[4]{1+x^2}-1}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(2-\cos 2x)}{\ln^2(1+\sin 3x)}$;

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 9x^2\operatorname{tg}\frac{x^2}{2}}{\sin^3 x(e^{\frac{x}{4}}-1)}$;

7. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\ln(1+8\alpha)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{4}\sin 6\alpha}$;

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1-\sin 4x)}{e^{\sin 5x}-1}$;

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt[3]{e^x-1}\sqrt[6]{\operatorname{tg}x}}$;

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}x^2}{\arcsin 3x\sin\frac{x}{2}}$;

11. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\sqrt{x}\ln(1+3x)}{(\arcsin\sqrt{x})^2(e^{5\sqrt[3]{x}}-1)}$;

12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 2x^3\ln^2(1+2x)}{\sin^2 6x(e^{3x^2}-1)}$;

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\sqrt[3]{x^4}\sin^2 2x^3}{x^2\operatorname{tg}^2 4x^2\sqrt[3]{e^x-1}}$;

14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x^2+4x^3)}{\ln(1-2x^2-7x^3)}$;

15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\pi x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{2^{\cos^2 x}-1}{\ln\sin x}$;

17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2^{\sqrt{x}}-\cos x}{\sin\sqrt{x}}$;

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{\sin\pi x+x}$,

19. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\ln\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$;

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\ln(1-\sin 3x)}$.

НЕПЕРЕРВНІ ТА РІВНОМІРНО НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ. ТОЧКИ РОЗРИВУ.

Теоретичні питання

1. Неперевність функцій в точці та на множині.

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Для неперевної в точці x_0 функціїї $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$.

Умову неперевності функції $f(x)$ в точці x_0 можна також записати

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\delta x) - f(x_0)) = 0,$$

або

$$f(x_0-0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0).$$

Функція $f(x)$ називається неперервною на множині X якщо вона неперервна в кожній точці $x_0\in X$.

2. Класифікація точок розриву.

Точка x_0, в якій функція $f(x)$ не є неперевною називається точкою розриву.

Якщо x_0 – точка розриву функції $f(x)$, але в ній існують скінченні односторонні границі $f(x_0-0)$ та $f(x_0+0)$, то вона називається точкою розриву першого роду. Якщо ж ще й $f(x_0-0)=f(x_0+0)$, то усувною точкою розриву.(Функцію можна довизначити, поклавши $f(x_0)=f(x_0-0)=f(x_0+0)$.)

Точка x_0 називається точкою розриву другого функції $f(x)$ якщо хоча б одна із односторонніх границь $f(x_0-0)$ або $f(x_0+0)$ не існує або дорівнює нескінченості.

3. Рівномірна неперевність функцій. Теорема Кантора.

Функція $f(x)$ називається рівномірно неперервною на множині A якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\delta(\varepsilon)\ \forall x',x''\ |x'-x''|<\delta\ |f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

Якщо функція $f(x)$ неперевна на обмеженій замкненій множині A, то вона буде й рівномірно неперервна на A.

Розв'язування типових задач

Завдання 1. *Виходячи з означення неперервності функції в точці на мові "$\varepsilon-\delta$", довести неперервність слідуючих функцій:*

а) $f(x)=\sqrt{x+4}$ *в точці* $x=5$;
б) $f(x)=\sin(2x-3)$ *в довільній точці* x_0.

Розв'язок. а) Знаходимо область визначення функції f.

$$D(f)=\{x\in R:x+4\geq 0\}=[-4;+\infty].$$

Очевидно, $5\in D(f)$ і $f(5)=\sqrt{5+4}=3$. Згідно означення неперервності функції в точці на мові "$\varepsilon-\delta$" ми повинні довести, що

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall x\in D(f))|x-5|<\delta\Rightarrow|\sqrt{x+4}-3|<\varepsilon \qquad (1)$$

Визначимо δ в залежності від ε так, щоб виконувалась остання імплікація. Нехай $x\geq -4$ і $|x-5|<\delta$. Тоді $|\sqrt{x+4}-3|=\left|\dfrac{x-5}{\sqrt{x+4}+3}\right|=$ $\dfrac{|x-5|}{|\sqrt{x+4}+3|}\leq\dfrac{|x-5|}{3}<\dfrac{\delta}{3}$. Якщо $\delta\leq 3\varepsilon$, то із попередніх співвідношень випливає, що $|\sqrt{x+4}-3|<\varepsilon$. Отже, при $0<\delta<3\varepsilon$ справедливе твердження (1).

б) Маємо $D(f)=R, f(x_0)=\sin(2x_0-3)$. Фіксуючи довільне додатнє число ε, ми повинні знайти каке додатнє число δ, щоб при довільному $x\in R$ виконувалась імплікація

$$|x-x_0|<\delta\Rightarrow|\sin(2x-3)-\sin(2x_0-3)|<\varepsilon \qquad (2)$$

Нехай справедливо $|x-x_0| < \delta$. Тоді, враховуючи нерівності $|\cos x| \le 1$ і $|\sin x| \le x$ можемо написати

$$|\sin(2x-3) - \sin(2x_0-3)| = 2|\sin(x-x_0)\cos(x+x_0)| \le 2|x-x_0| \le 2\delta.$$

Отже, для справедливості імплікації (2), на δ ми повинні накласти обмеження $2\delta \le \varepsilon$, тобто $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Завдання 2. *Знайти точку розриву функції* $f(x)$ *та дослідити їх характер, якщо*

$$f(x) = \begin{cases} \ln|x|, \quad x \in (-\infty; 0), \\ \dfrac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}, \quad x \in (0; 1,5], \\ x^2+1, \quad x \in (1,5; 2], \\ 5, \quad x \in (2; +\infty). \end{cases}$$

Розв'язок. Із задання функції видно, що $D(f) = R\backslash\{0, 1\}$. На інтервалі $(-\infty, 0)$ справедлива рівність $f(x) = \ln(-x)$ і функція f неперервна. Дійсно, вона являє собою композицію двох неперервних функцій $z = -x$, $x \in (-\infty, 0)$ і $y = \ln z$, $z \in (0, \infty)$. Для кожної точки $x_0 \in (1,5; 2)$ існує окіл, що належить даному інтервалу, і в ньому $f(x) = x^2+1$. Із неперервності елементарної функції $y = x^2+1$ випливає, що функція f неперервна в точці x_0. Аналогічно, функція f неперервна на інтервалі $(2, \infty)$. На інтервалах $(0, 1)$ і $(1; 1,5)$ функція f також неперервна, як композиція трьох неперервних функцій: $z = \dfrac{x}{1-x}$, $u = e^z, v = \dfrac{1}{1-u}$.

Точка 0 і 1 завідомо точки розриву. Для дослідження зарактеру цих точок розриву знаходимо односторонні границі:

$$f(0-0) = \lim_{x\to 0-} \ln(-x) = \lim_{x\to 0+} \ln(z) = -\infty,$$
$$f(0+0) = \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}} = -\infty,$$
$$f(1-0) = \lim_{x\to 1-} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}} = 0,$$
$$f(1-0) = \lim_{x\to 1+} \frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}} = 1.$$

Із цих рівностей видно, що $x = 0$ – точка розриву 2-го роду, а $x = 1$ – точка розриву першого роду. В точці $x = 1$ функція f розривна як зліва, так і справа. Стрибок в ній дорівнює 1.

Ми повинні дослідити ще точки $x = 1,5$ і $x = 2$, оскільки в будь-якому достатньо малому їх околі функція f задається двома різними формулами.

$$f(1,5-0)=\lim_{x\to 1,5-}\frac{1}{1-e^{\frac{x}{1-x}}}=\frac{1}{1-e^{-3}}=f(1,5),$$
$$f(1,5+0)=\lim_{x\to 1,5+}(x^2+1)=3,25\neq f(1,5),$$

тому $x=1,5$ є точкою розриву 1-го роду. Функція в цій точці неперервна зліва і розривна справа. Стрибок дорівнює $3,25-\frac{1}{1-e^{-3}}$. Аналогічно,

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-}(x^2+1)=5=f(2),$$
$$f(2+0)=\lim_{x\to 2+}5=f(2),$$

отже, функція f неперервна в точці $x=2$.

Завдання 3. *Чи можливо продовжити функцію* $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ *на відрізку* $[-1,+\infty)$*, так продовження* F *було неперервною функцією?*
Розв'язок. Очевидно, $D(f)=[-1,0)\cup(0,+\infty)$. Функція f як частка неперервних функцій, неперервна. Однак, $0\notin D(f)$, отже $x=0$ – точка розриву функції f. Дослідимо характер цієї точки розриву, для чого знайдемо границю

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x\left(\sqrt{1+x}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}.$$

Із існування скінченної границі випливає, що $x=0$ – усувна точка розриву функції f. Можна усунути розрив, продовживши функцію f до функції

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{якщо } x\in D(f),\\ \frac{1}{2}, & \text{якщо } x=0.\end{cases}$$

Функція F неперервна на проміжку $[-1,\infty)$.
Завдання 4. *Дослідити на рівномірну неперервність функцію:*

а) $f(x)=\sqrt{x}$; **б)** $g(x)=\ln x$;
в) $h(x)=\dfrac{\sin x}{x},\ x\in(0,1]$; **г)** $u(x)=\operatorname{arctg}x$.

Розв'язок. а) Функція $f_1(x)=\sqrt{x},\ x\in[0,1]$ рівномірно неперервна на основі теореми Кантора. Доведемо рівномірну неперервність функції $f_2(x)=\sqrt{x},\ x\in[1,+\infty]$. Згідно означення рівномірної неперервності функції, ми повинні довести, що

$$(\forall\varepsilon>0)\ (\exists\delta>0)\ \left(\forall x',x''\in(1,+\infty)\right)\ \left|x'-x''\right|<\delta\Rightarrow\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|<\varepsilon.$$

Проводячи очевидні перетворення і оцінки в досліджуваній області, одержимо

$$\left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| = \frac{\left|x' - x''\right|}{\left|\sqrt{x'} + \sqrt{x''}\right|} \leq \frac{1}{2}\left|x' - x''\right| \leq \frac{1}{2}\delta.$$

Якщо $\frac{1}{2}\delta < \varepsilon$, тобто $\delta < 2\varepsilon$, то як тільки $\left|x' - x''\right| < \delta \Rightarrow \left|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}\right| < \varepsilon$. Таким чином рівномірна неперервність функції f_2 доведена.

Оскільки $D(f) = D(f_1) \cup D(f_2)$ і

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{якщо } x \in [0,1]; \\ f_2(x), & \text{якщо } x \in (1,+\infty), \end{cases}$$

то функція f рівномірно неперервна на множині $[0,+\infty)$.
б) З вигляду графіка функції $g(x) = \ln x$ приходимо до висновку, що дана функція не є рівномірно неперервною. Доведемо це. Заперечуючи умову рівномірної неперервності, можемо записати

$$(\exists\varepsilon > 0)\ (\forall\delta > 0)\ \left(\exists x', x'' \in (0,+\infty)\right)\ \left|x' - x''\right| < \delta \Rightarrow \left|\ln x' - \ln x''\right| \geq \varepsilon.$$

Дане твердження доводиться вибором числа ε та точок x', x'' слідуючим чином: $\varepsilon = \ln 2$, $x' = \delta$, $x'' = \dfrac{\delta}{2}$.

Очевидно, $\left|x' - x''\right| = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, $\quad \left|\ln x' - \ln x''\right| = \dfrac{x'}{x''} = \ln 2 = \varepsilon$ і твердження доведено.
в) функція h неперервна як частка неперервних функцій із знаменником відмінним від нуля. Існує скінченна границя $\lim\limits_{x \Rightarrow 0-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. Отже, функцію h можна продовжити до неперервної функції

$$H(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \in (0,1]; \\ 1, & \text{якшо } x = 0 \end{cases}$$

заданої на сегменті $[0,1]$. Згідно теореми Кантора, H є рівномірно неперервною на $[0,1]$. Функція h як звуження рівномірно неперервної H, також рівномірно неперервна.
г) Для доведення рівномірної неперервності скористаємось теоремою: «Якщо на множині X функція f має обмежену похідну f', то функція f на цій множині є рівномірно неперервною». Знайдемо похідну функції $u : u' = \dfrac{1}{1+x^2}$. Очевидно, що при довільному $x \in \mathbf{R}$ виконуються нерівності: $0 \leq \dfrac{1}{1+x^2} \leq 1$. Згідно приведеної теореми функція u рівномірно неперервна.

Завдання для індивідуальної та самостійної робіт

Завдання 1. *На мові $\varepsilon - \delta$ доведіть неперервність функції f в точці x_0, якщо:*

№ п/п	f	x_0	№ п/п	f	x_0
1.	$\sqrt{x}$	9	**2.**	x^3+2	2
3.	x^3-1	-1	**4.**	$\sin(2x-3)$	$\frac{1}{2}$
5.	$\sqrt{x+3}$	13	**6.**	$\cos x$	3
7.	$\cos(2x-1)$	$\frac{3}{2}$	**8.**	$\sin(x+5)$	2
9.	$\sqrt{x-4}$	20	**10.**	$\cos(3x-1)$	$\frac{2}{3}$
11.	$\sqrt[3]{x-5}$	32	**12.**	$\sin(4x+1)$	5
13.	$\cos(9x+4)$	-2	**14.**	$\sqrt[3]{x-1}$	9
15.	$\cos x$	3	**16.**	$\sin(3x-1)$	1
17.	$\sqrt[3]{2x}$	4	**18.**	$\sqrt{x-3}$	4
19.	$3x+2$	4	**20.**	$2x^3+1$	1

Завдання 2. *Знайти точки розриву функцій та дослідити їх характер:*

№ п/п	f	№ п/п	f
1.	а) $\dfrac{x^3-1}{x-1}$, б) $2^{\frac{-2}{2-x}}$	**2.**	а) $5^{\frac{1}{x}}$, б) $\dfrac{\lvert\sin x\rvert}{\sin x}$
3.	а) $\dfrac{x-2}{x^2+x-6}$, б) $e^{x+\frac{1}{x-2}}$	**4.**	а) $\dfrac{1}{\ln x}$, б) $\dfrac{x+5}{1-e^{\frac{x}{x-3}}}$
5.	а) $\dfrac{3}{2^x-1}$, б) $\begin{cases} x+2, \ x<2 \\ x^2-1, \ x\geq 2 \end{cases}$	**6.**	а) $\dfrac{2^{\frac{1}{x}}-1}{2^{\frac{1}{x}}+1}$, б) $\cos\dfrac{\pi}{2-x}$
7.	а) $\dfrac{2}{x^4-1}$, б) $\dfrac{2\lvert x-1\rvert}{x^2-x^3}$	**8.**	а) $e^{\frac{1}{x+2}}$, б) $\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2}, \ \lvert x\rvert\leq 1 \\ \lvert x-1\rvert, \ \lvert x\rvert>1 \end{cases}$
9.	а) $\lg\lvert x-3\rvert$, б) $\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$	**10.**	а) $\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$, б) $\dfrac{1}{x^2-9}$
№ п/п	f	№ п/п	f
11.	а) $3^{\frac{1}{x+3}}$, б) $\begin{cases} x, \ x\leq 0 \\ \dfrac{1}{x}, \ x>0 \end{cases}$	**12.**	а) $\dfrac{2+x^2}{8-x^3}$, б) $\begin{cases} x^2-2x, \ x\leq 1 \\ 2-x, \ 1<x<2 \\ 4-x^2, \ x\geq 2 \end{cases}$
13.	а) $\dfrac{\lvert x+1\rvert}{x+1}$, б) $\dfrac{1}{4x-x^2-3}$	**14.**	а) $e^{\frac{1}{x-5}}$, б) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+2}, \ 0\leq x<1, \\ x^2+1, \ x\geq 1 \end{cases}$

15.	а) $\dfrac{x^2-2}{x+\sqrt{2}}$, б) $3^{\frac{3}{3-x}}$	**16.**	а) $3^{\frac{1}{x-3}}$, б) $\sin\dfrac{\pi}{3-\pi}$
17.	а) $\dfrac{x-3}{x^2+x-12}$, б) $2^{x+\frac{1}{x-2}}$	**18.**	а) $\dfrac{x^2+5x-14}{x+7}$, б) $e^{\frac{1}{x-1}}$
19.	а) $\dfrac{1}{2x^2-7x+3}$, б) $4^{x+\frac{1}{x-4}}$	**20.**	а) $\cos\dfrac{\pi}{x-4}$, б) $\dfrac{x^3+x^2+x+1}{x+1}$

Завдання 3. *Функцію f продовжити на числову вісь* $\mathbf{R}$ *так, щоб продовження F було неперервною функцією.*

1. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$;

2. $f(x)=\dfrac{\ln x^3-3}{x-e}$;

3. $f(x)=\dfrac{1-\cos 3x}{x\operatorname{tg}2x}$;

4. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2}$;

5. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$;

6. $f(x)=\dfrac{2^{3x}-1}{3x}$;

7. $f(x)=\dfrac{\ln(1-5x)}{x}$;

8. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+16}-4}{x^2}$;

9. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$;

10. $f(x)=\dfrac{5x^2-3x}{2x}$;

11. $f(x)=\dfrac{\sin^2 x}{x^2}$;

12. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$;

13. $f(x)=\dfrac{\sqrt[5]{1+2x}-1}{x}$;

14. $f(x)=\dfrac{\ln(1+\sin x)}{x}$.

15. $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+\sin x}-1}{x}$;

16. $f(x)=\dfrac{\sqrt{\sin x^2+1}-1}{x^2}$;

17. $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{1-x}-\sqrt[3]{1+x}}{x}$;

18. $f(x)=\dfrac{3^{4x}-1}{4x}$;

19. $f(x)=\dfrac{\ln(1-x)}{x}$;

20. $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}$.

Література

[1] Вища математика у прикладах і задачах. Ч. 1. Лінійна алгебра і аналітична геометрія. Диференціальне числення функцій однієї змінної/А. Д. Тевяшев, О.Г. Литвин, Г. М. Кривошеєва та ін. Харків : ХНУРЕ, 2006. – 588с.

[2] Заблоцький М.В. Математичний аналіз. /М.В. Заблоцький, О.Г. Сторож, С.І. Тарасюк. Київ: Знання, 2008. – 421с.

[3] Ковальчук Б.В. Основи математичного налізу: підручник в 2ч. Ч.1./ Б.В. Ковальчук, Й.Г. Шіпка. - Львів: видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2010. –374с.

[4] Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т.1. – М.: Физматлит, 2001. – 616 с.

[5] Шкіль М.І. Математичний аналіз: Підручник у 2 ч. Ч. 1. – 3-тє вид., переробл. і допов. – К.: Вища шк., 2005. – 447 с.

Погоріляк Олександр Олександрович – кандидат фіз.-мат. наук
Сливка-Тилищак Ганна Іванівна – доктор фіз.-мат. наук
Слюсарчук Петро Володимирович – кандидат фіз.-мат. наук

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до виконання типових індивідуальних завдань з математичного аналізу для студентів факультету математики та цифрових технологій

ГРАНИЦЯ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЇ