УДК 519.21
https://doi.org/10.17721/1812-5409.2020/3.11

Г.І. Сливка-Тилищак[1], *д. ф.-м. н.*
М.М. Михасюк[2], *асп.*
О.О. Погоріляк[3], *к. ф.-м. н.*

Задача Коші для рівняння теплопровідності на площині з випадковою правою частиною з простору Орліча

[1]Пряшівський університет в Пряшеві, м.Пряшів (Словаччина), вул. 17 Новембра, 15, ДВНЗ «Ужгородський національний університет», 88000, м.Ужгород, пл. Народна, 3,
[2,3]ДВНЗ «Ужгородський національний університет», 88000, м.Ужгород, пл. Народна, 3,
e-mail: [1]anna.slyvka@uzhnu.edu.ua
[2]mykhailo.mykhasiuk@uzhnu.edu.ua
[3]oleksandr.pohoriliak@uzhnu.edu.ua

A.I. Slyvka-Tylyshchak[1], *Dr.Sci.*
M.M. Mykhasiuk[2], *PhD stud.*
O.O. Pohoriliak[3], *PhD.*

The Cauchy problem for the heat equation on the plane with a random right part from the Orlicz space

[1]Prešovska univerzita v Prešove, Prešov (Slovakia), 17. Novembra Square, 15,
Uzhhorod National University, 88000, Uzhhorod, Narodna Square, 3
[2,3] Uzhhorod National University, 88000, Uzhhorod, Narodna Square, 3
e-mail: e-mail: [1]anna.slyvka@uzhnu.edu.ua
[2]mykhailo.mykhasiuk@uzhnu.edu.ua
[3]oleksandr.pohoriliak@uzhnu.edu.ua

В роботі досліджується розв'язок задачі Коші для рівняння теплопровідності на площині, коли права частина є випадковим полем з простору Орліча.

Ключові слова: випадкові процеси з простору Орліча, рівняння теплопровідності, оцінка для розподілу супремуму розв'язку

The heat equation with random conditions is a classical problem of mathematical physics. Recently, a number of works appeared, which in many ways investigated this equation according to the type of random initial conditions. We consider a Cauchy problem for the heat equations with a random right part. We study the inhomogeneous heat equation on the plane with a random right part. We consider the right part as a random function of the Orlicz space. The conditions of existence with probability one classical solution of the problem are investigated. For such a problem has been got the estimation for the distribution of the supremum solution. Key words: stochastic processes of the Orlicz space, heat equation, estimation for the distribution of the supremum solution.

Стаття присвячена світлій пам'яті проф. Козаченко Ю.В.

1 Вступ

Рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами є класичною задачею математичної фізики. Зовсім недавно, кілька вчених досліджували розв'язок рівняння теплопровідності в залежності від різних типів випадкових умов. Роботи Н.Е. Ратанова та ін. [1], В.А. Войчінскі [2], Д. Сургайліса і В.А. Войчінскі [3] містять видатні результати по цій тематиці. Зокрема, отримані граничні теореми для рівняння теплопровідності і пов'язані з ним через Хопфа-Коула трансформації, так звані рівняння Бюргерса. В праці Ю.В. Козаченка та Г. М. Леоненко [4] досліджується задача Коші для рівняння теплопровідності, коли початкова умова є строго субгауссовим випадковим процесом. Лінійному рівнянню теплопровідності непарного порядку з випадковими початковими умовами присвячена робота Бегін І., Козаченка Ю. та ін. [5]. У роботах Козаченка Ю.В. та Вереш К. Й. [6, 7] обґрунтовано застосування методу Фур'є для однорідного параболічного рівняння з випадковими початковими умовами з простору Орліча, знайдено оцінки розподілу супремуму розв'язку однорідного рівняння теплопровідності з випадковими початковими умовами з простору Орліча, неоднорідного рівняння теплопровідності з випадковою правою частиною із просторів Орліча. У роботах Козаченка Ю.В. та Сливка-Тилищак Г.І. [8, 9, 10] знайдено достатні умови існування з імовірністю одиниця класичного розв'язку задачі Коші для рівняння теплопровідності на прямій, коли права частина є випадковим полем з простору $Sub_\varphi(\Omega)$ та простору Орліча, а також знайдено оцінки для розподілу супремуму для відповідних розв'язків.

У роботі досліджується рівняння теплопровідності на площині, коли права частина є випадковим полем з простору Орліча. Для даної задачі отримано умови існування з імовірністю одиниця класичного розв'язку та оцінки для розподілу супремуму розв'язку.

2 Випадкові процеси з простору Орліча

Означення 2.1. [11] Парна неперервна опукла функція $U(x)$ називається C-функцією Орліча, якщо $U(0) = 0$ і $U(x)$ зростає при $x > 0$.

Означення 2.2. [11] Простором Орліча $L_U(\Omega)$ випадкових величин, породженим С-функцією $U(x)$, називається такий простір випадкових величин $\xi(\omega) = \xi$, $\omega \in \Omega$, якщо для кожної $\xi \in L_U(\Omega)$ існує така константа r_ξ, що $Eu\left(\frac{\xi}{r_\xi}\right) < \infty$.

Означення 2.3. [11] Процес $X = \{X(t), t \in T\}$ належить простору Орліча $L_U(\Omega)$, якщо для всіх $t \in T$ випадкова величина $X(t)$ належить $L_U(\Omega)$.

Теорема 1. *[13] Нехай $\mathbf{R}^k$ - k-вимірний простір,*

$$d(t,s) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} |t_i - s_i|,$$

$T = \{0 \leqslant t_i \leqslant T_i, i = 1, 2, \ldots, k\}$, $X_n = \{X_n(t), t \in T\}$, $n = 1, 2, \ldots$ *- послідовність випадкових процесів, що належать простору Орліча випадкових величин, де для функції и виконується g-умова. Нехай виконуються умови:*

1) *процеси $X_n(t)$ - сепарабельні;*
2) *$X_n(t) \to X(t)$ при $n \to \infty$, $t \in T$ за ймовірністю;*
3) *$\sup\limits_{d(t,s) \leqslant h} \sup\limits_{n=\overline{1,\infty}} \|X_n(t) - X_n(s)\| \leqslant \sigma(h)$, де $\sigma = \{\sigma(h), h > 0\}$ така неперервна монотонна зростаюча функція, що $\sigma(h) \to 0$ коли $h \to 0$;*
4) *для деякого $\epsilon > 0$*

$$\int_0^\epsilon U^{(-1)}\left(\prod_{i=1}^k \left(\frac{T_i}{2\sigma^{(-1)}(u)} + 1\right)\right) du < \infty,$$

де $\sigma^{(-1)}(u)$ – функція обернена до $\sigma(u)$.

Тоді процеси $X_n(t)$ збігаються за ймовірністю в просторі $C(T)$.

Теорема 2 ([6])**.** *Нехай (T, ρ) метричний компактний простір, $N(u)$ — метрична масивність простору (T, ρ), $X = \{X(t),\ t \in T\}$ — сепарабельний випадковий процес із простору $L_U(\Omega)$, де для U виконується умова g. Нехай існує така функція $\sigma = \sigma(h)$, $0 \leqslant h \leqslant \sup\limits_{t,s \in T} \rho(t,s)$, що $\sigma(h)$ монотонно зростає, неперервна і така що*

$$\sup_{\rho(t,s) \leqslant h} \|X(t) - X(s)\|_{L_U} \leqslant \sigma(h).$$

Якщо для деякого ε виконується умова

$$\int_0^\varepsilon \chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du < \infty,$$

де

$$\chi_U(n) = \begin{cases} n, & n < U(z_0); \\ C_U U^{(-1)}(n), & n \geqslant U(z_0), \end{cases}$$

*$C_U = k(1 + U(z_0)) \max(1, A)$, z_0, k, A — константи з означення (**??**), $\sigma^{(-1)}(h)$ — функція обернена до $\sigma(h)$. Тоді з імовірністю одиниця випадкова величина $\sup\limits_{t \in T} |X(t)|$ належить простору $L_U(\Omega)$ та*

$$\left\|\sup_{t \in T} |X(t)|\right\|_U \leqslant$$

$$\|X(t_0)\|_U + \frac{1}{\theta(1-\theta)} \int_0^{\omega_0 \theta} \chi_U\left(N\left(\sigma^{(-1)}(u)\right)\right) du =$$

$$B(t_0,\ \theta),$$

де t_0 — довільна точка з T, $\omega_0 = \sigma(\sup\limits_{t \in T} \rho(t_0,\ t))$, $0 < \theta < 1$. Крім того, для будь-якого $\varepsilon > 0$ має місце нерівність

$$P\left\{\sup_{t \in T} |X(t)| > \varepsilon\right\} \leqslant \left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(t_0, \theta)}\right)\right)^{-1}.$$

3 Рівняння теплопровідності на площині з випадковою правою частиною

Розглянемо задачу Коші для рівняння теплопровідності на площині

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right) + \xi(x,y,t), \qquad (1)$$

$$-\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty, \quad t > 0,$$

з початковою умовою

$$u(x,y,0) = 0, \quad -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty, \qquad (2)$$

Нехай $\xi(x,y,t) = \{\xi(x,y,t), \quad (x,y) \in R^2, \ t > 0\}$ — вибірково неперервне з імовірністю одиниця випадкове поле з простору Орліча, таке що $\mathbb{E}\xi(x,y,t) = 0$, $\mathbb{E}(\xi(x,y,t))^2 < +\infty$. $B(x,y,t,u,v,s) = \mathbb{E}\xi(x,y,t)\xi(u,v,s)$ — коваріаційна функція випадкового процесу $\xi(x,y,\ t)$. Нехай $B(x,y,t,u,v,s)$ неперервна функція.

Теорема 3. *Нехай існують інтеграли:*

$$G(u,v,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t e^{-a^2\left(u^2+v^2\right)(t-\tau)}\tilde{\xi}(u,v,\tau)d\tau,$$

$$\tilde{\xi}(u,v,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos xu\cos yv\,\xi(x,y,\tau)dxdy,$$

і

$$u(x,y,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\cos xu\cos yv\,G(u,v,t)dudv. \qquad (3)$$

Якщо існують наступні інтеграли

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u\sin xu\cos yv\,G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v\cos xu\sin yv\,G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u^2\cos xu\cos yv\,G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v^2\cos xu\cos yv\,G(u,v,t)dudv$$

і послідовності a_n, $a_n \to \infty$, b_k, $b_k \to \infty$ при $n \to \infty$ та $k \to \infty$, такі, що для довільних $A > 0$, $B > 0$ і $T > 0$ послідовності інтегралів

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_k}^{+b_k}\cos xu\cos yv\,G(u,v,t)dudv, \qquad (4)$$

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_k}^{+b_k} u\sin xu\cos yv\,G(u,v,t)dudv, \qquad (5)$$

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_k}^{+b_k} v\cos xu\sin yv\,G(u,v,t)dudv, \qquad (6)$$

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_k}^{+b_k} u^2\cos xu\cos yv\,G(u,v,t)dudv, \qquad (7)$$

$$\int\limits_{-a_n}^{+a_n}\int\limits_{-b_k}^{+b_k} v^2\cos xu\cos yv\,G(u,v,t)dudv \qquad (8)$$

збігаються рівномірно за ймовірністю для $|x| \leqslant A$, $|y| \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$, тоді функція $u(x,y,t)$ буде класичним розв'язком задачі (1)–(2).

Доведення. Оскільки послідовності інтегралів (4)–(8) збігаються рівномірно за ймовірністю в області $|x| \leqslant A$, $|y| \leqslant B$, $0 \leqslant t \leqslant T$, то існують підпослідовності c_n, $c_n \to \infty$, d_k, $d_k \to \infty$ при $n \to \infty$ та $k \to \infty$ послідовностей a_n і b_k відповідно, такі що послідовності інтегралів

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k}\cos xu\cos yv\,G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} u\sin xu\cos yv\,G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} v\cos xu\sin yv\,G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} u^2\cos xu\cos yv\,G(u,v,t)dudv,$$

$$\int_{-c_n}^{+c_n}\int_{-d_k}^{+d_k} v^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv$$

збігаються з ймовірністю одиниця до наступних інтегралів відповідно

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u\sin xu\cos yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}v\cos xu\sin yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}v^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv$$

рівномірно для $|x|\leqslant A$, $|y|\leqslant B$, $0\leqslant t\leqslant T$.

Введемо позначення

$$u_{nk}(x,y,t)=\int_{-c_n}^{+c_n}\int_{-d_k}^{+d_k}\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv. \tag{9}$$

Диференціюючи (9) за змінними x, y та t, ми отримаємо

$$\frac{\partial u_{nk}(x,t)}{\partial t}=$$

$$-a^2\int_{-c_n}^{+c_n}\int_{-d_k}^{+d_k}(u^2+v^2)\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-c_n}^{+c_n}\int_{-d_k}^{+d_k}\cos xu\cos yv\tilde{\xi}(x,y,t)dudv,$$

$$\frac{\partial^2 u_{nk}(x,t)}{\partial x^2}=$$

$$-\int_{-c_n}^{+c_n}\int_{-d_k}^{+d_k}u^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv,$$

$$\frac{\partial^2 u_{nk}(x,t)}{\partial y^2}=$$

$$-\int_{-c_n}^{+c_n}\int_{-d_k}^{+d_k}v^2\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv.$$

Отже,

$$\frac{\partial u_{nk}(x,t)}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u_{nk}(x,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u_{nk}(x,t)}{\partial y^2}\right)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-c_n}^{+c_n}\int_{-d_k}^{+d_k}\cos xu\cos yv\tilde{\xi}(x,y,t)dudv,$$

$$t>0\ |x|\leqslant A, |y|\leqslant B.$$

Тоді при $nk\to\infty$

$\frac{\partial u_{nk}(x,y,t)}{\partial t}$ збігається до $\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}$,

$\frac{\partial^2 u_{nk}(x,y,t)}{\partial x^2}$ збігається до $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$,

$\frac{\partial^2 u_{nk}(x,y,t)}{\partial y^2}$ збігається до $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y^2}$

рівномірно для $|x|\leqslant A$, $|y|\leqslant B$, $0\leqslant t\leqslant T$ з ймовірністю одиниця. Отже, при $nk\to\infty$ ми отримаємо, що $u(x,y,t)$ задовольняє рівняння (1). $\square$

Дійсно

$$\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}=$$

$$-a^2\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(u^2+v^2)\cos xu\cos yvG(u,v,t)dudv+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos xu\cos yv\tilde{\xi}(x,y,t)dudv=$$

$$=a^2\left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}\right)+\xi(x,y,t).$$

Лема 1. *Нехай $\xi(x,y,t)$ — вибірково неперервне випадкове поле з простору Орліча із заданою коваріаційною функцією $B(x,y,t,u,v,s)$. Нехай для всіх $t>0$, $s>0$ виконуються умови:*

1) *Існують похідні* $\frac{\partial^k B(x,y,t,u,v,s)}{\partial x^l\partial u^m}$, $k=0,\dots 4$, $l+m=k$, $\frac{\partial^k B(x,y,t,u,v,s)}{\partial y^p\partial v^q}$, $k=0,\dots 4$, $p+q=k$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial^k B(x,y,t,u,v,s)}{\partial x^l\partial u^m}\right|dxdu\leqslant B(k,l,m)<\infty$, $k=0,\dots 4$, $l+m=k$, $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\frac{\partial^k B(x,y,t,u,v,s)}{\partial y^p\partial v^q}\right|dyddv\leqslant B(k,p,q)<\infty$, $k=0,\dots 4$, $p+q=k$,

3) $\frac{\partial^k B(x,y,t,u,v,s)}{\partial x^l \partial v^m} \to 0, k = 0, \dots 4,\ l+m=k,$ *при* $x \to \infty$ *або* $u \to \infty$. $\frac{\partial^k B(x,y,t,u,v,s)}{\partial y^p \partial v^q} \to 0, k=0,\dots 4,\ p+q=k,$ *при* $y \to \infty$ *або* $v \to \infty$.

Тоді з імовірністю одиниця існують інтеграли

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u \sin xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} v \cos xu \sin yv G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{\infty}^{+\infty}\int\limits_{\infty}^{+\infty} u^2 \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$\int\limits_{\infty}^{+\infty}\int\limits_{\infty}^{+\infty} v^2 \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv.$$

Доведення. Доведення леми випливає з доведення леми 2.6 роботи [9]. □

Позначимо для $n \geqslant 1$

$$u_{nk}^{(0)}(x,y,t) =$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$u_{nk}^{(1)}(x,y,t) =$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} u \sin xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$u_{nk}^{(2)}(x,y,t) =$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} v \cos xu \sin yv G(u,v,t)dudv,$$

$$u_{nk}^{(3)}(x,y,t) =$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} u^2 \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

$$u_{nk}^{(4)}(x,y,t) =$$

$$\int\limits_{-c_n}^{+c_n}\int\limits_{-d_k}^{+d_k} v^2 \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv.$$

Теорема 4. *Нехай* $\xi(x,y,t)$ *— вибірково неперервне з імовірністю одиниця випадкове поле з простору Орліча, для якого виконуються умови леми 1 і для* $j = 0,\ 1,\ 2,\ 3$

$$\sup_{\substack{|x-x_i|\leqslant h\\ y-y_i|\leqslant h\\ |t-t_1|\leqslant h}} \tau_\varphi \left(u_{nk}^{(j)}(x,y,t) - u_{nk}^{(j)}(x_1,y_1,t_1)\right) \leqslant \sigma_j(h),$$

де $\sigma_j(h)$ *— неперервні монотонно зростаючі функції, такі що* $\sigma_j(h) \to 0$ *при* $h \to 0$, *і виконується умова:*

$$\int_{0+}^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\frac{A}{\sigma_j^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{B}{\sigma_j^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma_j^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du < \infty \tag{10}$$

де $\sigma_k^{-1}(\varepsilon)$ *— обернені функції до* $\sigma_k(\varepsilon)$.

Тоді функція $u(x,y,t)$, *що зображена у вигляді (3) буде класичним розв'язком задачі (1)–(2).*

Доведення. Дана теорема випливає з теореми 1 і теореми 3. □

3.1 Оцінка розподілу супремуму розв'язку рівняння теплопровідності на площині з випадковою правою частиною з простору Орліча

Теорема 5. *Нехай в умовах теореми 2*

$$\widetilde{T} = \{(x,y,t):\ x \in [-A,A],\ y \in [-B,A],\ t \in [0,T]\},$$

$$\widetilde{\rho}(x,x_1,y,y_1t,t_1) = \max\{|x-x_1|, |y-y_1|, |t-t_1|\}.$$

Нехай

$$u(x,y,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos xu \cos yv G(u,v,t)dudv,$$

де

$$G(u,v,t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^t e^{-a^2(u^2+v^2)(t-\tau)}\tilde{\xi}(u,v,\tau)d\tau,$$

$$\tilde{\xi}(u,v,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \cos xu \cos yv \xi(x,y,\tau)dxdy,$$

є сепарабельний випадковий процес з простору $L_U(\Omega)$, *і функція* U *задовольняє* g*-умову. Нехай існує монотонно зростаюча функція* $\sigma = \sigma(h)$, $0 \leqslant h \leqslant \sup\limits_{t,s\in T} \widetilde{\rho}(x,x_1,y,y_1,t,t_1)$ *така, що*

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leqslant h\\ |y-y_1|\leqslant h\\ |t-t_1|\leqslant h}} \tau_\varphi\left(u(x,y,t)-u(x_1,y_1,t_1)\right) \leqslant \sigma_(h).$$

Якщо для деякого ε

$$\int_{0+}^{\varepsilon} U^{(-1)}\left(\left(\frac{A}{\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\times \left(\frac{B}{\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du < \infty,$$

де $\sigma^{(-1)}(h)$ *— обернена функція до* $\sigma(h)$, *то з імовірністю одиниця випадкова величина* $\sup\limits_{(x,y,t)\in\widetilde{T}} |u(x,y,t)|$ *належить простору* $L_U(\Omega)$

та

$$\left\|\sup_{(x,y,t)\in\widetilde{T}} |u(x,y,t)|\right\|_{L_U} \leqslant \|u(x_0,y_0,t_0)\|_U +$$

$$+\frac{1}{\theta(1-\theta)}\int\limits_0^{\omega_0\theta} U^{(-1)}\left(\left(\frac{A}{\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\times \left(\frac{B}{\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\times\left(\frac{T}{2\sigma^{(-1)}(u)}+1\right)\right)du =$$

$$= B(x_0,y_0,t_0,\ \theta),$$

де $(x_0,y_0,t_0)\in\widetilde{T}$, $\omega_0 = \sigma(\sup\limits_{t\in T}\rho(x_0,x,y_0,y,t_0,t))$, $0 < \theta < 1$. *Крім того для будь-якого* $\varepsilon > 0$ *має місце нерівність:*

$$P\left\{\sup_{(x,y,t)\in\widetilde{T}} |u(x,y,t)| > \varepsilon\right\} \leqslant \left(U\left(\frac{\varepsilon}{B(x_0,y_0,t_0,\theta)}\right)\right)^{-1}.$$

Список використаних джерел

1. *Ratanov N. E.* Stabilization of the statistical solution of the parabolic equation / N. E. Ratanov, A. G. Shuhov, Yu. M. Suhov // Acta Appl. Math. – 1991. – 22. – P. 103–115.

2. Woyczynski W. A. Burgers-KPZ Turbulence / W. A. Woyczynski // Lecture Notes in Math. – Springer Verlag, Berlin, Heidelberg. – 1998. – Vol. 1700.

3. Surgailis D. Limit theorems for the Burgers equation initialized by data withlong-range dependence / D. Surgailis, W. A. Woyczynski // In: DoukhanP., Oppenheim, G., Taqqu, M. S (eds.) Theory and Applications of Long-range Dependence. – Birkhausser, Boston, 2003.

4. *Kozachenko Yu. V.* Extremal behavior of the heat random field / Yu. V. Kozachenko, G. M. Leonenko // Extremes. – 2006. – 8. – P. 191–205.

5. Beghin L. On the solution of linear odd-order heat-type equations with random initial / L. Beghin, Yu. Kozachenko, E. Orsingher, L. Sakhno // Journal of Statistical Physics. – 2007. – Vol. 127, No. 4. – P. 721–739.

6. *Kozachenko Yu. V.* The heat equation with random initial conditions from Orlicz space / Yu. V. Kozachenko, K. J. Veresh // Teor. Imovirnost. Matem. Statist. – 2009. – **80**. – P. 63–75;

7. Kozachenko Yu. V. Boundary-value problem for nonhomogeneousparabolic equation with Orlicz right side / Yu. V. Kozachenko, K. J. Veresh // Random Operators and Stochastic Equations. – 2010. – №18. – P. 97–119.

8. *Kozachenko Yu. V.* The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_\varphi(\Omega)$/ Yu. V. Kozachenko, A. I. Slyvka-Tylyshchak // Applied Mathematics. – 2014. – 5. – P. 2318–2333.

9. *Kozachenko Yu. V.* The Cauchy problem for the heat equation with a random right side / Yu. V. Kozachenko, A. I. Slyvka-Tylyshchak // Random Oper. and Stoch. Equ. – 2014. – 22(1). – P. 53–64.

10. *Slyvka-Tylyshchak A. I.* The heat equation on line with random right part from Orlicz space / A. I. Slyvka-Tylyshchak // Carpatian

Mathematical Publications. – 2014. – Vol. 6, №1. – P. 134-148.

11. *Buldygin V. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes / V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko. – American Mathematical Society, Providence, Rhode. – 2000.
12. *Маркович Б. М.* Рівняння математичної фізики / Б. М. Маркович. – Львів: Видавництво Національного університету «Львівська політехніка», 2010. – 384 с.
13. *Козаченко Ю. В.* Обгрунтування методу Фур'є для гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами / Ю. В. Козаченко, Г. І. Сливка // Теорія ймов. та матем. статист. Вип. 69, – 2003. – С. 48–63.

References

1. RATANOV N. E., SHUHOV A. G., SUHOV Yu. M. (1991) "Stabilization of the statistical solution of the parabolic equation" , *Acta Appl. Math.*, **22**, pp. 103–115.
2. WOYCZYNSKI W. A.(1998) Burgers-KPZ Turbulence "Lecture Notes in Math". Springer Verlag, Berlin, Heidelberg., Vol. 1700.
3. SURGAILIAS D.,WOYCZYNSKI W. A. (2003) "Limit theorems for the Burgers equation initialized by data withlong-range dependence *Theory and Applications of Long-range Dependence*, Birkhausser, Boston.
4. KOZACHENKO Yu. V., LEONENKO G. M. (2006) " Extremal behavior of the heat random field", *Extremes*, **8**, pp. 191–205.
5. BEGHIN L., KOZACHENKO Yu. V., ORSINGHER E., SAKHNO L. (2007) "On the solution of linear odd-order heat-type equations with random initial", *Journal of Statistical Physics.*, Vol. 127, No. 4. P. 721–739.
6. KOZACHENKO Yu. V., VERESH K. J. (2009) "The heat equation with random initial conditions from Orlicz space", *Teor. Imovirnost. Matem. Statist.*, **8**, pp. 63–75.
7. KOZACHENKO Yu. V., VERESH K. J. (2010) "Boundary-value problem for nonhomogeneousparabolic equation with Orlicz right side" Random Operators and Stochastic Equations **18**., pp. 97–119.
8. KOZACHENKO Yu. V., SLYVKA-TYLYSHCHAK A. I.(2014) "The Cauchy problem for the heat equation with a random right part from the space $Sub_\varphi(\Omega)$", *Applied Mathematics*,**5**, pp. 2318–2333.
9. KOZACHENKO Yu. V., SLYVKA-TYLYSHCHAK A. I. (2014) "The Cauchy problem for the heat equation with a random right side", *Random Oper. and Stoch. Equ.*,**22(1)**, pp. 53–64.
10. SLYVKA-TYLYSHCHAK A. I. (2014) "The heat equation on line with random right part from Orlicz space", *Carpatian Mathematical Publications*, **6** no. 1., pp. 134-148.
11. BULDYGIN V. V., KOZACHENKO Yu. V. (2000) " Metric Characterization of Random Variables and Random processes", American Mathematical Society, Providence, Rhode, 285 p.
12. MARKOVICH B. M. (2010) "Equations of Mathematical Physics", Lviv: Lviv Polytechnic Publishing House, 2 384p.
13. KOZACHENKO Yu. V., SLYVKA G. I. (2003) "Justification of the Fourier method for hyperbolic equations with random initial conditions", *Theory Probab. and Mathem. Statist.*, **69**, pp. 67–83.

Надійшла до редколегії 12.10.2020