УДК 621.391

ИНФОРМАЦИОННЫЙ ПОДХОД К СИНТЕЗУ АЛГОРИТМОВ МИНИМАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ

к.т.н. В.Е. Саваневич
(представил д.т.н., проф.В.П. Деденок)

Вводится информационный показатель сложности статистических алгоритмов. На его основе предлагается методика синтеза наименее сложных алгоритмов с заданным качеством функционирования.

Для современных информационных систем (ИС) характерны растущее многообразие вариантов целевой обстановки, возрастающие требования к качеству принимаемых решений, усложняющиеся условия наблюдения и ограниченность ресурсов. Все это существенно повышает актуальность задачи разработки ИС с заданным качеством принимаемых решений при наименьших затратах **Z**:

$$\mathbf{Z} - \beta\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{min}, \qquad (1)$$

где **R** – средний риск, β - неопределенный множитель Лагранжа, выбираемый исходя из требуемого значения среднего риска $\mathbf{R}^*$.

Минимизация функционала (1) для большинства современных и перспективных ИС является чрезвычайно сложной задачей. Вместе с тем развитие информационных технологий привело к повышению роли систем, оперирующих исключительно потоками сообщений о результатах проведенных экспериментов. В подобных системах затраты делятся на вычислительные и связанные с доступом к той или иной информации. В дальнейшем информационными будут называться именно такие системы. Затраты в таких системах называют сложностью алгоритма их функционирования [1].

При наличии результатов эксперимента минимально возможная сложность обработки эквивалентна энтропии пространства наблюдений (ПН) $\mathbf{H_Y}$. Последняя является нижней границей минимальной средней длины бинарной программы (кода) определения положения конкретной выборки в ПН [2]. Именно поэтому энтропию ПН можно считать сложностью алгоритма [3].

Для того, чтобы средние потери не превышали заданных $\mathbf{R}^*$**,** между (рис.1) пространствами состояний (ПС) и решений (ПР) должно быть в среднем не менее $\mathbf{I^*_{XY}}$ взаимной информации [2, 4]. Минимальное значение данной величины называется $\varepsilon(\mathbf{R}^*)$ - энтропией и определяется выражением

$$\mathbf{I}^*_{XU} = \sum_x \mathbf{P}_x \mathbf{I}^*_{xU}\,, \tag{2}$$

где $\mathbf{P}_x$ – априорная вероятность состояния x;

$\mathbf{I}^*_{xU}$ – требуемое количество средней взаимной информации (СВИ) между конкретным состоянием **x** и ПР **U**.

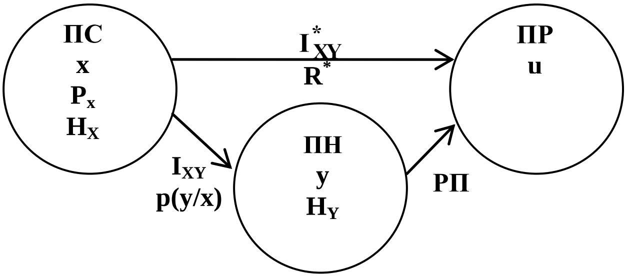


Рис. 1. Связь ПС, ПН и ПР в процессе статистических решений

Верхней границей $\mathbf{I}^*_{XY}$ является энтропия (многообразие) ПС $\mathbf{H}_X$ в общем и целевая обстановка в частном случае. Тем самым можно утверждать, что в данном контексте энтропия ПС является сложностью ПС в общем и целевой обстановки в частности. Анализ статистических задач подтверждает согласованность такого количественного определения сложности ПС с представлениями о том, что:

- многоальтернативная обстановка сложнее двухальтернативной;
- обнаружение движущейся цели сложнее обнаружения неподвижной;
- знание модели движения цели упрощает ее обнаружение;
- априорные данные о параметрах объектов упрощают оценку целевой обстановки.

Так как связь пространств состояний и решений осуществляется через ПН (рис. 1), то поставленную ранее задачу можно интерпретировать как задачу нахождения такого пространства наблюдений и такого решающего правила (РП), которые обеспечивают среднюю взаимную информацию между ПС и ПР не меньшую, чем $\mathbf{I}^*_{XY}$ в пропорциях, определенных выражением (2) при наименьшей из возможных энтропии ПН

$$\mathbf{H}_Y - \sum_x \beta_x \mathbf{I}_{xU} \to \mathbf{min}\,. \tag{3}$$

Вычисление реального значения $\mathbf{I}^*_{XY}$ невозможно без синтеза решающего правила и является не простой задачей. Вместе с тем, для обеспечения требуемой СВИ между ПС и ПР необходимо наличие уже в пространстве наблюдений не менее чем $\mathbf{I}^*_{\mathbf{XY}}$ информации с качественным ее составом, определяемым выражением (2).

Известно, что при проверке гипотез даже оптимальное решение крайне редко является достаточной статистикой. Кроме того, никакое преобразование, в том числе РП, не увеличивает количество информации. Следовательно, информация между ПС и ПН $\mathbf{I_{XY}}$ должна превосходить $\mathbf{R}^*$ - энтропию $\mathbf{I}^*_{\mathbf{XY}}$ на величину потерь $\boldsymbol{\delta}_{\mathbf{X}}$. Величина потерь определяется видом и параметрами апостериорного распределения, а также требованиями к качеству решения. Однако, существуют достаточно точные оценки верхней границы данных потерь [5]. При этом потери тем больше, чем меньше информации о состоянии содержится в выборке. В асимптотическом случае – в смысле приближения I_{XY} к ее верхней границе (энтропии ПС $\mathbf{H_X}$) – потери стремятся к нулю.

Высокие требования к качеству принимаемых решений в современных ИС приводят к необходимости их практической работы ИС в асимптотическом случае ($\mathbf{I_{XY}} \rightarrow \mathbf{H_X}$). Последнее позволяет оптимизационную задачу (3) свести к более простому ее двухэтапному варианту. На первом этапе выбирается ПН, обладающее требуемым количеством информации и имеющее наименьшую из возможных энтропию

$$\mathbf{H_Y} - \sum_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{x}}(\mathbf{I_{xY}} + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}}) \rightarrow \mathbf{min}, \tag{4}$$

где $\mathbf{I_{xY}} + \boldsymbol{\delta}_{\mathbf{x}} \approx \mathbf{I_{XU}}$.

На втором этапе осуществляется синтез РП над уже заданным ПН [6].

Существует целый ряд подходов к решению задачи (4). Их суть сводится к пошаговому выбору места (точки или области в ПН), типа и параметров эксперимента по извлечению очередной порции входных данных (вплоть до бита – побитная обработка), доставляющих максимум приращению СВИ $\mathbf{I_{XY}}$ отнесенному к энтропии ПН $\mathbf{H_Y}$. Так при отнесении очередного наблюдения к одной из $\mathbf{M}$ траекторий с помощью иерархической процедуры классификации (идентификации) каждый раз в качестве очередного бинарного эксперимента будет выступать гиперплоскость с параметрами (рис. 2), доставляющими максимальное ($\mathbf{\Delta I_{max} = 1}$) приращение $\mathbf{I_{XY}}$ при увеличении энтропии (сложности) ПН на $\mathbf{\Delta H}$ ($\mathbf{\Delta H_{max}=1}$). На рис. 2 окружности $\mathbf{H_i}$ соответствует область возможного наличия измерения от $\mathbf{i}$ - го объекта.

В общем же случае при использовании дискретного пространства наблюдений, что характерно для ИС, решение оптимизационной задачи (4) сводится к последовательному расширению ПН за счет разбиения на каждом шаге одной из его точек (дискет, интервалов, областей). Операция разбиения физически соответствует проведению нового эксперимента или уточнению результатов уже проведенного. Расширение ПН осуществляется от пустого множества до достижения асимптотически экстремального ПН. При этом на очередном шаге разбиения используется экстремальная точка ПН, обеспечивающая максимальное приращение в общем случае функционала $\sum_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\beta}_{\mathbf{x}} \mathbf{I}_{\mathbf{xY}}$.

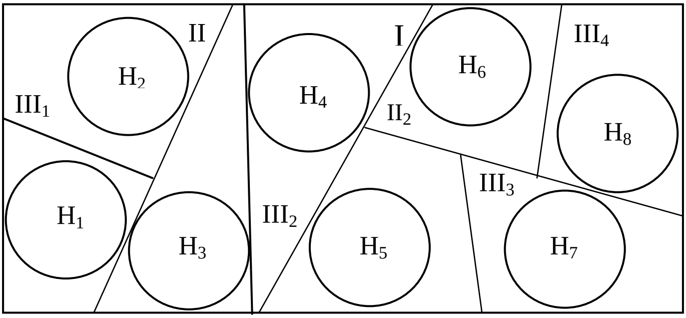


Рис. 2. РП I, II и III этапов иерархической процедуры отнесения наблюдения к одному из 8 объектов

В частном случае последний функционал может быть заменен более простым его аналогом

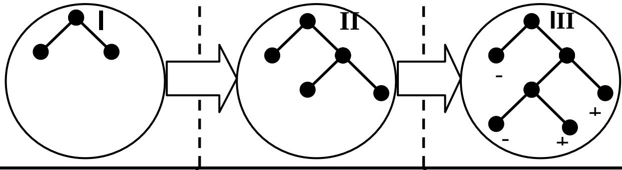
$$\Delta \mathbf{I}_{\mathbf{XY}} \to \mathbf{max}. \tag{5}$$

По достижению асимптотического случая результат каждого шага оптимизации будет почти всегда давать наилучшее в рамках оптимизационной задачи (4) и иногда [7] близкое к таковому пространство наблюдений (при соответствующей этому шагу энтропии ПН). Пример синтеза ПН последовательного обнаружителя объекта по бинарно - квантованным сигналам приведен на рис. 3. Результат синтеза РП **N** - усеченной (**N = 3**) последовательной процедуры совпадает с аналогичной процедурой, полученной в рамках последовательного анализа [8]. Вместе с тем, для его достижения не потребовалось ни вывода аналитических зависимостей, ни решения нелинейных уравнений и т.д.

Следует отметить, что существует алгоритм решения (4), основанный на сужении аналогичным образом ПН. Последний является более громоздким и всегда в асимптотическом случае [7, 9] дает наилучшее решение.

Таким образом, синтез ИС с заданным качеством решений и наименьшей сложностью (энтропией входных воздействий $\mathbf{H}_{\mathbf{Y}}$) их принятия осуществляется путем выбора асимптотически экстремального (4) ПН и последующего синтеза над ним оптимального РП. В свою очередь методика выбора экстремального ПН сводится к двум этапам.

На первом этапе определяется значение минимально необходимой СВИ между ПС и ПР, ее качественный состав (2) и возможные потери при переходе от апостериорных вероятностей к решению методами определения $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{R}^*)$ – энтропии [2, 4]. Исходными данными для этого являются заданные структуры ПС и ПР, априорные распределения вероятностей состояний $\mathbf{P}_x$ и требуемое качество принимаемых решений $\mathbf{R}^*$.



I_{0Y}	0,531	0,710	0,757
I_{1Y}	0,531	0,563	0,611
I_{0U}	0,208	0,591	0,644
I_{1U}	0,135	0,499	0,579
D*	0,45	0,85	0,894

Рис. 3. Синтез обнаружителя объекта по бинарно - квантованным сигналам ($\mathbf{F} = \mathbf{0,1}$; $\mathbf{D} = \mathbf{0,9}$) с заданной условной вероятностью ложной тревоги $\mathbf{F}_{зад} = \mathbf{10^{-2}}$

На втором этапе осуществляется непосредственный выбор экстремального ПН путем последовательного решения дискретных оптимизационных задач (5) любыми удобными при решении конкретной задачи методами. Можно привести большое количество примеров, демонстрирующих преимущества алгоритмов с наименьшей сложностью (наименьшим разнообразием входных воздействий). Так на рис. 4 приведен график сложности классической (кривая 1) и обладающей минимальной сложностью иерархической (кривая 2) процедуры **M** - аль-

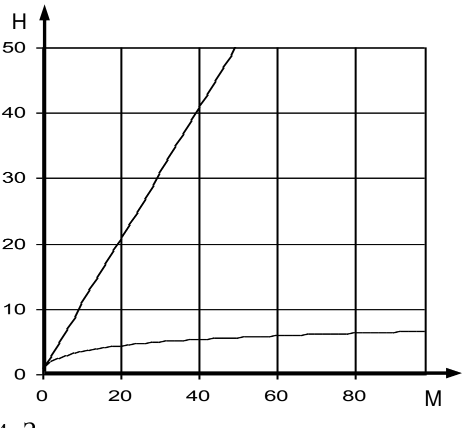


Рис. 4. Зависимость сложности алгоритмов от числа гипотез M

тернативной классификации. При этом сложность в обоих случаях эквивалентна и энтропии ПН и числу проверяемых гипотез.

Автор надеется, что предложенная методика, прежде всего в системах обработки локационной информации, позволит сделать более целенаправленным и наглядным формальное введение иерархических, многоэтапных процедур обработки локационной информации, а также дискретизации как пространства наблюдений, так и пространства решений. Предложенная методика позволит оптимизировать параметры этих процедур с учетом конкретных условий обстановки.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кузнецов О.П., Адельсон - Вельский Т.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 1988. – 480 с.
2. Стратонович Р.Л. Теория информации. – М.: Сов. радио, 1975. – 424 с.
3. Колмогоров А.Н. Теория информации и теория алгоритмов. – М.: Наука, 1987. – 304 с.
4. Колесник В.Д., Полтырев Г.Ш. Курс теории информации. – М.: Наука, 1982. – 416 с.
5. Ковалевский В.А. Методы оптимальных решений в распознавании изображений. – М.: Наука, 1976. – 328 с.
6. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. – М.: Радио и связь, 1989. – 656 с.
7. Пархоменко П.П. Теория вопросников // Автоматика и телемеханика. – 1970. – № 4. – С. 140 – 159.
8. Тартаковский А.Г. Последовательные методы в теории информационных систем. – М.: Радио и связь, 1991. – 270 с.
9. Прикладная статистика: Классификация и снижение размерности / Под ред. С.А. Айвазяна. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.

Поступила в редколлегию 10.07.2000