

*В. М. Шимон, М. А. Ткачук, С. П. Алфелдїй, О. В. Веретельник, В. В. Стойка*

## **ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО - ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ НИЖНЬОЇ КІНЦІВКИ У ХВОРИХ ПІСЛЯ ХІРУРГІЧНОГО ЛІКУВАННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ БІОСКЛА**

Державний вищий навчальний заклад «Ужгородський Національний Університет», Україна

**Summary.** Shymon V., Tkachuk M., Alfeldii S., Veretelnik O., Stoika V. **NUMERIC INVESTIGATION OF HUMAN'S LOW EXTREMITY STRESS-DEFORMED STATE IN PATIENTS AFTER SURGERY WITH BIOGLASS APPLICATION.** - *State Higher Education Institute "Uzhgorod National University", Ukraine; E-Mail: [v.stoyka@uzhnu.edu.ua](mailto:v.stoyka@uzhnu.edu.ua)*. In the paper presented the results of numeric investigation of the effect on the stress-deformed state of the elements of a person's leg after surgical treatment, replacement of damaged tissues after fractures or tumor with implants made of bioglass are discussed. Mathematical model of the conducted research was based on the basic relations of continuum mechanics, in conjunction with numerical methods. in the course of the study, three design groups were considered, the differences of which consisted in the size of bioglass implants, each group, consisted of four design schemes, two of which described an "intact" state and a "damaged" state, the other two the schemes described the human leg after surgical treatment of implant installation made of various types of bioglass -ac-5 and far-5, respectively. according to the results of the research, characteristics of the stress-strain state were obtained and a comparative analysis was carried out. the stress levels showed good similarity for the 1st and 2nd calculation groups, the differences were less than 1% and for the 3rd calculation group - 30%, for all the calculation schemes respectively. for the tibia, the stress levels were 16% for the 1st calculation group, 36% for the 2nd calculation group, and 56% for the 3rd calculation group, for all calculation schemes, respectively. for the femur, stress levels showed good similarity for the 1st and 2nd calculation groups, the differences were less than 1%, and for the 3rd calculation group - 30%, for all the calculation schemes, respectively. the analysis of the stresses obtained for the elements made of bioglass shows that the stresses in implants made with ac-5 higher by 40% than in implants made with far-5. thus, it can be argued for the effective use of implants made of different types of ac-5 and far-5 bioglass in surgical treatment of bone replacement in tumors and fractures.

**Key words:** stress-strain state, lower extremities, bioglass, finite element method, equivalent stresses

**Реферат.** Шимон В. М., Ткачук Н. А., Алфелдїй С.П., Веретельник О.В., Стойка В.В. **ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НИЖНЕЙ КОНЕЧНОСТИ У БОЛЬНЫХ ПОСЛЕ ХИРУРГИЧЕСКОГО ЛЕЧЕНИЯ С ПРИМЕНЕНИЕМ БИОСТЕКЛА.**

В работе представлены результаты численного исследования влияния на напряженно-деформированное состояние элементов нижней конечности человека после проведения оперативного лечения, замены поврежденных тканей при переломах и опухолях имплантатами, изготовленными из биостекла. Математическая модель проведенных исследований базировалась на основных соотношениях механики сплошной среды в сочетании с численными методами. В ходе исследования рассматривались три расчетные группы, которые отличались размерами имплантатов из биостекла. Каждая группа состояла из четырех расчетных схем, две из которых описывали «интактное» состояние и «поврежденное», две другие расчетные схемы описывали ногу человека после оперативного лечения по установке имплантов, изготовленных из различных типов биостекла: АС-5 и FAR-5, соответственно. В результате исследований были получены характеристики напряженно-деформированного состояния и проведен сравнительный анализ.

**Ключевые слова:** напружено-деформированное состояние, нижняя конечность, биостекло, метод конечных элементов, эквивалентные напряжения

Реферат. Шимон В. М., Ткачук М. А., Алфелдїй С.П., Веретельник О.В., Стойка В. В.  
**ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ НАПРУЖЕНО - ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ НИЖНЬОЇ КІНЦІВКИ У ХВОРИХ ПІСЛЯ ХІРУРГІЧНОГО ЛІКУВАННЯ ІЗ ЗАСТОСУВАННЯМ БІОСКЛА.**

У роботі пропонуються результати чисельного дослідження впливу на напружено-деформований стан елементів нижньої кінцівки людини після проведення оперативного лікування, заміни пошкоджених тканин при переломах та пухлинах імплантатами, що виготовлені з біоскла. Математична модель досліджень, що проведеної застосовує основні співвідношення механіки суцільного середовища у зв'язі з чисельними методами. В ході дослідження розглядалися три розрахункові групи, відмінності яких полягали у розмірах імплантату з біоскла, кожна група складалася з чотирьох розрахункових схем, дві з яких описували «інтактний» стан та «пошкоджену», інші дві розрахункові схеми описували нижню кінцівку людини після хірургічного лікування з установки імплантатів виготовлених з різних типів біоскла АС-5 та FAR-5, відповідно. За підсумками досліджень були отримані характеристики напружено-деформованого стану та проведено порівняльний аналіз.

**Ключови слова:** напружено-деформований стан, нижня кінцівка, біоскло, метод скінченних елементів, еквівалентні напруження

**Вступ.** Сучасна медицина досить широко використовує штучні імплантати для заміщення пошкоджених тканин у результаті різних захворювань. Так, при різних захворюваннях кісткових тканин, наприклад, пухлини чи переломи, використовуються різні матеріали. Одним з таких матеріалів є біоскло. У роботі пропонується дослідження правої нижньої кінцівки людини з декількома осередками поразки кісткових тканин.

Дане дослідження було проведено за допомогою методу скінченних елементів, так як даний метод дає можливість розглядати складні тривимірні геометричні моделі. А також суттєвою перевагою використання даного методу [1] є те, що у випадках, коли важко або неможливо зробити клінічний аналіз проблематики по використанню спеціальних технічних медичних засобів (імплантатів), які використовуються для відновлення цілісності кісткових тканин, а також етичні причини – варіювання параметрів імплантатів в природних умовах. Неможливість проведення експериментальних досліджень: аналіз багатьох різних параметрів вимагає виробництва багатьох прототипів і може бути дуже дорогим. Граничні умови, такі як м'язові сили, які не можуть бути реалізовані в експериментальній установці, а експериментальні дослідження на зразку людини можуть не відтворюватися через зміни біологічних властивостей. Ще одним фактором є те, що результати клінічного або експериментального дослідження не можуть бути інтерпретовані. У свою чергу, чисельна модель може допомогти в інтерпретації клінічних та експериментальних результатів.

Таким чином, використання методу скінченних елементів для аналізу напружено-деформованого стану досліджуваних біологічних і біомеханічних систем є найбільш ефективним рішенням.

Як було зазначено вище, метод скінченних елементів часто використовується при розробці імплантатів, допомагаючи вирішити невирішені питання, пов'язані з клінічними дослідженнями. В даний час публікуються різні підходи до створення моделей з'єднання «імплантат-кістка» [2-6].

В області моделювання та проектування, структури в біомеханіки не створені людиною, а мають біологічне походження. Отже, при аналізі кістки не існує точно визначених геометричних примітивів, а є специфічна для пацієнта морфологія, яка сильно неоднорідна і змінюється протягом життя в залежності від фізіологічних навантажень, стану здоров'я, віку і харчування.

Одним з найбільш важливих аспектів біомеханічних систем є їх геометрична складність, яка значно ускладнює створення точних моделей. Класичні моделі страждали від цього недоліку – геометричній точності, присутнього навіть в недавніх моделях [7, 8],

що ставило під сумнів в більшості досліджень достовірність результатів і їх екстраполяцію в клінічні умови.

Сучасні методи візуалізації, такі як комп'ютерна томографія (КТ) та магнітно-резонансна томографія (МРТ), дозволяють реконструювати біологічні структури для подальшого скінченно-елементного аналізу. Тривимірна реконструкція є основою для представленого підходу. З іншого боку, імплантати, які підлягають аналізу в скінченно-елементних моделях, можуть бути спроектовані з використанням програмного забезпечення CAD, наприклад, таких як Solidworks [9].

В процесі моделювання була відновлена геометрична модель по КТ знімках, без патологічних структурних змін. В процесі моделювання були виділені області, які описують пошкоджені тканини. Моделювання пошкоджених тканин здійснювалося зменшенням початкових показників фізико-механічних властивостей кісткових тканин. Аналогічним чином моделювалася установка елементів із біоскла.

Побудова тривимірної геометричної моделі виконувалося в системі автоматизованого проектування Solidworks [9]. Після створення геометричної моделі вона була імпортована в програмний комплекс Workbench [10]. Даний програмний комплекс призначений для проведення досліджень напружено-деформованого стану використовуючи методи механіки суцільного середовища в поєднанні з чисельними методами рішення.

Після імпортування моделі в програмному комплексі Workbench на основі тривимірної геометричної моделі була створена скінченно-елементна модель, визначені фізико-механічні властивості матеріалів, прикладені зовнішні граничні умови. А також проведені подальші дослідження, що дають змогу визначити компоненти напружено-деформованого стану.

В рамках проведення даного дослідження матеріали вважалися однорідними і ізотропним.

Проведені дослідження були реалізовані на підставі договору про спільну роботу між Ужгородським національним університетом та центром комп'ютерного моделювання "Тензор" Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут", який оснащений комп'ютерним кластером "ПОЛІТЕХНІК-125".

**Мета роботи:** розробити методи та здійснити дослідження змін напружено-деформованого стану елементів правої нижньої кінцівки після проведення оперативного лікування для **ПОСЛЕДУЮЩЕЙ** заміни пошкоджених костних тканин ураджених остіємилітом імплантатами, що виготовлені з біоскла.

Теоретичні основи математичного опису. Основні співвідношення механіки суцільного середовища для опису напружено-деформованого стану біологічних і біомеханічних систем. Проведення досліджень напружено-деформованого стану біологічних і біомеханічних систем ґрунтується на рівняннях теорії пружності.

Як відомо, для визначення компонентів напружено-деформованого стану теорія пружності в своєму розпорядженні має три групи рівнянь. Дані групи рівнянь включають в себе: геометричні (відомі як співвідношення Коші), фізичні (відомі як закон Гука) і статичні співвідношення.

За допомогою геометричних співвідношень, за відомими функціями переміщення можна визначити компоненти деформації, що у свою чергу за допомогою фізичних співвідношень можна визначити компоненти тензора напружень.

Функції переміщення за трьома просторовими координатами можна представити в наступному вигляді:  $u = u(x, y, z)$ ,  $v = v(x, y, z)$ ,  $w = w(x, y, z)$ .

Як було зазначено вище, геометричні співвідношення пов'язують переміщення з деформаціями у вигляді шести співвідношень вигляду:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.\end{aligned}\quad (1)$$

Закон Гука визначає зв'язок напружень з деформації, який представлений наступними шістьма співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y - \nu\sigma_z), \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_z - \nu\sigma_x), \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \nu\sigma_x - \nu\sigma_y), \gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx}, \end{aligned} \quad (2)$$

де  $E$  – поздовжній модуль пружності матеріалу (ще відомий як модуль Юнга – характеризує здатність твердого тіла (матеріалу, речовини) пружно деформуватися під дією сили),  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона (величина відносини відносного поперечного стиску до відносного поздовжнього розтягування, цей коефіцієнт залежить не від розмірів тіла, а від природи матеріалу, з якого виготовлений зразок, може бути вказаний в відносних одиницях).

Коефіцієнт Пуассона і модуль Юнга повністю характеризують пружні властивості ізотропного матеріалу [11].

До статичних співвідношень відносяться диференціальні рівняння рівноваги:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + R_x &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + R_y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + R_z &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Таким чином, компоненти напружено-деформованого стану для скінченного елемента, які утворені шляхом розбиття досліджуваної геометричної моделі, можна описати через геометричні, фізичні і статичні співвідношення [12, 13]. За допомогою основних співвідношень методу скінченних елементів можна отримати загальну картину напружено-деформованого стану для всієї досліджуваної моделі.

Згідно із загальними положеннями даного методу [12-16] досліджувана модель біологічних і біомеханічних систем розбивається на скінченне число дискретних елементів, які пов'язані між собою вузлами. В даних вузлах визначаються величини функції  $u$  (ще відомі як вузлові переміщення). При цьому, величина в рамках одного дискретного елемента визначається за допомогою апарату інтерполяції по відомим функціям форми  $\alpha_i$ :

$$u = \sum \alpha_i u_i. \quad (4)$$

За допомогою матриці жорсткості  $[k]^e$  можна записати зв'язок вузлових зусиль  $\{R\}^e$  і вузлових переміщень  $\{u\}^e$  в наступному вигляді:

$$\{R\}^e = [k]^e \{u\}^e. \quad (5)$$

За допомогою принципу віртуальної роботи напружено-деформований стан скінченного елемента можна представити з диференціальних рівнянь в наступному вигляді [16]:

$$\{\delta u\}^T \{R\} - \iiint_V \{\delta \varepsilon\}^T \{\sigma\} dV = 0, \quad (6)$$

де:  $\{u\}$  – вектор вузлових переміщень,  $\{R\}$  – вектор вузлових зусиль,  $\{\varepsilon\}$  – вектор вузлових деформацій,  $\{\sigma\}$  – вектор вузлових напружень,  $V$  – об'єм елемента.

Зв'язок між переміщеннями і деформаціями, а також деформаціями і напруженнями має такий вигляд:



$$\{\varepsilon\} = [B]\{u\}, \quad (7)$$

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\}, \quad (8)$$

де:  $[B]$  – матриця диференціювання переміщень,  $[D]$  – матриця властивостей матеріалу.

На основі співвідношень теорії пружності [17, 18] матриця жорсткості дискретного елемента (5) визначається геометричними (1) і фізичними (2) співвідношеннями.

Провівши підсумовування векторів  $\{R\}^e$  і матриць  $[k]^e$  всіх дискретних елементів і беручи до уваги граничні умови, завдання зводиться до відшукування рішення системи лінійних рівнянь за допомогою різних чисельних методів (кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих значень у вузлах, на яких знаходиться рішення початкової системи, прямо пропорційна кількості елементів і обмежується тільки апаратними можливостями комп'ютерної техніки):

$$[K]\{u\} = \{R\}. \quad (9)$$

Метод скінченних елементів, поєднав у собі універсальність, високу ступінь формалізації і алгоритмізації, а також дав можливість автоматизації обчислювального процесу. Метод скінченних елементів є одним з найбільш поширених методів для проведення інженерних досліджень. За допомогою даного методу можна досліджувати системи будь-якої складності. Популярність методу скінченних елементів забезпечена його результативністю і можливістю вирішення широкого спектра завдань.

#### Чисельні дослідження напружено-деформованого стану нижньої кінцівки.

Для проведення досліджень були створені геометричні моделі, які описували праву ногу людини, з виділеними областями ураженими захворюваннями (рисунок 1). Як було викладено вище, у разі проведення оперативного лікування проводиться заміщення уражених тканин імплантатами виготовлених з біоскла. В роботі було промодельовані різні області заміщення пошкоджених тканин імплантатами з біоскла. На рисунку 2 представлена геометрична модель з виділеними областями заміщення пошкоджених тканин, відповідні області промарковані латинськими буквами А, В, С, D, Е.



Рис. 1.

Геометрична  
модель

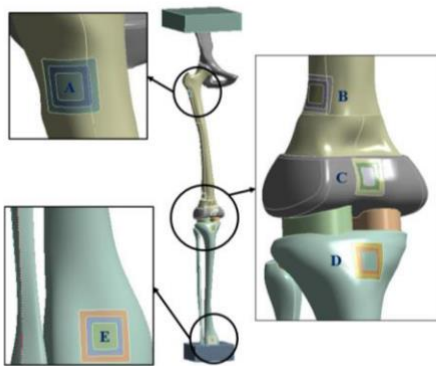


Рис. 2. Геометрична модель з виділеними областями заміщення тканин

В роботі розглянуто три типорозміри елементів з біоскла, які застосовуються для заміщення пошкоджених тканин, дані елементи виготовляються у вигляді дисків, з подальшою обробкою зовнішньої поверхні під профіль кістки. На рисунку 3 представлена схема заготовки елемента з біоскла, у таблиці 1 представлені розміри елементів виготовлених з біоскла.

На рисунку 4 представлена досліджувана область на прикладі області А.

## Габаритні розміри елемента з біоскла

	h, мм	r, мм
1 розрахункова група	10	5
2 розрахункова група	15	7,5
3 розрахункова група	20	10

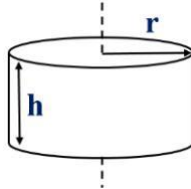


Рис. 3. Схема елемента заготовки з біоскла

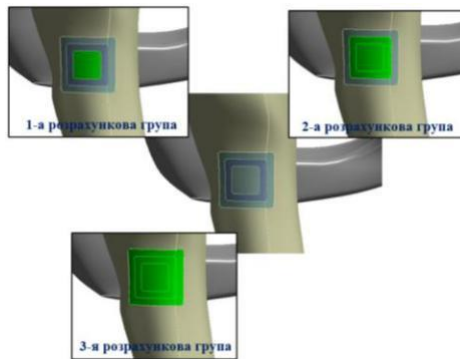


Рис. 4. Досліджувана область (на прикладі області А)

При моделюванні оперативного лікування із заміщення пошкоджених тканин було побудовано три розрахункові групи, відмінності яких полягали в розмірах елемента з біоскла. При цьому, кожна група включає чотири розрахункові схеми які описують різний стан кістки: інтактний стан, пошкоджений, після проведення оперативного втручання при використанні двох типів біоскла АС-5 та FAR-5 (див. таблицю 2). У таблиці 3 представлені фізико-механічні властивості матеріалів біологічних (БС) і біомеханічних систем (БМС).

Таблиця 2

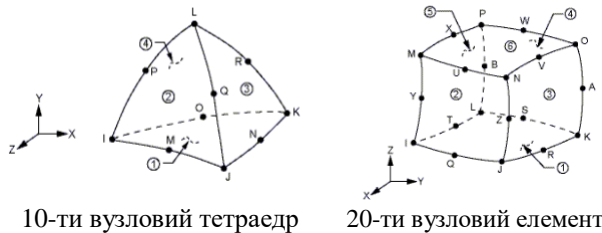
## Розрахункові схеми

№ розрахункової схеми	
1 розрахункова схема	«Інтактна»
2 розрахункова схема	«Пошкоджена»
3 розрахункова схема	АС-5
4 розрахункова схема	FAR-5

## Фізико-механічні властивості матеріалів БС і БМС

№ розрах. Схеми	Костна тканина	Модуль пружності Па	Коеф. Пуассона
1 розрах. Схеми	Кортикальна тканина	$1 \cdot 10^{10}$	0,3
	Губчата тканина	$4,5 \cdot 10^8$	0,2
2 розрах. Схеми	Кортикальна тканина	$5 \cdot 10^9$	0,3
	Губчата тканина	$2,25 \cdot 10^8$	0,2
3 розрах. Схеми	-	$1,5 \cdot 10^8$	0,22
4 розрах. Схеми	-	$0,9 \cdot 10^8$	0,22

При побудові скінченно-елементних моделей використовувалися скінченні елементи різного типу. Це 10-ти вузловий тетраедр (SOLID187) і 20-ти вузловий кубічний елемент (SOLID186). Застосування різних типів елементів дає можливість отримати якісну скінченно-елементну модель, яка описує складну геометричну форму елементів біологічних систем. Так за допомогою кубічного елемента можна розбити більш прості елементи досліджуваної системи, за допомогою тетраедра – більш складні елементи системи. Таким чином, утворена комбінована скінченно-елементна модель дає можливість отримати вищу апроксимацію з найменшою похибкою. На рисунку 5 представлені структурні схеми використовуваних елементів.



10-ти вузловий тетраедр

20-ти вузловий елемент

Рис. 5. Структурна схема елементів

Побудовані скінченно-елементні моделі налічували близько 340 тис. елементів. На рисунку 6 представлені області скінченно-елементної моделі в місцях заміщення пошкоджених тканин біоскломом.

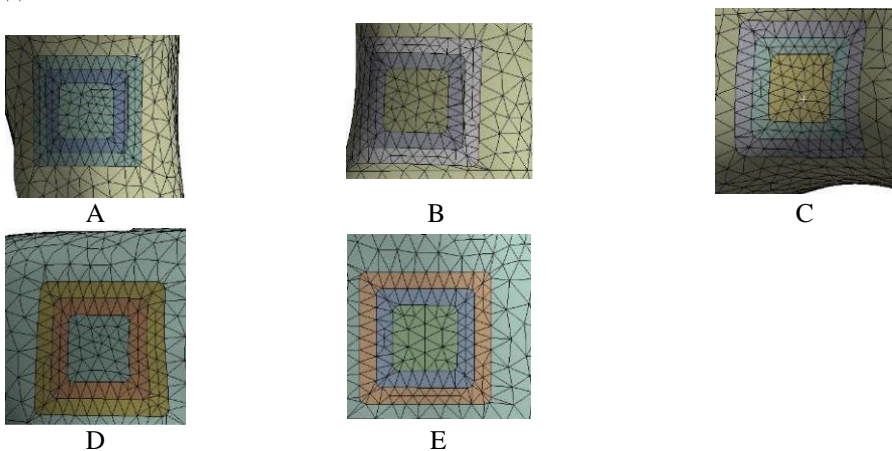


Рис. 6. Области скінченно-елементної моделі



На рисунку 7 представлені схеми навантаження і закріплення, а також додаткові умови, які накладаються на модель у вигляді додаткових переміщень які додаються до елемента «верхня опора». Сила, яка забезпечує навантаження досліджуваних систем дорівнює 500Н та прикладається до елемента «верхня опора».

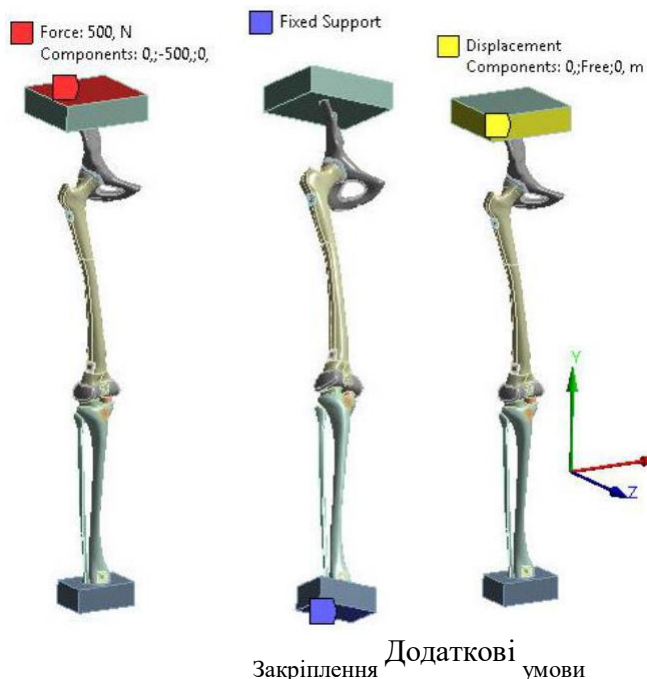


Рис. 7. Схеми навантаження, закріплення і додаткові умови

### Висновки

1. Створено параметричну модель, яка описує результат хірургічного втручання із заміщенням пошкоджених тканин елементами, які виготовлені з різних типів біоскла;
2. З аналізу отриманих значень напружень в стегнової кістки видно, що рівні напруження показали хорошу схожість для 1-ї та 2-ї розрахункових груп, відмінності склали менше 1%, а для 3-ї розрахункової групи – 30%, для всіх розрахункових схем відповідно;
3. З аналізу отриманих значень напружень в великогомілкової кістки видно, що рівні напружень для 1-ї розрахункової групи склали 16%, для 2-ї розрахункової групи – 36%, а для 3-ї розрахункової групи – 56%, для всіх розрахункових схем відповідно;
4. З аналізу отриманих максимальних значень еквівалентних напружень отриманих для всіх розрахункових груп видно, що вони не перевищують максимальних допустимих, так як для кортикальної кістки вони складають 160 МПа [19];
5. З аналізу отриманих напружень для елементів виконані з біоскла видно, що напруження в імплантатах виконаних з АС-5 вище на 40%, ніж в імплантатах виконаних з FAR-5;
6. Розгляд отриманих значень повних переміщень для всіх розрахункових груп та відповідних схем, показали хорошу схожість, істотно менше 1%.

Таким чином, за підсумками проведених досліджень можна зробити наступні висновки, які свідчать за ефективне використання імплантатів виконаних з різних типів біоскла АС-5 і FAR-5 при оперативному лікуванні із заміщення пошкоджених тканин при пухлинах та переломах.

### Література/References:

1. [https://www.researchgate.net/publication/221909127\\_Finite\\_Element\\_Analysis\\_in\\_Orthopaedic\\_Biomechanics](https://www.researchgate.net/publication/221909127_Finite_Element_Analysis_in_Orthopaedic_Biomechanics)

2. Spears, I. R., M. Pfeleiderer, et al. (2001). The effect of interfacial parameters on cup-bone relative micromotions. A finite element investigation. *J Biomech* 34(1): 113-20.
3. Thompson, M. S., M. D. Northmore-Ball, et al. (2002). Effects of acetabular resurfacing component material and fixation on the strain distribution in the pelvis. *Proc Inst Mech Eng [H]* 216(4): 237-45.
4. Kaku, N., H. Tsumura, et al. (2004). Biomechanical study of load transfer of the pubic ramus due to pelvic inclination after hip joint surgery using a three-dimensional finite element model. *J Orthop Sci* 9(3): 264-9.
5. Oki, H., M. Ando, et al. (2004). Relation between vertical orientation and stability of acetabular component in the dysplastic hip simulated by nonlinear three-dimensional finite element method. *Artif Organs* 28(11): 1050-4.
6. Manley, M. T., K. L. Ong, et al. (2006). The potential for bone loss in acetabular structures following THA. *Clin Orthop Relat Res* 453: 246-53.
7. Guan Y, Yoganandan N, Zhang J, Pintar FA, Cusick JF, Wolfla CE, Maiman DJ. Validation of a clinical finite element model of the human lumbosacral spine. *Med Biol Eng Comput.* 2006;44:633–641.
8. Little JP, Adam CJ, Evans JH, Pettet GJ, Percy MJ. Nonlinear finite element analysis of anular lesions in the L4/5 intervertebral disc. *J Biomech.* 2007;40:2744–2751.
9. Solidworks - <http://www.solidworks.com/>.
10. Workbench - <http://www.ansys.com/>.
11. Sivuhin D. V. Obschiy kurs fiziki. — M.: Fizmatlit, 2005. — T. I. Mehanika. — S. 414. — 560 s.
12. Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., Zhu J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals.* - Amsterdam ; Heidelberg: Butterworth-Heinemann. – 2006. – 631 p.
13. Obratsov I.F., Savelev L.M., Hazanov H.S., *Metod konechnykh elementov v zadachah stroitel'noy mehaniki letatel'nykh apparatov: Ucheb. posobie dlya studentov i viats. spets. vuzov.*— M.: Vyssh. shk., 1985.— 392 s., il.
14. Zenkevich O. *Metod konechnykh elementov v tehni-ke.* —M.: Mir, 1975. - 382 s.
15. Segerlind L. *Primenenie metoda konechnykh elementov.* — M.: Mir, 1979, -388 s.
16. Morozov E.M. Nikishkov G.P. *Metod konechnykh elementov v mehanike razrusheniya.* — M.: Nauka, 1980.—256 s.
17. Vasidzu K. *Variatsionnyye metody v teorii uprugosti i plastichnosti.* — M:Mir, 1987. — 542 s.
18. Timoshenko S.P., Guder Dzh. *Teoriya uprugosti.* —M.: Nauka, 1979. — 560 s.
19. I.V. Boyko, A.V. Sabsay, V.B. Makarov, O.V. Ra-dzhabov. *Matematicheskoe modelirovaniye napryazhen-no-deformirovannogo sostoyaniya sistemy «kost-implantat» pri mezhvertel'nom perelome bedren-noy kosti / VIsnik SevNTU: zb. nauk. pr. Vip. 133/2012. SerIya: Mehanika, energetika, ekologiya.* — Sevastopol, 2012. — s. 355-360.

Робота надійшла до редакції 22.07.2019 р.  
Рекомендована до друку на засіданні редакційної колегії після рецензування.