Міністерство освіти і науки України
Ужгородський національний університет

К. В. Маринець

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

з курсу "Диференціальні рівняння"

Частина I

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ ТА МЕТОДИ ЇХ ІНТЕГРУВАННЯ

Ужгород—2015

УДК 517.9 (075.8)

ББК В161.6я73–1

Навчальний посібник є довідниковим посібником з основ теорії звичайних диференціальних рівнянь першого порядку. Розглянуто основні типи диференціальних рівнянь першого порядку та методи їх інтегрування, кожен з яких детально ілюструється прикладами. Посібник містить задачі для аудиторних занять, самостійної та індивідуальної роботи студентів.

Рецензенти: доктор фіз.–мат. наук, проф. Ронто М. Й.

доктор фіз.–мат. наук, доцент Сливка–Тилищак Г. І.

Рекомендовано до друку Вченою радою математичного факультету ДВНЗ "Ужгородський національний університет" від 21 жовтня 2015 року, протокол № 3.

Рекомендовано до друку Редакційно–видавничою радою ДВНЗ "Ужгородський національний університет"від 28 вересня 2015 року, протокол № 3.

Розділ 1

Звичайні диференціальні рівняння першого порядку, розв'язані відносно похідної

1.1 Основні поняття та означення

Означення 1.1. *Звичайним диференціальним рівнянням n–го порядку* називають співвідношення між незалежною змінною x, шуканою фунцією $y(x)$ та її похідними $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ вигляду:

$$F\left(x, y(x), y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{1.1}$$

де $x \in I := [a, b]$ — незалежна змінна, $y = y(x) \in C^n(I)$ — невідома скалярна шукана функція, $F : I \times D^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ — задана функція.

Диференціальне рівняння (1.1) називають *диференціальним рівнянням в неявному вигляді*, або *диференціальним рівнянням, не розв'язаним відносно старшої похідної*.

Означення 1.2. Якщо диференціальне рівняння (1.1) можна розв'язати відносно старшої похідної $y^{(n)}$, то його записують у вигляді:

$$y^{(n)} = f\left(x, y(x), y', \ldots, y^{(n-1)}\right) \tag{1.2}$$

і називають *звичайним диференціальним рівнянням n–го порядку у нормальній формі*, або *явним диференціальним рівнянням (рівнянням, розв'язаним відносно старшої похідної)*.

Означення 1.3. *Порядком диференціального рівняння* називається порядок старшої похідної шуканої функції.

Означення 1.4. Рівняння (1.1) називається *лінійним*, якщо функція F є лінійною відносно $y, y', \ldots, y^{(n)}$, *квазілінійним*, якщо старша похідна $y^{(n)}$ входить лінійно, і *нелінійним*, якщо функція F є нелінійною відносно $y^{(n)}$.

Надалі будемо розглядати диференціальні рівняння першого порядку, тобто нехай у рівняннях (1.1), (1.2) $n = 1$.

Означення 1.5. Якщо диференціальне рівняння представлене у вигляді:

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0, \tag{1.3}$$

де $M(x,y)$ та $N(x,y)$ — задані функції, то таку форму запису називають *симетричною.*

Означення 1.6. *Розв'язком* диференціального рівняння (1.2) на інтервалі I називають неперервно диференційовну на цьому інтервалі функцію

$$y = \phi(x), \tag{1.4}$$

яка перетворює рівняння (1.2) на тотожність, тобто

$$\phi'(x) \equiv f\left(x, \phi(x)\right).$$

Розв'язок рівняння (1.2) може бути заданий не тільки *явно*, тобто у вигляді (1.4), але й у неявному вигляді:

$$\Phi(x,y) = 0,$$

що називається *інтегралом рівняння* (1.2), або *параметрично*:

$$x = \phi(t), y = \psi(t).$$

Означення 1.7. *Задачею Коші* для диференцільного рівняння (1.2) називають задачу відшукання розв'язку рівняння (1.2), що задовольняє умові:

$$y\left(x_0\right) = y_0. \tag{1.5}$$

При цьому (1.5) називають *початковою умовою* задачі Коші (1.2), (1.5), а точку (x_0, y_0) — *початковою точкою.*

Для задачі Коші (1.2), (1.5) мають місце наступні теореми.

Теорема 1.1. ***(Пеано)*** *[1]*

Якщо функція $f(x,y)$ неперервна у деякій області D площини xOy, то існує неперервна разом зі своєю похідною функція $y = y(x)$, яка є розв'язком задачі Коші (1.2), (1.5), де $(x_0, y_0) \in D$.

Теорема 1.2. ***(Коші)**[2]*

Нехай функція $f(x, y)$ визначена у прямокутнику

$$G := \{(x, y) : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\}, a, b > 0, \tag{1.6}$$

і задовольняє у ньому такі умови:

1) $f(x, y)$ неперервна, а отже, й обмежена, тобто

$$\exists M > 0, |f(x, y)| \leq M;$$

2) функція f задовольняє умову Ліпшиця:

$$|f(x, u) - f(x, v)| \leq K|u - v|,$$

$\forall (x, u), (x, v) \in I \times D,\ K \geq 0.$

Тоді задача Коші (1.2), (1.5) має єдиний розв'язок на відрізку

$$|x - x_0| \leq h, h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Означення 1.8. *Загальним розв'язком* диференціального рівняння (1.2) у деякій області G площини xOy називають функцію

$$y = \phi(x, C), \tag{1.7}$$

яка залежить від однієї довільної сталої C, якщо:

1) вона є розв'язком рівняння (1.2) для довільного фіксованого значення сталої C;

2) для будь–якої початкової умови (1.5), де $(x_0, y_0) \in G$, існує єдине значення сталої $C = C_0$ таке, що функція $y = \phi(x, C_0)$ задовольняє умову (1.5).

Означення 1.9. Якщо не можна знайти загальний розв'язок у вигляді (1.7), його шукають у неявному вигляді

$$\Psi(x, y) = C$$

та називають *загальним інтегралом* диференціального рівняння (1.2).

Означення 1.10. Якщо у точці (x_0, y_0) порушуються умови теореми Коші, то через цю точку можуть проходити декілька інтегральних кривих (розв'язок не єдиний) або не проходить жодна інтегральна крива (розв'язку не існує). Такі точки називають *особливими точками* диференціального рівняння.

Означення 1.11. *Частинним розв'язком* рівняння (1.2) в області G називають функцію $y = \phi(x, C_0)$, яка знаходиться із загального розв'язку (1.7) при певному значенні сталої $C = C_0$.

1.2 Геометрична інтерпретація диференціального рівняння першого порядку

Розглянемо геометричну інтерпретацію рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{1.8}$$

та задачі Коші (1.8), (1.5).

Означення 1.12. У кожній точці (x, y) області G (Рис. 1.1) проведемо пряму, яка нахилена до осі Ox під кутом $\alpha = arctgf(x, y)$.

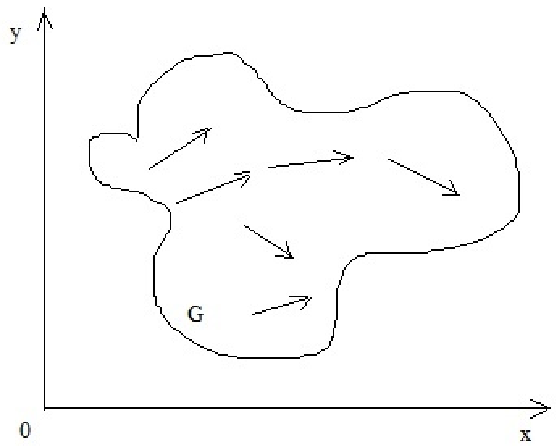

Рис. 1.1

Сукупність усіх цих прямих називатимемо *полем напрямів* диференціального рівняння (1.8). Криву l, дотична до якої в кожній точці збігається з відповідною прямою поля напрямів, називатимемо *інтегральною кривою* поля напрямів чи рівняння (1.8). Оскільки f — неперервна функція, то нахил прямої змінюється неперервно вздовж кривої l, тобто ця крива є гладкою. Крім того, в усіх точках області G

$$-\frac{\pi}{2} < arctgf(x, y) < \frac{\pi}{2}.$$

Тому рівняння кривої l можна записати у вигляді функції $y = \psi(x)$, $x \in I$, причому $\psi \in C^1_I$ і $(x, \psi(x)) \in G$ для всіх $x \in I$. Оскільки $\psi'(x)$ дорівнює $tg\alpha$, де α — кут нахилу дотичної до l у точці $(x, \psi(x))$, то $\psi'(x) = f(x, \psi(x))$, $x \in I$. Отож, рівняння $y = \psi(x)$ інтегральної кривої l диференціального рівняння (1.8) є розв'язком цього рівняння. Легко бачити, що й навпаки, графік кожного розв'язку диференціального рівняння (1.8) є його інтегральною кривою. Отже, розв'язати диференціальне рівняння (1.8) геометрично означає побудувати всі його інтегральні криві.

Означення 1.13. Прямі, на яких кутовий коефіцієнт поля напрямів має однакову величину, називаються *ізоклінами*. Ізокліни диференціального рівняння (1.8) визначаються рівнянням $y = kx$.

Якщо розглянути задачу Коші (1.8), (1.5), то для її геометричного розв'язування треба побудувати ту інтегральну криву, яка проходить через задану точку (x_0, y_0).

Нехай задано диференціальне рівняння (1.8). Якщо розглядати x і y як декартові координати точки, то рівняння (1.8) встановлює зв'язок між координатами довільної точки дотику $M = M(x, y)$ площини і кутовим коефіцієнтом k дотичної $\frac{dy}{dx}$ до інтегральної кривої в цій точці (Рис.1.2):

$$k = tg\alpha = \frac{dy}{dx} = f(x, y).$$

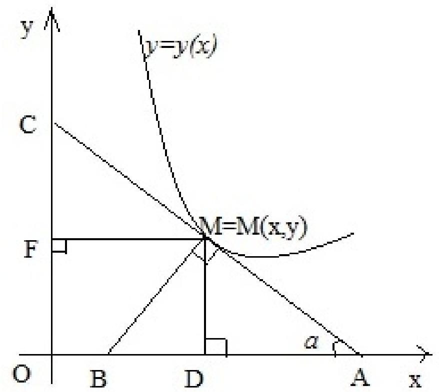

Рис. 1.2

З Рис.1.1 видно, що AM — дотична до кривої $y = y(x)$, AD— піддотична, BM — нормаль, BD — піднормаль.

Причому довжина перпентикуляра MD, опущеного на вісь абсцис, дорівнює абсцисі точки дотику M, тобто $|MD| = x$, а довжина перпендикуляра, опущеного на вісь ординат,— ординаті точки M — $|MF| = y$.

Задача 1.1. Знайти криву, для якої сума довжин дотичної та піддотичної пропорційна координаті точки дотику.

Зобразимо у декартовій системі координат деяку криву $y = y(x)$, до якої під кутом α проведемо дотичну AM з точкою дотику в точці $M = M(x, y)$ кривої (Рис. 1.3). Відрізок AD задаватиме піддотичну дотичної AM.

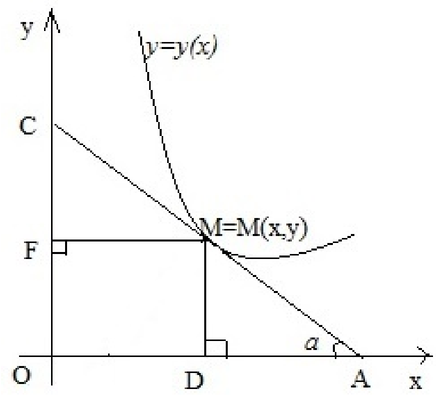

Рис. 1.3

Тоді з умов задачі одержимо рівняння:

$$AM + AD = kxy, \tag{1.9}$$

де k— коефіцієнт пропорційності.

Із геометричного змісту похідної маємо:

$$tg\alpha = y' = \frac{MD}{AD} = \frac{y}{AD}, \text{ оскільки } |MD| = y \Longrightarrow AD = \frac{y}{y'}.$$

Із $\triangle MDA$:

$$AM^2 = MD^2 + AD^2 = \left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2 \Longrightarrow AM = y\sqrt{\frac{1}{y'^2} + 1}.$$

Підставляючи одержані значення відрізків у рівняння (1.9) одержимо:

$$y\sqrt{\frac{1}{y'^2} + 1} + \frac{y}{y'} = kxy, y \neq 0 \Longrightarrow \sqrt{\frac{1}{y'^2} + 1} + \frac{1}{y'} = kx \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{y'}\left(\sqrt{y'^2+1}+1\right)=kx \Longrightarrow \left(\sqrt{y'^2+1}\right)=kxy'-1 \Longrightarrow$$

$$y'^2+1=(kxy'-1)^2 \Longrightarrow y'^2(1-k^2x^2)=-2kxy', y'\neq 0 \Longrightarrow$$

$$y'\left(1-k^2x^2\right)=-2kx \Longrightarrow y'=-\frac{2kx}{1-k^2x^2} \Longrightarrow$$

$$dy=-\frac{2kx}{1-k^2x^2}dx \Longrightarrow y=\frac{1}{k}\ln|1-k^2x^2|+C.$$

Таким чином, криві, що задовольняють умову (1.9), задаються рівнянням $y=\frac{1}{k}\ln|1-k^2x^2|+C$.

1.3 Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них

Означення 1.14. Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$M_1(x)N_1(y)dx+M_2(x)N_2(y)dy=0, \tag{1.10}$$

де $M_i(x)$ та $N_i(y)$, $i=1,2$ — задані неперервні функції.

Рівняння (1.10) називають *рівнянням з відокремлюваними змінними.*

Припускаючи, що $N_1(y)\neq 0$ та $M_2(x)\neq 0$, домножимо (1.10) на $\frac{1}{M_2(x)\cdot N_1(y)}$. Одержимо:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=0. \tag{1.11}$$

Проінтегрувавши рівність (1.11), одержимо загальний інтеграл рівняння (1.10) у вигляді:

$$\int\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx+\int\frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy=C, C-\text{const}. \tag{1.12}$$

При цьому, якщо існують такі прямі $x=x_0$ та або $y=y_0$, при яких $M_2(x_0)\equiv 0$ та або $N_1(y_0)\equiv 0$, то вони можуть бути особливими розв'язками рівняння (1.10).

Для перевірки, чи будуть ці функції особливими розв'язками потрібно:

1. Перевірити чи $x=x_0$ та або $y=y_0$ задовольняють рівняння (1.10);

2. Якщо так, тоді, чи містяться вони в загальному інтегралі (1.12), тобто чи $\exists C=C_0$, при якому дані значення одержуться із загального розв'язку.

Якщо такого $C = C_0$ не існує, то $x = x_0$ та або $y = y_0$ є особливими розв'язками рівняння з відокремлюваними змінними (1.10).

Рівняння з відокремлюваними змінними можна також записати у вигляді:

$$y' = f_1(x)f_2(y). \tag{1.13}$$

З урахування того, що $y' = \frac{dy}{dx}$, перепишемо рівняння (1.13) наступним чином:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)f_2(y)$$

та домножимо останнє на $\frac{dx}{f_2(y)}$, припускаючи, що $f_2(y) \neq 0$.

В результаті одержимо диференціальне рівняння:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx, \tag{1.14}$$

змінні якого відокремлено.

Для одержання загального інтегралу рівняння (1.13) інтегруємо:

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C, \tag{1.15}$$

де C— const.

Аналогічно як і для рівняння у симетричній формі (1.10), при розв'язанні диференціального рівняння (1.13) могли виникнути особливі розв'язки. Шукаємо їх з умови:

$$f_2(y) = 0.$$

Якщо $\exists y = y_0$, при якому $f_2(y_0) \equiv 0$, тоді ця пряма може бути особливим розв'язком рівняння (1.13). Для її перевірки використовується підхід, наведений вище, для (1.10).

Приклад 1.1. Зінтегрувати рівняння

$$(y - x^2y)dy = (x - xy^2)dx. \tag{1.16}$$

Перепишемо рівняння (1.16) у вигляді:

$$y(1 - x^2)dy = x(1 - y^2)dx. \tag{1.17}$$

Припускаючи, що $1 - x^2 \neq 0$, $1 - y^2 \neq 0$, для відокремлення змінних поділимо обидві частини рівняння на $(1-x^2)(1-y^2)$. Тоді

$$\frac{y}{1-y^2}dy = \frac{x}{1-x^2}dx (x \neq \pm 1, y \neq \pm 1) \Longrightarrow$$

$$-\frac{1}{2}\int \frac{d(1-y^2)}{1-y^2} = -\frac{1}{2}\int \frac{d(1-x^2)}{1-x^2} + \ln C \Longrightarrow$$

$$\ln|1-y^2| = \ln|1-x^2| + \ln C \Longrightarrow$$

$$1-y^2 = C(1-x^2).$$

Отже, загальним інтегралом заданого диференціального рівняння є функція

$$y^2 = 1 + C(x^2-1), C - const. \tag{1.18}$$

З'ясуємо можливість появи особливих розв'язків у (1.16). Легко перевірити, що функції $x=-1, x=1, y=-1, y=1$ є розв'язками рівняння, однак у загальному інтегралі містяться лише два останніх (їх можна отримати з формули (1.18) при $C=0$). А тому функції $x=-1$ і $x=1$ є особливими розв'язками.

1.4 Диференціальні рівняння, які зводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними

До рівняння з відокремлюваними змінними зводяться рівняння вигляду:

$$y' = f(ax+by+d),$$

де a, b, d—деякі сталі. Справді, якщо виконати заміну $z = ax+by$, то

$$y = \frac{z-ax}{b} \Longrightarrow y' = \frac{1}{b}z' - \frac{a}{b}$$

і для знаходження функції z одержуємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$z' = bf(z+d) + a.$$

Приклад 1.2. Зінтегрувати рівняння

$$y' = (4x+y+5)^2.$$

Нехай $z = 4x + y$. Тоді

$$z' = 4 + y' \Longrightarrow y' = z' - 4 \Longrightarrow z' - 4 = (z+5)^2 \Longrightarrow z' = (z+5)^2 + 4.$$

Звідси, якщо $(z+5)^2 + 4 \neq 0$, то

$$\frac{dz}{(z+5)^2+4} = dx \Longrightarrow \int \frac{dz}{(z+5)^2+4} = x + C \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{2} arctg \frac{z+5}{2} = x + C \Longrightarrow arctg \frac{4x+y+5}{2} = 2x + 2C \Longrightarrow$$
$$4x + y + 5 = 2tg(2x + C_1), C_1 := 2C.$$

Отже, загальним розв'язком є $y = 2tg(2x + C) - 4x - 5$.

Оскільки $(z+5)^2 + 4 \neq 0$ на множині дійсних чисел, то інших розв'язків немає.

1.5 Однорідні диференціальні рівняння

Означення 1.15. Функцію $f(x, y)$ називають *однорідною функцією порядку* m, якщо для будь–яких x, y і параметру $\lambda \neq 0$ справджується тотожність:

$$f(\lambda x, \lambda y) \equiv \lambda^m f(x, y).$$

Означення 1.16. Диференціальне рівняння

$$y' = f(x, y) \tag{1.19}$$

називають *однорідним*, якщо $f(x, y)$ є однорідною функцією нульового порядку.

Диференціальне рівняння вигляду

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ — задані функції, буде *однорідним*, якщо $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ — однорідні одного і того ж порядку.

Заміною змінних

$$y(x) = z(x)x, \tag{1.20}$$

де $z(x)$ —нова шукана функція, однорідне диференціальне рівняння (1.18) зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 1.3. Проінтегрувати диференціальне рівняння:

$$y' = \frac{y}{x - 2\sqrt{xy}} := f(x, y). \tag{1.21}$$

Переконаємось, що функція у правій частині рівняння (1.21) є однорідною нульового порядку. Дійсно, виконаємо формальну підстановку $x \to \lambda x$, $y \to \lambda y$, $\forall \lambda \neq 0$. Тоді:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda y}{\lambda x - 2\sqrt{\lambda x \lambda y}} = \frac{\lambda y}{\lambda\left(x - 2\sqrt{xy}\right)} = \frac{y}{x - 2\sqrt{xy}} = f(x, y),$$

а це означає, що функція однорідна нульового порядку, тобто диференціальне рівняння (1.21) — однорідне.

Вводимо заміну змінних:

$$y(x) = z(x)x, y' = z'x + z, \tag{1.22}$$

та підставляємо (1.22) в (1.21). Отримаємо:

$$z'x + z = \frac{zx}{x - 2\sqrt{x^2 z}}, \text{якщо } x \neq 0, \text{то } \Longrightarrow z'x + z = \frac{z}{1 - 2\sqrt{z}} \Longrightarrow$$

$$z'x = \frac{2z\sqrt{z}}{1 - 2\sqrt{z}} \Longrightarrow x\frac{dz}{dx} = \frac{2z\sqrt{z}}{1 - 2\sqrt{z}} \Longrightarrow$$

відокремлюємо змінні:

$$\frac{1 - 2\sqrt{z}}{2z\sqrt{z}} dz = \frac{dx}{x}$$

та інтегруємо:

$$-\frac{1}{\sqrt{z}} - \ln|z| = \ln|x| + \ln C \Longrightarrow \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{z}}}}{xz} = C.$$

Через заміну змінних $y(x) = z(x)x \Longrightarrow z(x) = \frac{y(x)}{x}$ в одержаному загальному інтегралі одержуємо розв'язок рівняння (1.21):

$$\frac{e^{-\sqrt{\frac{x}{y}}}}{y} = C, C - const.$$

При $z = 0$ одержимо особливий розв'язок $y = 0$. Крім того, особливим розв'язком рівняння буде $x = 0$.

Приклад 1.4. Перевірити, чи рівняння є однорідним та знайти його розв'язок, що задовольняє початкову умову $y(0) = -1$.

$$x(x + 2y)dx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

Тут функції $M(x, y) := x(x + 2y)$ та $N(x, y) := (x^2 - y^2)$ є однорідними другого порядку, а тому задане рівняння є однорідним.

Введемо заміну змінних $y = zx$. Тоді вихідне рівняння перепишеться у вигляді:

$$x(x + 2zx)dx + (x^2 - z^2x^2)(xdz + zdx) = 0, x \neq 0 \Longrightarrow$$

$$(1 + 2z)dx + (1 - z^2)(xdz + zdx) = 0 \Longrightarrow$$

$$(1 + 3z - z^3)dx + x(1 - z^2)dz = 0, 1 + 3z - z^3 \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{(1 - z^2)dz}{1 + 3z - z^3} = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{1}{3}\ln|1 + 3z - z^3| + \ln|x| = \ln C \Longrightarrow x\sqrt[3]{1 + 3z - z^3} = C.$$

Повертаючись через заміну змінних $z = \frac{y}{x}$ до змінної y, одержимо загальний інтеграл:

$$\sqrt[3]{x^3 + 3x^2y - y^3} = C. \tag{1.23}$$

Для відшукання значення сталої C підставимо у (1.23) початкові умови $y(0) = -1$, звідки отримаємо, що $C = 1$. Отже, розв'язком задачі Коші буде функція:

$$\sqrt[3]{x^3 + 3x^2y - y^3} = 1.$$

Слід відмітити, що існують рівняння, які не є однорідними, але за допомогою відповідної заміни їх легко звести до однорідних диференціальних рівнянь.

1.6 Рівняння, звідні до однорідних

Розглянемо диференціальне рівняння вигляду:

$$y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + d_1}{a_2x + b_2y + d_2}\right), \tag{1.24}$$

де $a_i, b_i, d_i, i = 1, 2$ — деякі сталі. Якщо d_1 і d_2 одночасно не дорівнюють нулю, то права частина рівняння (1.24) не є однорідною функцією порядку 0, а тому рівняння не є однорідним.

Для зведення (1.24) до однорідного диференціального рівняння розглянемо випадки:

1. Якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$, то вводимо заміну змінних:

$$x = u + x_0, y = v(u) + y_0, y' = v', \tag{1.25}$$

де значення (x_0, y_0) є розв'язками системи алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + d_1 = 0, \\ a_2x + b_2y + d_2 = 0. \end{cases} \tag{1.26}$$

Підставимо (1.25) в (1.24):

$$v' = f\left(\frac{a_1(u + x_0) + b_1(v + y_0) + d_1}{a_2(u + x_0) + b_2(v + y_0) + d_2}\right) \overset{(1.26)}{\Longrightarrow} v' = f\left(\frac{a_1u + b_1v}{a_2u + b_2v}\right).$$

Одержане рівняння є однорідним та розв'язується заміною змінних

$$v(u) = z(u)u.$$

Приклад 1.5. Проінтегрувати диференціальне рівняння:

$$(x - 2y + 3)y' = 1 - y - 2x.$$

Вважаючи, що $y \neq \frac{1}{2}(x + 3)$, запишемо рівняння у вигляді:

$$y' = \frac{1 - y - 2x}{x - 2y + 3}. \tag{1.27}$$

Оскільки $\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0$, то виконуємо заміну: $x = u + x_0$, $y = v(u) + y_0$, де значення x_0, y_0 знаходимо із системи:

$$\begin{cases} 1 - y - 2x = 0, \\ x - 2y + 3 = 0. \end{cases} \Longrightarrow x_0 = -\frac{1}{5}, y_0 = \frac{7}{5},$$

а тоді $x = u - \frac{1}{5}, y = v(u) + \frac{7}{5}$.

З урахуванням введеної заміни, диференціальне рівняння (1.27) матиме вигляд:

$$v' = -\frac{2u + v}{u - 2v}.$$

Ми одержали однорідне диференціальне рівняння.

Нехай $v(u) = z(u)u$, $v' = z'u + z$. Тоді

$$z'u + z = -\frac{2u + zu}{u - 2zu}, u \neq 0 \Longrightarrow z'u + z = -\frac{2 + z}{1 - 2z} \Longrightarrow$$

$$u\frac{dz}{du} = \frac{-2z^2 + 2z + 2}{1 - 2z}, u \neq 0, z^2 - z - 1 \neq 0 \Longrightarrow \frac{2z - 1}{z^2 - z - 1}dz = -2\frac{du}{u}.$$

Інтегруючи останнє рівняння, знаходимо:

$$\ln|z^2 - z - 1| = \ln C - 2\ln|u| \Longrightarrow z^2 - z - 1 = \frac{C}{u^2} \Longrightarrow$$

$$v^2 - vu - u^2 = C \Longrightarrow \left(y - \frac{7}{5}\right)^2 - \left(y - \frac{7}{5}\right)\left(x + \frac{1}{5}\right) - \left(x + \frac{1}{5}\right)^2 = C \Longrightarrow$$

$$y^2 - x^2 - xy + x - 3y + \frac{57}{25} = C$$

—загальний розв'язок рівняння.

Якщо $z^2 - z - 1 = 0$, то $z = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, звідки $v = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}u$, тобто одержуємо функції

$$y = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}x + \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{10} \text{ і } y = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}x + \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{10},$$

які є особливими розв'язками диференціального рівняння, оскільки вони задовольняють задане диференціальне рівняння і не одержуються із загального інтегралу при жодному фіксованому значенні сталої C.

2. Якщо $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$, то це означає, що відповідні коефіцієнти a_i та b_i, $i = 1, 2$ попарно пропорційні. Нехай

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = k.$$

Тоді вводимо заміну змінних:

$$z(x) = a_1 x + b_1 y \Longrightarrow kz(x) = a_2 x + b_2 y, y' = \frac{z'}{b_1} - \frac{a_1}{b_1}. \tag{1.28}$$

При підстановці (1.28) у рівняння (1.24), одержимо:

$$\frac{z'}{b_1} - \frac{a_1}{b_1} = f\left(\frac{z + d_1}{kz + d_2}\right) \Longrightarrow z' = b_1 f\left(\frac{z + d_1}{kz + d_2}\right) + a_2$$

— рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 1.6. Проінтегрувати диференціальне рівняння, звівши його до однорідного:

$$y' = \frac{x - 2y + 3}{2x - 4y - 1}. \tag{1.29}$$

Оскільки $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 0$, то виконуємо заміну:

$$z := x - 2y \Longrightarrow y = \frac{x}{2} - \frac{z}{2} \Longrightarrow y' = \frac{1}{2} - \frac{z'}{2}. \tag{1.30}$$

Підставляючи (1.30) в (1.29), одержимо рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{1}{2} - \frac{z'}{2} = \frac{z + 3}{2z - 1} \Longrightarrow z' = -\frac{7}{2z - 1} \Longrightarrow (2z - 1)dz = -dx \Longrightarrow$$

$$z^2 - z + x = C \overset{(1.30)}{\Longrightarrow} (x - 2y)^2 - 2y = C$$

— загальний інтеграл диференціального рівняння (1.29).

Зауважимо, що деякі рівняння можна звести до однорідних за допомогою заміни $y := z^m$, де $z = z(x)$ — нова шукана функція, а m— деяке число. Такі рівняння називають *узагальнено– однорідними*.

Наприклад, у рівнянні

$$y' = x + \frac{y^2}{x^3}$$

зробимо заміну $y = z^m \Longrightarrow y' = mz^{m-1}z'$ і виберемо m таким, щоб одержане рівняння

$$mz^{m-1}z' = x + \frac{z^{2m}}{x^3} \Longrightarrow mz' = \frac{x}{z^{m-1}} + \frac{z^{m+1}}{x^3}$$

було однорідним.

Для цього портібно, щоб права частина рівняння була однорідною функцією порядку 0, тобто число m повинно задовольняти рівняння

$$m - 1 = 1 \text{ і } m + 1 = 3,$$

звідки $m = 2$. Отже, за допомогою підстановки $y = z^2$ задане рівняння зведено до однорідного:

$$2z' = \frac{x}{z} + \frac{z^3}{x^3}. \tag{1.31}$$

Введемо заміну змінних:

$$z(x) = t(x)x \Longrightarrow z' = t'x + t, \tag{1.32}$$

де $t(x)$— нова шукана функція.

Підставимо (1.32) в (1.31):

$$t'x + t = \frac{t^3 + t}{2} \Longrightarrow x\frac{dt}{dx} = \frac{t^3 - t}{2}, x \neq 0, t^3 - t \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{dt}{t^3 - t} = \frac{dx}{2x} \Longrightarrow -\ln|t| + \frac{1}{2}\ln|t^2 - 1| = \frac{1}{2}\ln|x| + \frac{1}{2}\ln C \Longrightarrow$$

$$\frac{t^2 - 1}{t^2}x = C \overset{(1.32)}{\Longrightarrow} \frac{z^2 - x^2}{z^2}x = C \Longrightarrow \frac{y - x^2}{y}x = C$$

— загальний інтеграл заданого рівняння.

Задачі для аудиторної роботи

1. Побудувати поле напрямів диференціальних рівнянь:

   - $y' = \frac{|xy|}{xy}$;
   - $y' = -\frac{x+|x|}{y+|y|}$;

- $y' = \begin{cases} 0, & \text{якщо } y \neq x, \\ 1, & \text{якщо } y = x. \end{cases}$

2. За допомогою методу ізоклін побудуйте поле напрямів диференціального рівняння та наближено зобразіть декілька інтегральних кривих:

$$y' = x^2 + y^2 - 4$$

3. Зінтегрувати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними:

- $y' = e^{2x+y}$;
- $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$;
- $(xy^2 - y^2)y' = yx^2 + x^2$.

4. Знайдіть розв'язки задач Коші:

- $(1+e^x)yy' = e^x, y(0) = 1$;
- $y'tgx = y + 3, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

5. Проінтегрувати диференціальні рівняння, звівши їх до рівнянь з відокремлюваними змінними:

- $y' = 2x + 3y + 10$;
- $(2x + y)y' = 1$.

6. Обґрунтуйте, що рівняння є однорідними та зінтегруйте їх:

- $xdy = \left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right) dx$;
- $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$;
- $y' = \frac{x+2y}{2x+y}$.

7. Проінтегруйте рівняння, звідні до однорідних:

- $(7x - 3y + 2)dx + (4y - 3x - 5)dy = 0$;
- $y' = \frac{x-2y-1}{4y-2x+6}$;
- $\left(4x^2 + y^4\right) dy = 2xydx$.

Завдання для індивідуальної роботи №1

Варіант 1.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:
$$y' = tg(y - x^3).$$
2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.
$$x^2y^2y' + 1 = y.$$
3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.
$$y' = \frac{xy + y^2 e^{\frac{-x}{y}}}{x^2}.$$
4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.
$$(2x - 4y + 6)\,dx + (x + y - 3)dy = 0.$$
5. Задача. Знайти криві, у яких піддотична дорівнює сумі абсциси та ординати точки дотику.

Варіант 2.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:
$$y' = y + e^{x-1}.$$
2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.
$$xydx + (x + 1)dy = 0.$$
3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.
$$\left(y + \sqrt{x^2 - y^2}\right)dx - xdy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$(8x + 4y + 1) + (4x + 2y + 1)\, y' = 0.$$

5. Задача. Визначити криву, якщо піддотична є середнім арифметичним координат точки дотику.

Варіант 3.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:

$$y' = y - x^2 - 2x - 1.$$

2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.

$$\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$(x - y - \sqrt{xy})\, dx + \sqrt{xy}dy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$(x - 2y - 1)\, dx + (3x - 6y + 2)\, dy = 0.$$

5. Задача. Знайти криві, у яких піднормаль дорівнює різниці між радіус-вектором та абсцисою точки дотику.

Варіант 4.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:

$$y' = y' = cos(y - x^2 + 1).$$

2. Розв'язати рівняння, попередньо звівши його до рівняння з відокремлюваними змінними.

$$z' = 10^{x+z}.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$\left(xye^{\frac{x}{y}} + y^2\right) dx - x^2 e^{\frac{x}{y}} dy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$(x+y)\,dx + (x+y-1)\,dy = 0.$$

5. Задача. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний віссю Оу, дотичною та радіус-вектором точки дотику, рівнобедрений.

Варіант 5.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:

$$xy' + y = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші.

$$y'ctgx + y = 2, y(0) = -1.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$\left(xctg\frac{y}{x} - y\right) dx + xdy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$(x+2y+1)\,dx + (2x+4y+3)\,dy = 0.$$

5. Задача. Визначити криву, яка проходить через початок координат і поділяє прямокутник, утворений координатними осями та перпендикулярами, опущеними на них із будь-якої точки кривої, у відношенні 2 : 1.

Варіант 6.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:

$$y' = 2x.$$

2. Розв'язати задачу Коші.

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2}, y(2) = 0.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$(2\sqrt{xy} - y)\,dx - xdy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$(x + y + 1)\,dx + (2x + 2y - 1)\,dy = 0.$$

5. Задача. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний нормаллю в усякій її точці з осями координат, рівновеликий з трикутником, утворюваним віссю , дотичною і нормаллю.

Варіант 7.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:

$$xy' = 2y.$$

2. Розв'язати задачу Коші.

$$xy' + y = y^2, y(1) = 0,5.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}dy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$(x - y - 1) + (y - x + 2)\,y' = 0.$$

5. Задача. Знайти криві, у яких нормаль збігається з радіус-вектором точки дотику.

Варіант 8.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:
$$y' = 2x(1-y).$$

2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.
$$2x^2yy' + y^2 = 2.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.
$$xy' - y = (x+y)\ln\frac{x+y}{x}.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.
$$(y-1)\,dx + (2x+y+1)\,dy = 0.$$

5. Задача. Знайти криві, у яких піддотична дорівнює довжині радіус-вектора точки дотику.

Варіант 9.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:
$$(x-y)y' = x+y.$$

2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.
$$y' - xy^2 = 2xy.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.
$$xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.
$$(2y+3)\,dx + (x+y-3)\,dy = 0.$$

5. Задача. Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу абсциси точки дотику.

Варіант 10.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:
$$y' = y - x^2.$$

2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.
$$e^{-s}\left(1 + \frac{ds}{dt}\right) = 1.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.
$$xy' - y = xtg\frac{y}{x}.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.
$$(y + 2)\,dx + (y - 2x - 2)\,dy = 0.$$

5. Задача. Знайти криві, для яких трикутник, утворюваний нормаллю в усякій її точці з осями координат, рівновеликий із трикутником, утворюваним віссю Ox, дотичною та нормаллю.

Варіант 11.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:
$$2(y + y') = x + 3.$$

2. Розв'язати задачу Коші.
$$(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, y(0) = 1.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.
$$(y + \sqrt{xy})\,dx = xdy.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$(2y-1)\,dx+(2x+y+1)\,dy=0.$$

5. Задача. Визначити криві, усі дотичні до якої проходять через початок координат.

Варіант 12.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:

$$y'=\frac{x^2+y^2}{2}-1.$$

2. Розв'язати задачу Коші.

$$y'\sin x-y\cos x=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=1.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$(3x-2y)\,dx+(y-2x)\,dy=0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$(3x+2y-1)\,dx+(x+1)\,dy=0.$$

5. Задача. Знайти криві, для яких трикутник, утворюваний нормаллю в усякій її точці з осями координат, рівновеликий із трикутником, утворюваним віссю , дотичною та нормаллю.

Варіант 13.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:

$$(y^2+1)y'=y-x.$$

2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.

$$e^x\sin^3 y+\left(1+e^{2x}\right)\cos y\cdot y'=0.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$(2y - 2x)\,dx + (y - 3x)\,dy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$(2 - x - y)\,dx + (2x - 1)\,dy = 0.$$

5. Задача. Знайти криві, у яких трикутник, утворюваний віссю , дотичною та радіус-вектором точки дотику, рівнобедрений.

Варіант 14.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:

$$yy' + x = 0.$$

2. Розв'язати задачу Коші.

$$x \sin y = y'(1 + x^2) \cos y, y(1) = \frac{\pi}{4}.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$(5x + 3y)\,dx + (x + y)\,dy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$(x - 2y + 4)\,dx + (3x - 2)\,dy = 0.$$

5. Задача. Визначити криву, яка проходить через початок координат і поділяє прямокутник, утворений координатними осями та перпендикулярами, опущеними на них із будь-якої точки кривої, у відношенні 2 : 1.

Варіант 15.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:
$$xy' = 2y.$$

2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.
$$\left(xy^2 + x\right) dx + \left(y - x^2 y\right) dy = 0.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.
$$(13x + y)\, dx + (y - 5x)\, dy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.
$$(2x + y - 2)\, dx + (2 - 2x)\, dy = 0.$$

5. Задача. Довести, що крива, усі нормалі до якої проходять через одну й ту ж саму фіксовану точку, є коло.

Варіант 16.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:
$$xy' + y = 0.$$

2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.
$$x^2 y' - \cos 2y = 1.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.
$$(3x + 2y)\, dx + x dy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.
$$(2x + y + 1)\, dx = (4x - y)\, dy.$$

5. Задача. Знайти криві, у яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу абсциси точки дотику.

Варіант 17.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:
$$y' + y = (x - y')^3.$$

2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.
$$3y^2y' + 16x = 2xy^3.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.
$$(x - 2y)\,dx + ydy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.
$$(3x + y - 1)\,dy = (2x + 2y - 1)\,dx.$$

5. Задача. Знайти криві, для яких площа трикутника, утвореного дотичною, ординатою точки дотику та віссю абсцис величина стала і рівна a^2.

Варіант 18.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:
$$y' = x - e^y.$$

2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.
$$x^2y'\cos y + 1 = 0.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.
$$y\,(y - 3x)\,dx + x\,(2x + y)\,dy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.
$$(5x + 2y)\,dx + (2x + y + 1)\,dy = 0.$$

5. Задача. Знайти криву, для якої тангенс кута нахилу її дотичної в будь–якій точці на привій в n разів більший від тангенса кута нахилу прямої, що проходить через цю точку і початок координтан.

Варіант 19.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:
$$y(y' + x) = 1.$$

2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.
$$\left(1 + x^2\right) y' - \frac{1}{2}\cos 2y^2 = 0.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.
$$\left(3x^2 - 6xy + y^2\right) dx + 2x^2 dy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.
$$(2x - 3y + 1)\, dx + (x + y - 1)\, dy = 0.$$

5. Задача. Знайти криву, яка проходить через точку $(2; 3)$ і має властивість, що відрізок її довільної дотичної між осями координат ділиться в точці дотику навпіл.

Варіант 20.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:
$$y' = \frac{y - 3x}{x + 3y}.$$

2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.
$$y' = 2x(\pi + y).$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.
$$\left(x^2 - 2xy + 4y^2\right) dx + 2x^2 dy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$2y' + x = 4\sqrt{y}.$$

5. Задача. Крива $y = \phi(x)$ проходить через точку $(1; 1)$ і має властивість, що тангенс кута нахилу кожної її дотичної пропорційний до квадрата ординати точки дотику. Знайти рівняння цієї кривої.

Варіант 21.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:

$$y' = \frac{y}{x+y}.$$

2. Розв'язати рівняння, відокремивши змінні.

$$x^2y' + \sin 2y = 1.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$\left(y^2 + 4xy - 4x^2\right) dx - 4x^2 dy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$y' = y^2 - \frac{2}{x^2}.$$

5. Задача. Крива $y = \phi(x)$ проходить через точку $(0; -2)$ і має властивість, що тангенс кута нахилу її дотичної в будь–якій точці дорівнює ординаті цієї точки, збільшеній на три одиниці. Знайти рівняння цієї кривої.

Варіант 22.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:

$$x^2 + y^2y' = 1.$$

2. Розв'язати рівняння, попередньо звівши його до рівняння з відокремлюваними змінними.

$$y' = cos(y - x).$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$\left(y + y\ln\frac{y}{x}\right) dx + xdy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$10x^3y' = y\left(2x^2 - y^{10}\right).$$

5. Задача. Знайти криву, яка проходить через точку $(0;1)$ і має таку властивість, що в кожній її точці кутовий коефіцієнт дотичної дорівнює подвоєній абсцисі точки дотику.

Варіант 23.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві диференціального рівняння:

$$(x^2 + y^2)y' = 4x.$$

2. Розв'язати рівняння, попередньо звівши його до рівняння з відокремлюваними змінними.

$$(x + y)^2\, y' = a^2.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$\left(xy + x^2\sin\frac{y}{x}\right) dy - \left(x^2 + xy\sin\frac{y}{x} + y^2\right) dx = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$2x^2y' = y^3 + xy.$$

5. Задача. Довести, що крива, тангенс кута нахилу дотичної якої до осі абсцис у будь–якій точці пропорційний абсцисі точки дотику, є параболою.

Варіант 24.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві:

$$2xy' + y^2 = 1.$$

2. Розв'язати задачу Коші.

$$(x+2y)\,y' = 1, y(0) = -1.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$\left(x + y + y\cos\frac{y}{x}\right)dx - \left(x\cos\frac{y}{x} + x\right)dy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$y^3dx + 2\left(x^2 - xy^2\right)dy = 0.$$

5. Задача. Знайти криві, для яких відрізок осі абсцис, що відсікається дотичною та нормаллю, проведеною з довільної точки кривої, рівний $2a$.

Варіант 25.

1. За допомогою ізоклін побудувати інтегральні криві рівняння:

$$x^2y' = y(x+y).$$

2. Розв'язати рівняння, звівши до рівняння з відокремлюваними змінними.

$$y' = \sqrt{4x + 2y - 1}.$$

3. Знайти розв'язок однорідного диференціального рівняння.

$$\left(\sqrt{x^3} + \sqrt{y^3}e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}\right)dx - x\sqrt{y}e^{\sqrt{\frac{y}{x}}}dy = 0.$$

4. Розв'язати рівняння, звівши його до однорідного.

$$3x^5ydx + \left(y^4 - x^6\right)dy = 0.$$

5. Задача. Знайти криві, для яких точка перетину довільної дотичної з віссю абсцис має абсцису, вдвічі меншу абсциси точки дотику.

Розділ 2

Лінійні диференціальні рівняння та звідні до них. Рівняння у повних диференціалах та звідні до них

2.1 Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння. Метод варіації сталої

Означення 2.1. *Лінійним* диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння вигляду

$$A(x)y' + B(x)y + C(x) = 0, \tag{2.1}$$

де $A(x), B(x), C(x)$ — неперервні функції.

В області, де $A(x) \neq 0$, (2.1) рівносильне рівнянню

$$y' + p(x)y = q(x), \tag{2.2}$$

у якому $p(x) := \frac{B(x)}{A(x)}$, $q(x) := -\frac{C(x)}{A(x)}$.

Якщо функція $q(x)$ тотожно дорівнює нулеві, то рівняння (2.2) називають *лінійним однорідним*, а якщо тотожно не дорівнює нулю, то *лінійним неоднорідним.*

Метод розв'язування рівняння (2.2) називається *методом варіації сталої.* Спочатку розв'язуємо відповідне однорідне рівняння:

$$y' + p(x)y = 0; \tag{2.3}$$

$$\frac{dy}{dx} = -p(x)y \Longrightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)dx \Longrightarrow ln|y| = -\int p(x)dx + lnC \Longrightarrow$$

$$y(x) = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{2.4}$$

Нехай тепер у (2.4) $C = C(x)$. Тоді

$$y(x) = C(x)e^{-\int p(x)dx}. \tag{2.5}$$

Невідому функцію $C(x)$ шукатимемо таким чином, щоб (2.5) задовольняла неоднорідне рівняння (2.2). У результаті підстановки (2.5) у (2.2) одержимо:

$$C'(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x) \Longrightarrow C'(x) = q(x)e^{\int p(x)dx} \Longrightarrow$$

$$C(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx + \widetilde{C}. \tag{2.6}$$

Підставляючи знайдене значення функції $C(x)$ вигляду (2.6) у розв'язок (2.5), матимемо:

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx}\left[\widetilde{C} + \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx\right] \tag{2.7}$$

— загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (2.2).

Зазначимо, що функція (2.7) складається з двох доданків, перший з яких описує усі розв'язки відповідного однорідного рівняння (2.3), а другий є частинним розв'язком рівняння (2.2).

Приклад 2.1. Знайти розв'язок диференціального рівняння:

$$xy' - 2y = 2x^4. \tag{2.8}$$

Припускаючи, що $x \neq 0$, перепишемо (2.8) у вигляді:

$$y' - \frac{2y}{x} = 2x^3. \tag{2.9}$$

Для інтегрування диференціального рівняння (2.9) використаємо метод варіації сталої.

Спочатку розв'язуємо відповідне однорідне рівняння:

$$y' - \frac{2y}{x} = 0 \Longrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x}.$$

Припускаючи, що $y \neq 0$, з останнього рівняння одержимо:

$$\frac{dy}{y} = \frac{2dx}{x} \Longrightarrow \ln|y| = 2\ln|x| + \ln C.$$

А тоді загальним розв'язком однорідного рівняння буде функція:

$$y(x) = Cx^2. \tag{2.10}$$

Припускаємо, що у (2.10) $C = C(x)$, тобто

$$y(x) = C(x)x^2. \tag{2.11}$$

Підставимо (2.11) у задане рівняння (2.9):

$$C'(x)x^2 + 2C(x)x - \frac{2C(x)x^2}{x} = 2x^3 \Longrightarrow C'(x)x^2 = 2x^3, x \neq 0 \Longrightarrow$$

$$C'(x) = 2x \Longrightarrow C(x) = x^2 + \widetilde{C}.$$

Підставивши одержане значення функції $C(x)$ у (2.10), отримаємо загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (2.8):

$$y(x) = \widetilde{C}x^2 + x^4.$$

Приклад 2.2. Знайти розв'язок диференціального рівняння:

$$(2e^y - x)y' = 1. \tag{2.12}$$

Очевидно, що рівняння (2.12) не є лінійним відносно функції $y = y(x)$. Перетворимо (2.12) наступним чином:

$$(2e^y - x)\frac{dy}{dx} = 1 \Longrightarrow \frac{dx}{dy} = 2e^y - x \Longrightarrow$$

$$\frac{dx}{dy} + x = 2e^y. \tag{2.13}$$

Як бачимо, одержане диференціальне рівняння (2.12) є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням відносно функції $x = x(y)$. Для побудови його розв'язку застосуємо формулу (2.7):

$$x(y) = e^{-\int dy}\left[C + e^{\int 2e^y dy}\right] \Longrightarrow x(y) = e^{-y}\left[C + e^{2e^y}\right].$$

Одержали загальний розв'язок диференціального рівняння (2.13).

2.2 Рівняння Бернуллі. Метод підстановки

Означення 2.2. Диференціальне рівняння вигляду:

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha, \alpha \neq 0, 1, \tag{2.14}$$

де $p(x), q(x)$ задані неперервні функції, називається *рівнянням Бернуллі.*

Для інтегрування рівняння Бернуллі використовується *метод підстановки*. Його суть полягає у тому, що розв'язок рівняння (2.14) шукається у вигляді:

$$y(x) = u(x)v(x), \tag{2.15}$$

де $u(x)$ та $v(x)$ — невідомі неперервно диференційовні функції.

При підстановці (2.15) у (2.14), отримаємо:

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + p(x)u(x)v(x) = q(x)(u(x)v(x))^{\alpha} \Longrightarrow$$

$$(u'(x) + p(x)u(x))v(x) + u(x)v'(x) = q(x)(u(x)v(x))^{\alpha}. \tag{2.16}$$

Функцію $u(x)$ будемо шукати з диференціального рівняння:

$$u'(x) + p(x)u(x) = 0 \Longrightarrow \frac{du}{dx} = -p(x)u(x)dx \Longrightarrow \tag{2.17}$$

$$\frac{du}{u} = -p(x)dx \Longrightarrow \ln|u(x)| = -\int p(x)dx + \ln C \Longrightarrow$$

$$u(x) = Ce^{-\int p(x)dx}. \tag{2.18}$$

Оскільки нам достатньо знайти один розв'язок рівняння (2.17), то покладемо в (2.18) $C = 1$. Тоді $u(x) = e^{-\int p(x)}dx$.

Підставимо знайдене значення $u(x)$ у диференціальне рівняння (2.16):

$$e^{-\int p(x)dx}v'(x) = q(x)e^{-\alpha\int p(x)dx}v^{\alpha}(x) \Longrightarrow v'(x) = q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}v^{\alpha}(x) \Longrightarrow$$

$$\frac{dv}{v^{\alpha}} = q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx \Longrightarrow$$

$$v(x) = \sqrt[1-\alpha]{(1-\alpha)\left(\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx + C\right)}.$$

Підставляючи одержані функції $u(x)$ та $v(x)$ у формулу (2.15), отримаємо загальний розв'язок рівняння Бернуллі (2.14):

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \cdot \sqrt[1-\alpha]{(1-\alpha)\left(\int q(x)e^{(1-\alpha)\int p(x)dx}dx + C\right)}.$$

Розв'язок рівняння Бернуллі можна також одержати, попередньо звівши його до лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

Розглянемо рівняння (2.14) та поділимо його ліву та праву частини на y^α:

$$y'y^{-\alpha} + p(x)y^{1-\alpha} = q(x). \tag{2.19}$$

У рівнянні (2.19) зробимо заміну:

$$z(x) := y^{1-\alpha}(x), y'(x)y^{-\alpha}(x) = \frac{z'(x)}{1-\alpha}, \tag{2.20}$$

де $z(x)$ — нова шукана неперервно диференційовна функція.

З урахуванням (2.20), рівняння (2.19) перепишеться у вигляді:

$$\frac{z'(x)}{1-\alpha} + p(x)z(x) = q(x) \Longrightarrow z'(x) + (1-\alpha)p(x)z(x) = (1-\alpha)q(x),$$

а це лінійне неоднорідне диференціальне рівняння.

Згідно формули (2.7)

$$z(x) = y^{1-\alpha}(x) = e^{-\int(1-\alpha)p(x)dx}(1-\alpha)\left[C + \int q(x)e^{\int(1-\alpha)p(x)dx}dx\right] \Longrightarrow$$

$$y(x) = e^{-\int p(x)dx} \sqrt[1-\alpha]{(1-\alpha)\left[C + \int q(x)e^{\int(1-\alpha)p(x)dx}dx\right]},$$

тобто функція $y(x)$ дійсно буде розв'язком рівняння Бернуллі (2.14).

Приклад 2.3. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння Бернуллі:

$$y' + 2y = y^2 e^x, y(0) = 1. \tag{2.21}$$

Проінтегруємо рівняння Бернуллі методом підстановки. Розв'язок шукатимемо у вигляді (2.15).

Підставимо дану заміну у рівняння (2.21). Одержимо:

$$u'(x)v(x) + u(x)v'(x) + 2u(x)v(x) = u^2(x)v^2(x)e^x \Longrightarrow$$

$$(u'(x) + 2u(x))v(x) + u(x)v'(x) = u^2(x)v^2(x)e^x. \tag{2.22}$$

Функцію $u(x)$ шукаємо з диференціального рівняння:

$$u'(x) + 2u(x) = 0, \frac{du}{dx} = -2u, u \neq 0 \Longrightarrow \frac{du}{u} = -2dx; \ln|u| = -2x \Longrightarrow$$

$$u(x) = e^{-2x}. \tag{2.23}$$

Підставимо (2.23) у (2.22):

$$e^{-2x}v'(x) = e^{-3x}v^2(x) \Longrightarrow v'(x) = e^{-x}v^2(x) \Longrightarrow \frac{dv}{dx} = e^{-x}v^2, v \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{dv}{v^2} = e^{-x}dx \Longrightarrow -\frac{1}{v(x)} = -e^{-x} - C \Longrightarrow$$

$$v(x) = \frac{1}{C + e^{-x}}. \tag{2.24}$$

Підставляючи функції $u(x)$ та $v(x)$ вигляду (2.23), (2.24) відповідно у функцію $y(x)$ (2.14), одержимо розв'язок заданого рівняння Бернуллі:

$$y(x) = \frac{1}{Ce^{2x} + e^{x}}. \tag{2.25}$$

З початкової умови $y(0) = 1$ матимемо:

$$1 = \frac{1}{C + 1} \Longrightarrow C = 0.$$

А тоді, розв'язок задачі Коші (2.21) матиме вигляд:

$$y(x) = e^{-x}.$$

2.3 Рівняння, звідні до лінійних диференціальних рівнянь

2.3.1 Рівняння Ріккатті

Означення 2.3. Диференціальне рівняння вигляду:

$$y' + a(x)y + b(x)y^2 + c(x) = 0 \tag{2.26}$$

де $x \in I$ — незалежна змінна, $y = y(x) \in C^1(I)$— невідома скалярна шукана функція, $a(x), b(x), c(x) \in C(I)$— задані функції, називається *рівнянням Ріккатті.*

Заміною $y(x) := y_1(x) + z(x)$ рівняння (2.26) зводиться до рівняння Бернуллі, а $y(x) := y_1(x) + \frac{1}{z(x)}$ — до лінійного неоднорідного диференціального рівняння, де $y_1(x)$ деякий відомий частинний розв'язок рівняння (2.26), а $z(x) \in C^1(I)$ — нова невідома шукана функція.

Якщо рівняння Ріккатті представлене у вигляді:

$$y' = Ay^2 + \frac{B}{x}y + \frac{C}{x^2},$$

де $A, B, C = const$, то його частинний розв'язок має вигляд $y_1(x) = \frac{a}{x}$, де a — невідомий параметр, що знаходиться шляхом підстановки функції $y_1(x)$ у задане рівняння.

У випадку диференціального рівняння

$$y' = A\frac{y^2}{x} + \frac{y}{2x} + C,$$

розв'язок шукається у вигляді:

$$y(x) = z(x)x^{\frac{1}{2}}.$$

Приклад 2.4. Проінтегрувати рівняння Ріккатті, звівши його до лінійного неоднорідного диференціального рівняння.

$$xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2.$$

Легко переконатися, що частинним розв'язком заданого рівняння буде функція $y_1(x) = x$.

Введемо заміну змінних: $y(x) := x + \frac{1}{z(x)}$, $y' = 1 - \frac{z'(x)}{z^2(x)}$, де $z(x)$ — нова шукана функція.

Тоді рівняння Ріккатті перепишеться у вигляді:

$$x\left(1 - \frac{z'(x)}{z^2(x)}\right) - (2x+1)\left(x + \frac{1}{z(x)}\right) + \left(x + \frac{1}{z(x)}\right)^2 = -x^2, x \neq 0 \Longrightarrow$$

$$z'(x) + \frac{z(x)}{x} = \frac{1}{x}.$$

Одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння, яке розв'язуємо методом Лагранжа. Для побудови загального розв'язку заданого рівняння використаємо формулу (2.7):

$$z(x) = e^{-\int \frac{dx}{x}}\left[C + \int \frac{e^{\int \frac{dx}{x}}}{x}dx\right] \Longrightarrow z(x) = \frac{1}{x}\left[C + x\right],$$

а розв'язком вихідного рівняння буде функція $y(x) = x + \frac{x}{C+x}$.

2.3.2 Рівняння Дарбу

Означення 2.4. Рівняння вигляду

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy + R(x,y)(xdy - ydx) = 0, \tag{2.27}$$

де $M(x,y), N(x,y)$ — однорідні функції одного і того ж порядку, а $R(x,y)$ — однорідна функція, називається *рівнянням Дарбу.*

Заміною

$$y := xz, dy = zdx + xdz \tag{2.28}$$

рівняння Дарбу зводиться до рівняння Бернуллі з шуканою функцією $x = x(z)$.

Підставимо (2.28) у (2.27):

$$M(x,xz)dx + N(x,xz)[zdx + xdz] + R(x,xz)(x[zdx + xdz] - xzdx) = 0 \Longrightarrow$$

$$[M(x,xz) + zN(x,xz)]dx + x^2R(x,xz)dz = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{x^2R(x,xz)}{M(x,xz) + zN(x,xz)}.$$

Останнє рівняння є рівнянням Бернуллі, розв'язок якого будується методом підстановки $x(z) := u(z)v(z)$.

Приклад 2.5. Знайти розв'язок рівняння Дарбу:

$$dx - dy + x(xdy - ydx) = 0.$$

Легко бачити, що функції $M(x,y) = 1$ та $N(x,y) = -1$ є однорідними нульового порядку, а $R(x,y) = x$ є однорідною функцією першого порядку. Отже, введемо заміну змінних (2.27).

Тоді задане диференціальне рівняння перепишеться наступним чином:

$$dx - xdz - zdx + x(x(xdz + zdx) - zxdx) = 0 \Longrightarrow (1-z)dx + (x^3 - x)dz = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{dx}{dz} - \frac{x}{1-z} = -\frac{x^3}{1-z}.$$

Отже, ми одержали рівняння Бернуллі з шуканою функцією $x = x(z)$. Розв'язуємо його методом підстановки, тобто розв'язок шукаємо у вигляді:

$$x(z) := u(z)v(z), x'(z) = u'(z)v(z) + u(z)v'(z).$$

У результаті введеної заміни рівняння Бернуллі запишеться таким чином:

$$u'(z)v(z) + u(z)v'(z) - \frac{u(z)v(z)}{1-z} = -\frac{u^3(z)v^3(z)}{1-z} \Longrightarrow$$

$$\left(u'(z) - \frac{u(z)}{1-z}\right) v(z) + u(z)v'(z) = -\frac{u^3(z)v^3(z)}{1-z}.$$

Функцію $u(z)$ шукаємо з диференціального рівняння:

$$u'(z) - \frac{u(z)}{1-z} = 0 \Longrightarrow \frac{du}{dz} = \frac{u(z)}{1-z}, u \neq 0, 1-z \neq 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{du}{u} = \frac{dz}{1-z}; \ln|u(z)| = -\ln|1-z| \Longrightarrow u(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Для відшукання функції $v(z)$ одержимо рівняння:

$$\frac{v'(z)}{1-z} = -\frac{v^3(z)}{(1-z)^4} \Longrightarrow \frac{dv}{dz} = -\frac{v^3(z)}{(1-z)^3}, v \neq 0 \Longrightarrow$$

$$-\frac{dv}{v^3} = \frac{dz}{(1-z)^3} \Longrightarrow \frac{1}{2v^2(z)} = \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{C}{2} \Longrightarrow$$

$$v(z) = \frac{1-z}{\sqrt{C(1-z)^2+1}}.$$

Повертаючись до змінних x та $y(x)$, одержимо, що розв'язком рівняння Дарбу буде система функцій:

$$\begin{cases} x(z) = \frac{1}{\sqrt{C(1-z)^2+1}}, \\ y(z) = \frac{z}{\sqrt{C(1-z)^2+1}}. \end{cases}$$

2.4 Рівняння у повних диференціалах

Означення 2.5. Диференціальне рівняння (1.3) називається *рівнянням у повних диференціалах*, якщо існує така неперервно диференційовна функція $U \in C^1(G)$, що

$$dU(x,y) \equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy. \tag{2.29}$$

Теорема 2.1. [3]

Нехай функції $M, N, \frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ *є неперервними в* G *і*

$$M^2(x,y) + N^2(x,y) \neq 0. \tag{2.30}$$

Для того, щоб рівняння (1.3) було рівнянням у повних диференціалах, необхідно, а у випадку, коли $G = \{(x,y)|a < x < b, c < y < d\}$ *і достатньо, щоб*

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \equiv \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}, \tag{2.31}$$

для всіх $(x,y) \in G$.

Умова (2.31) називається *умовою Ейлера.*

Теорема 2.2. [4]

Нехай функції $M(x,y), N(x,y), \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ *є неперервними в області* G*, задовольняють умови (2.30), (2.31) в* G*, а функція* $U(x,y)$ *задовольняє рівність (2.29).*

Тоді через кожну точку області G *проходить єдина інтегральна крива диференціального рівняння (1.3) і функція* $U(x,y) - C$*, де* $C = const$ *є загальним інтегралом рівняння (1.3).*

З означення повноти диференціалу випливає, що для функції $U(x,y)$ мають місце рівності:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} = M(x,y); \frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = N(x,y). \tag{2.32}$$

Нехай $(x_0, y_0) \in G$ — деяка фіксована точка.

Проінтегруємо по змінній x перше з рівнянь (2.32). Одержимо:

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \phi(y). \tag{2.33}$$

З іншого боку, функція $U(x,y)$ задовольняє і другу з рівностей (2.32). Тобто має місце співвідношення:

$$\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \phi'(y) = N(x,y) \Longrightarrow$$

$$\phi'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(x,y)dx = N(x,y) - N(x,y) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx =$$

$$= N(x,y) - N(x,y) + \int_{x_0}^{x} \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx = N(x_0,y). \quad (2.34)$$

Як бачимо, права частина рівняння (2.34) залежить тільки від змінної y, тому, проінтегрувавши його, отримаємо:

$$\phi(y) = \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C, \quad (2.35)$$

де $C = \phi(y_0)$. Підставивши знайдене значення фунції $\phi(y)$ вигляду (2.35) у формулу (2.33), отримаємо загальний інтеграл рівняння у повних диференціалах (1.3):

$$U(x,y) = \int_{x_0}^{x} M(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0,y)dy + C.$$

Проілюструємо процес побудови розв'язку на конкретному прикладі.

Приклад 2.6. Нехай задано диференціальне рівняння

$$(x + y + \sin x)dx + (x + \cos y)dy = 0.$$

Оскільки

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1, \frac{\partial N}{\partial x} = 1,$$

то це рівняння є рівнянням у повних диференціалах. Тому для знаходження функції $U(x,y)$ маємо рівності:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + y + \sin x; \frac{\partial U}{\partial y} = x + \cos y.$$

З першого рівняння одержуємо:

$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} + yx - \cos x + \phi(y). \quad (2.36)$$

Тому

$$\frac{\partial U}{\partial y} = x + \phi'(y) = x + \cos y \Longrightarrow \phi'(y) = \cos y,$$

а отже,

$$\phi(y) = \sin y + \widetilde{C}.$$

Підставляючи $\phi(y)$ у (2.36), одержимо загальний розв'язок заданого рівняння у вигляді:

$$\frac{x^2}{2} + yx - \cos x + \sin y = C_1,$$

де $C_1 = C - \widetilde{C}$ — довільна стала.

2.5 Інтегрувальний множник та способи його відшукання

Якщо диференціальне рівняння (1.3) не задовольняє умову Ейлера (2.31), то його можна звести до рівняння у повних диференціалах, попередньо домноживши його на деяку функцію $\mu = \mu(x, y)$.

Означення 2.6. Функція $\mu(x, y) \neq 0$ в G називається *інтегрувальним множником* диференціального рівняння (1.3), якщо рівняння

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \tag{2.37}$$

в області G є рівнянням у повних диференціалах.

Обґрунтуємо шлях відшукання інтегрувального множника для диференціального рівняння (1.3).

Нехай $\mu(x, y)$ — інтегрувальний множник для рівняння (1.3). Це означає, що диференціальне рівняння (2.37) задовольняє умову Ейлера, тобто має місце тотожність:

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} \equiv \frac{\partial \mu N}{\partial x}, (x, y) \in G,$$

або

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{\partial \mu}{\partial x} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right). \tag{2.38}$$

Отже, для знаходження інтегрувального множника, потрібно розв'язати диференціальне рівняння у частинних похідних першого порядку. Ця задача складна, тому розглянемо випадки, коли $\mu = \mu(x)$, $\mu = \mu(y)$ та $\mu = \mu(\omega(x, y))$.

I. Нехай $\mu = \mu(x)$. Тоді рівняння (2.38) запишеться у вигляді:

$$-\frac{d\mu}{dx} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \Longrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N}.$$

Нехай $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{-N}$ є функцією тільки від x. Тоді

$$\ln|\mu| = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx + C.$$

Нам потрібно один інтегрувальний множник, тому покладемо $C = 0$. Отже, $\mu(x) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{-N} dx}$.

II. Нехай $\mu = \mu(y)$. Тоді рівняння (2.38) буде таким:

$$\frac{d\mu}{dy} M = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \Longrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M}.$$

Нехай $\frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M}$ є функцією тільки від y. Тоді

$$\ln|\mu| = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy + C.$$

Оскільки нам потрібно один інтегрувальний множник, тому покладемо $C = 0$.

Отже, $\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy}$.

III. Нехай $\mu = \mu(\omega), \omega = \omega(x, y)$. Це означає, що для відшукання інтегрувального множника одержимо диференціальне рівняння:

$$\frac{d\mu}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial y} M - \frac{d\mu}{d\omega} \frac{\partial \omega}{\partial x} N = \mu \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) \Longrightarrow$$

$$\frac{d\mu}{d\omega} = \mu \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{\frac{\partial \omega}{\partial y} M - \frac{\partial \omega}{\partial x} N} \Longrightarrow \frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{\frac{\partial \omega}{\partial y} M - \frac{\partial \omega}{\partial x} N} d\omega = \Psi(\omega) \Longrightarrow$$

$$\ln|\mu| = \int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{\frac{\partial \omega}{\partial y} M - \frac{\partial \omega}{\partial x} N} d\omega \Longrightarrow \mu(\omega) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}}{\frac{\partial \omega}{\partial y} M - \frac{\partial \omega}{\partial x} N} d\omega}.$$

Надалі для функції $\omega(x, y)$ будемо розглядати наступні випадки:

$$\omega(x, y) = \left[\begin{array}{l} x \pm y; \\ x^2 \pm y^2; \\ xy; \\ \frac{x}{y}. \end{array} \right.$$

Приклад 2.7. Проінтегрувати диференціальне рівняння, звівши його до рівняння у повних диференціалах:

$$(x^2+2x+y)dx+(-x+3x^2y)dy=0.$$

Легко бачити, що задане рівняння не задовольняє умову Ейлера. Для зведення його до рівняння у повних диференціалах, домножимо вихідне рівняння на функцію $\mu=\mu(x)$:

$$\mu(x)(x^2+2x+y)dx+\mu(x)(-x+3x^2y)dy=0. \qquad (2.39)$$

Оскільки $\mu=\mu(x)$ є інтегрувальним множником, то (2.39) повинно задовольняти умову Ейлера:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu(x)(x^2+2x+y))=\frac{\partial}{\partial x}(\mu(x)(-x+3x^2y))\Longrightarrow$$

$$\mu'(-x+2x^2y)=\mu(2-6xy), -x+2x^2y\neq 0\Longrightarrow\frac{d\mu}{dx}=-\frac{2\mu}{x}, \mu\neq 0\Longrightarrow$$

$$\frac{d\mu}{\mu}=-\frac{2}{x}dx\Longrightarrow\ln|\mu|=-2\ln|x|\Longrightarrow\mu(x)=\frac{1}{x^2}.$$

Підставимо знайдене значення функції $\mu(x)$ у (2.39):

$$\left(1+\frac{2}{x}+\frac{y}{x^2}\right)dx+\left(-\frac{1}{x}+3y\right)dy=0. \qquad (2.40)$$

Як бачимо, рівняння (2.40) задовольняє умову Ейлера, тобто є рівнянням у повних диференціалах.

Із (2.40) матимемо:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=1+\frac{2}{x}+\frac{y}{x^2}, y=const,\Longrightarrow U(x,y)=x+2\ln|x|-\frac{y}{x}+\phi(y).$$

З іншого боку,

$$\frac{\partial U}{\partial y}=-\frac{1}{x}+\phi'=-\frac{1}{x}+3y\Longrightarrow\phi'=3y\Longrightarrow\phi(y)=\frac{3}{2}y^2+\widetilde{C}.$$

А тоді розв'язком диференціального рівняння (2.40) буде функція:

$$x+2\ln|x|-\frac{y}{x}+\frac{3}{2}y^2=C_1,$$

де $C_1 = C - \widetilde{C}$.

Аналогічними є міркування і у випадках $m = m(y)$ та $m = m(\omega(x, y))$.

Завдання для аудиторної роботи

1. Розв'язати диференціальні рівняння:

- $xy' - 2y = 2x^4$;
- $(2x + 1)y' = 4x + 2y$;
- $y' + ytgx = secx$;
- $y = x(y' - x\cos x)$;
- $2x(x^2 + y)dx = dy$;
- $(x + y^2)dy = ydx$;
- $y' + 2y = y^2e^x$;
- $(x + 1)(y' + y^2) = -y$;
- $y' = y^4\cos x + ytgx$;
- $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$;
- $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$;

2. Перевірити, чи рівняння є рівняннями у повних диференціалах та розв'язати їх:

- $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$;
- $(2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0$;
- $\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx - \frac{2x^3+5y}{y^3}dy = 0$;
- $2x\left(1 + \sqrt{x^2 - y}\right)dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0$;
- $3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right)dy$;
- $\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right)dx + \frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}dy = 0$.

3. Знайти інтегрувальний множник та проінтегрувати диференціальні рівняння:

- $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0;$
- $(x^2 + y^2 + y)dx - xdy = 0;$
- $y^2 dx - (xy + x^3)dy = 0;$
- $\left(y - \frac{1}{x}\right) dx + \frac{dy}{y} = 0;$
- $y(x + y)dx + (xy + 1)dy = 0;$
- $(x^2 + 3\ln y)ydx = xdy;$
- $(x^2 + 2x + y)dx = (x - 3x^2 y)dy;$
- $y(x + y^2)dx + x^2(y - 1)dy = 0.$

Завдання для індивідуальної роботи №2

Варіант 1.

1. Розв'язати задачу Коші для лінійного рівняння першого порядку.

$$xy' - (x - 1)y = 3x, y(-2) = 1.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$y' + 2y = y^2 e^x.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$x^2 y' + xy + x^2 y^2 = 4.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$(2x + \cos x + 1)dx + (2x + \sin y - 1)dy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$(3x^2y - x + 1)dx + dy = 0.$$

Варіант 2.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.

$$xy' - 2y = x^4.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$(x+1)(y' + y^2) = -y.$$

3. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$2y' + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0, y(1) = -2.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$(1 - x^2y)dx + x^2(y - x)dy = 0.$$

Варіант 3.

1. Розв'язати задачу Коші для лінійного рівняння першого порядку.

$$y' + ytgx = \frac{1}{\cos x}, y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$xy^2y' = x^2 + y^3.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.
$$xy' - (2x+1)y + y^2 = -x^2.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.
$$x(2-9xy^2)dx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.
$$(2x^2y + 2y + 5)dx + (2x^3 + 2x)dy = 0.$$

Варіант 4.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.
$$(xy + e^x)dx - xdy = 0.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.
$$xydy = (y^2 + x)dx.$$

3. Знайти розв'язокзадачі Коші для рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.
$$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x, y(e) = 0.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.
$$e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.
$$(2x^2y - 3y^3)dx + (7 - 3xy^2)dy = 0.$$

Варіант 5.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.

$$x^2y' + xy + 1 = 0.$$

2. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння Бернуллі.

$$xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y, y(1) = 1.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$5y^3y' + 2y^4 = \frac{4x}{y} + 2y^{-1}.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$(x + \sin x + \sin y)dx + \cos y dy = 0.$$

Варіант 6.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.

$$y = x(y' - x\cos x).$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$y' - 10(x+1)^3\sqrt[10]{y^9} = \frac{20y}{x+1}.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти розв'язок, що проходить через точку M(0,1).

$$\frac{3x^2+y^2}{y^2}dx - \frac{2x^2+5y}{y^3}dy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$(2y+xy^3)dx + (1-3xy^2)dy = 0.$$

Варіант 7.

1. Розв'язати задачу Коші для лінійне рівняння першого порядку.

$$2x(x^2+y)dx = dy, y(2) = \sqrt{3}.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2-1}.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$ytgx = \frac{y^3}{\cos^3 x} + 2y'.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx - \sqrt{x^2-y}dy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$(1+x^2y)dx + (x+x^2y^2)dy = 0.$$

Варіант 8.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.

$$(xy' - 1)\ln x = 2y.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$y'x^3 \sin y = xy' - 2y.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$xy^2dx + dy + \frac{3y}{x}dx = 0.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок, що проходить через точку $M(-\pi, \pi)$.

$$(1 + y^2 \sin 2x)dx - 2y\cos^2 x dy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$y^2(x - 3y)dx + x^2(x + y)dy = 0.$$

Варіант 9.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.

$$xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}.$$

2. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння Бернуллі.

$$(2x^2y\ln y - x)y' = y, y(2) = 1.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$ytgx - 2y' = y^3\cos^2 x.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$3x^2(1 + \ln y)dx = \left(2y - \frac{x^3}{y}\right) dy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$\left(1 + \frac{y}{x^2}\right) dx + \left(\frac{1}{x} + \frac{2y}{x^2}\right) dy = 0.$$

Варіант 10.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.

$$(x + y^2)dy = ydx.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$xdx = (x^2 - 2y + 1)dy.$$

3. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$1 = 4x\sqrt{y}(1 - \sqrt{y}y'), y\left(\frac{1}{2}\right) = 0.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$\left(\frac{x}{\sin y} + 2\right) dx + \frac{(x^2 + 1)\cos y}{\cos 2y - 1} dy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$\left(\frac{y^3}{x^3} - \frac{1}{x^2}\right) dy = \frac{y}{x^3} dx.$$

Варіант 11.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.

$$(2e^y - x)y' = 1.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$(x+1)(yy' - 1) = y^2.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$5x^4 + (y + 4 - x^5)y' = 0.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти інтегральну криву, яка проходить через точку $M(0,1)$.

$$\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)dy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$(2xy + y^2)dx + (2x^2 + 3xy + 4y^2)dy = 0.$$

Варіант 12.

1. Розв'язати задачу Коші для лінійного рівняння першого порядку.

$$(\sin^2 y + xctgy)y' = 1, y\left(\frac{\pi}{3}\right) = -1.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$y' - ytgx + y^2(1+x^2)tgx + 2xy^2 = 0.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$\left(3y\cos x - \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}\sin 2x\right)dx + dy = 0.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$\left(2x^2tgy - \frac{2y^3}{x^3}\right)dx + \left(\frac{x^3}{\cos^2 y} + 4y^3 + \frac{3y^2}{x^2}\right)dy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$(2xy^2 - y)dx + (y^2 + x + y)dy = 0.$$

Варіант 13.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.

$$(2x + 1)y' = 4x + 2y.$$

2. Проінтегрувати задачу Коші для рівняння Бернуллі.

$$3y'y^2 - y^3 = 2e^{2x} - 1, y(-1) = 3.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$yx^2(y^3 - 1) + 3y' = 0.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$\left(2x + \frac{x^2 + y^2}{x^2y}\right)dx = \frac{x^2 + y^2}{xy^2}dy.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$y(1 - y\sin x)\cos^2 y dx - (y^2 + x\cos^2 y)dy = 0.$$

Варіант 14.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.

$$(2x+y)dy = ydx + 4\ln y dy.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$y'(1-x^2) = xy(1-by).$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$2y' + 3e^x y + 3e^x y^{\frac{1}{3}} = 0.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок, що проходить через точку $M\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{6}\right)$.

$$\left(\frac{\sin 2x}{y} + x\right) dx = \left(\frac{\sin^2 x}{y^2} - y\right) dy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$dx + (x + e^{-y}y^2)dy = 0.$$

Варіант 15.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.

$$(x + 2 + (x-1)y)dx - xdy = 0.$$

2. Знайти розв'язок рівняння Бернуллі, що проходить через точку $(2, 1)$.

$$y'x = 2\sqrt{y}(\ln x - \sqrt{y}).$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$dx = \left(8xy + 4(y+1)e^{y^2}x^{\frac{3}{4}}\right) dy.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$(\sqrt{1+x^2}+x^2-\ln x)dy+\left(\frac{xy}{\sqrt{1+x^2}}+2xy-\frac{y}{x}\right)dx=0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$\left(5x^2+\frac{2\sin y}{x}+\frac{2}{x}\right)dx+\cos y dy=0.$$

Варіант 16.

1. Розв'язати задачу Коші для лінійного рівняння першого порядку.

$$(1-2xy)y'=y(y-1), y(-1)=4.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$2dy=(y-y^{-1}(\cos x+\sin x))dx.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$y'=\frac{1}{x-y^2}.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$\left(\sin y+y\sin x+\frac{1}{x}\right)dx+\left(x\cos y-\cos x+\frac{1}{y}\right)dy=0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$\frac{2}{x^3}dx+\left(\frac{1}{y^3}+\frac{12}{y}+\frac{4}{yx^2}\right)dy=0.$$

Варіант 17.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку:

$$((x-2)y-x-1)dx+(1-x)dy=0.$$

2. Знайти інтегральну рівняння Бернуллі, що проходить через точку $M(-1,2)$.

$$xy'=x(2x-2x^3)\sqrt{y}-2y.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$\frac{dx}{x}=\left(\frac{1}{y}-2x\right)dy.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$\frac{y+\sin x\cos^2 xy}{\cos^2 xy}dx+\left(\frac{x}{\cos^2 xy}+\sin y\right)dy=0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$2\cos 2ydx+\left(y^3-\frac{2\sin 2x}{y}\right)dy=0.$$

Варіант 18.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку:

$$(2y-\cos x)dx+(x-1)dy=0.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$y\cos x-6y^{\frac{5}{6}}+6y\sin x=0.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$(1-x^2)y'-2xy^2=xy.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.
$$\frac{2x}{y^3}dx + \frac{y^2 - 3x^2}{y^4}dy = 0, y(1) = 1.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.
$$(2 - e^y tgx - tgxtgy)dx + \left(e^y + \frac{1}{\cos^2 y}\right)dy = 0.$$

Варіант 19.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.
$$(y - 1)dx + (2x - \ln y)dy = 0.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.
$$2x(\sqrt{x}(1 - y) - 1)dy = dx.$$

3. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.
$$dy + (xy - xy^3)dx = 0, y\left(\frac{1}{4}\right) = 0.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.
$$y(x^2 + y^2 + a^2)dy + x(x^2 + y^2 - a^2)dx = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.
$$\ln x dx + (e^{-3y} + 2x\ln x - 2x)dy = 0.$$

Варіант 20.

1. Розв'язати задачу Коші для лінійного рівняння першого порядку.

$$(y-1)dx + (2x - sin3y)dy = 0, y(\pi) = \frac{1}{2}.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$2xy\ln x dy = (y^2 + 3\ln x - 1)dx.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$(x + 2y^3)y' = y.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$(x\ln xy - x^2 + \cos y)dy + (x^3 + y\ln y - y - 2xy)dx = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$\left(\frac{1}{x^2+1} + x + \frac{2x}{x^2+1}\cos y\right)dx - \sin y dy = 0.$$

Варіант 21.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.

$$((2x-1)y - \cos 2x)dx + (x-1)dy = 0.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$5x^4 + (y + 4 - x^5)y' = 0.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$y - y' = y^2 + xy'.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти розв'язок задачі Коші.

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{y^2 - x^2}}\right) dx = \left(\frac{x}{y\sqrt{y^2 - x^2}} - y\right) dy, y(-1) = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$(3x^2 - 3\sin 3x)dx + (1 + x^3 ctgy + \cos 3x ctgy)dy = 0.$$

Варіант 22.

1. Розв'язати задачу Коші для лінійного рівняння першого порядку.

$$y' = \frac{y}{3x - y^2}, y(3) = 0,5.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$\left(3y\cos x - \frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}\sin 2x\right) dx + dy = 0.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$y'x^3 \sin y = xy' - 2y.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$\frac{2x - y}{x^2 + y^2}dx + \frac{2x + x}{x^2 + y^2}dy = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$(x - 2ctgy - 2y)dx - ctg^2 y dy = 0.$$

Варіант 23.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку:

$$ydx + (2x - e^y)dy = 0.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$yx^2(y^3 - 1) + 3y' = 0.$$

3. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$(2x^2 y \ln y - x)y' = y, y(e) = 2.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$(6xy + x^2 + 3)y' + 3y^2 + 2xy + 2x = 0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$(e^x + 1)dx + \left(y^2 + \frac{e^x + x}{y \ln y}\right) dy = 0.$$

Варіант 24.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.

$$xy' + (2x + 1)y - \sin 2x = 0.$$

2. Знайти розв'язок задачі Коші для рівняння Бернуллі.

$$2y' + 3e^x y + 3e^x y^{\frac{1}{3}} = 0, y(1) = 2e.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$(2x + y)dy = ydx + 4 \ln y dy.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок.

$$(\cos(x+y^2)+3y)dx+(2y\cos(x+y^2)+3x)dy=0, y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$(x^2y+y^2+2xy)dx+(x^2+x)(x+2y)dy=0.$$

Варіант 25.

1. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку.

$$(3x-1+xy)dx-(x+1)dy=0.$$

2. Проінтегрувати рівняння Бернуллі.

$$dx=\left(8xy+4(y+1)e^{y^2}x^{\frac{3}{4}}\right)dy.$$

3. Знайти розв'язок рівняння, звівши його до лінійного диференціального рівняння.

$$xdx=(x^2-2y+1)dy=0.$$

4. Перевірити, чи рівняння є рівнянням у повних диференціалах та знайти його розв'язок, що проходить через точку $M(1,e)$.

$$(xe^y+e^x)dy+(e^y+ye^x)dx=0.$$

5. Знайшовши інтегрувальний множник, звести рівняння до рівняння у повних диференціалах та проінтегрувати його.

$$(2x^2y+x)y'-x^2y^3+2xy^2+y=0.$$

Розділ 3

Диференціальні рівняння першого порядку, не розв'язані відносно похідної

3.1 Основні поняття та означення

Означення 3.1. *Неявним диференціальним рівнянням першого порядку* (*рівнянням, не розв'язаним відносно похідної*) називається рівняння вигляду:

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3.1}$$

де $F \in C(D)$, $D \subset \mathbb{R}^3$.

Означення 3.2. Функція $y = \phi(x)$, яка визначена на проміжку I, називається *розв'язком рівняння* (3.1), якщо виконуються такі умови:

1. ϕ диференційовна на I;
2. $(x, \phi(x), \phi'(x)) \in D$ при $x \in I$;
3. $F(x, \phi(x), \phi'(x)) = 0$ для всіх $x \in I$.

Означення 3.3. *Задачею Коші* для диференціального рівняння (3.1) називається задача відшукання розв'язку рівняння (3.1), що задовольняє початкову умову:

$$y(x_0) = y_0, \tag{3.2}$$

де числа x_0, y_0, y_0' задовольняють умову $F(x_0, y_0, y_0') = 0$, $y'(x_0) = y_0'$.

Теорема 3.1. [5] *Нехай функції $F, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial y'}$ є неперервними в області D, а точка (x_0, y_0, y_0') з цієї області є такою, що*

$$F(x_0, y_0, y_0') = 0, \frac{\partial F(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'} \neq 0.$$

Тоді задача Коші (3.1), (3.2) має єдиний розв'язок $y = \phi(x)$, визначений у деякому околі точки x_0.

Означення 3.4. Точки, в яких порушується єдиність розв'язку задачі Коші (3.1), (3.2), називаються *особливими точками* диференціального рівняння.

Означення 3.5. Множина всіх особливих точок рівняння (3.1) називається його *особливою множиною.* Якщо певна підмножина особливої множини цього рівняння утворює криву і дана крива є інтегральною кривою у просторі змінних x, y, то її називають *особливою інтегральною кривою*, а функцію, яка описує цю криву, — *особливим розв'язком рівняння.*

Особливими точками рівняння (3.1) можуть бути ті точки, в яких має місце співвідношення:

$$\frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0.$$

Крім того, особлива точка повинна задовольняти рівняння (3.1). Отож, для відшукання особливих точок рівняння (3.1) одержимо систему [6]:

$$\begin{cases} F(x,y,y') = 0, \\ \frac{\partial F(x,y,y')}{\partial y'} = 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Якщо система (3.3) сумісна і вдається з неї виключити y', то матимемо рівняння:

$$\psi(x,y) = 0. \tag{3.4}$$

За умови, що особливі точки існують, вони задовольнятимуть рівняння (3.4).

Якщо рівняння (3.4) визначає деяку криву на площині $x0y$, то її називають *інтегральною кривою* рівняння (3.4).

Відмітимо, що якщо (3.4) визначає розв'язок рівняння (3.1), то він не обов'язково буде особливим. Для вияснення даного питання потрібно провести додаткові дослідження.

3.2 Неповні рівняння, не розв'язані відносно похідної, та способи їх інтегрування

Розглянемо методи інтегрування неповних рівнянь, не розв'язаних відносно похідної [7].

Нехай диференціальне рівняння (3.1) має вигляд:

I. $F(y') = 0$.

Нехай α_i — корені рівняння $F(\alpha_i) = 0$. Це означає, що

$$y' = \alpha_i \Longrightarrow y = \alpha_i x + C \Longrightarrow \alpha_i = \frac{y - C}{x},$$

а тоді загальним розв'язком вихідного рівняння буде функція:

$$F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0.$$

I. $F(x,y')=0$.

1. Якщо $x=f(y')$.

   Введемо параметр: $y'=p$.

   Тоді з диференціального рівняння одержимо:

$$x=f(p)\Longrightarrow dx=f'(p)dp.$$

   З іншого боку, з параметризації маємо, що $\frac{dy}{dx}=p\Longrightarrow dx=\frac{dy}{p}$. Отже, отримуємо наступне рівняння:

$$\frac{dy}{p}=f'(p)dp\Longrightarrow dy=pf'(p)dp\Longrightarrow y=\int pf'(p)dp+C.$$

   У цьому випадку, загальним розв'язком вихідного рівняння буде система функцій:

$$\begin{cases} x=f(p),\\ y=\int pf'(p)dp+C.\end{cases}$$

2. Нехай $\begin{cases} x=\phi(t),\\ y'=\psi(t).\end{cases}$

   З другого співвідношення маємо, що $\frac{dy}{dx}=\psi(t)\Longrightarrow dy=\psi(t)dx$. У свою чергу $dx=\phi'(t)dt$. А тоді

$$dy=\psi(t)\phi'(t)dt\Longrightarrow y=\int\psi(t)\phi'(t)dt+C.$$

   Отже, загальним розв'язком заданого диференціального рівняння буде система функцій:

$$\begin{cases} x=\phi(t),\\ y=\int\psi(t)\phi'(t)dt+C.\end{cases}$$

III. $F(y,y')=0.$

1. Якщо $y=f(y')$.

   Введемо параметр: $y'=p$.

   Тоді з диференціального рівняння одержимо:

$$y=f(p)\Longrightarrow dy=f'(p)dp.$$

   З іншого боку, з параметризації маємо, що $\frac{dy}{dx}=p\Longrightarrow dy=pdx$. Отже, отримуємо наступне рівняння:

$$pdx=f'(p)dp, p\neq 0\Longrightarrow dx=\frac{f'(p)}{p}dp\Longrightarrow x=\frac{f'(p)}{p}dp+C.$$

   У цьому випадку, загальним розв'язком вихідного рівняння буде система функцій:

$$\begin{cases} x=\frac{f'(p)}{p}dp, \\ y=f(p). \end{cases}$$

   Якщо ж $p=0$, то криві $y=f(0)$ будуть задавати особливі розв'язки заданого рівняння.

2. Нехай $\begin{cases} y=\phi(t), \\ y'=\psi(t). \end{cases}$

   З другого співвідношення маємо, що $\frac{dy}{dx}=\psi(t), \psi(t)\neq 0\Longrightarrow dx=\frac{dy}{\psi(t)}$. У свою чергу $dy=\phi'(t)dt$. А тоді

$$dx=\frac{\phi'(t)dt}{\psi(t)}\Longrightarrow x=\int\frac{\phi'(t)dt}{\psi(t)}+C.$$

   Отже, загальним розв'язком заданого диференціального рівняння буде система функцій:

$$\begin{cases} x=x=\int\frac{\phi'(t)dt}{\psi(t)}+C, \\ y=\phi(t). \end{cases}$$

   Якщо існують такі значення $t=t_0$, при яких $\psi(t_0)=0$, то криві $y=\psi(t_0)$ задаватимуть особливі розв'язки заданого диференціального рівняння.

Приклад 3.1. Знайти розв'язки диференціального рівняння:

$$y = (y' - 1)e^{y'}. \tag{3.5}$$

Введемо заміну змінних: $y' = p$. Тоді рівняння (3.5) запишеться так:

$$y = (p - 1)e^p \Longrightarrow dy = pe^p dp.$$

З іншого боку, $\frac{dy}{dx} = p \Longrightarrow dy = pdx$, а тому

$$pdx = pe^p dp, p \neq 0 \Longrightarrow dx = e^p dp \Longrightarrow x = e^p + C.$$

Отже, загальним розв'язком диференціального рівняння (3.5) буде

$$x = e^p + C, y = (p - 1)e^p.$$

При $p = 0$ одержимо, що значення $y = -1$ є особливим розв'язком (3.5), оскільки воно задовольняє це рівняння та не одержується із його загального розв'язку при фіксованому значенні сталої C.

3.3 Інтегрування повних неявних диференціальних рівнянь

Розглянемо тепер повні диференціальні рівняння, не розв'язані відносно похідної [8].

Нехай рівняння (3.1) записане у вигляді:

I. $y = f(x, y')$.

Для інтегрування такого рівняння введемо заміну: $y' = p(x)$. Тоді одержимо, що

$$y = f(x, p(x)) \Longrightarrow y' = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} = p \Longrightarrow \frac{dp}{dx} = \frac{p - \frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial p}}.$$

Нехай розв'язком останнього рівняння є функція $p(x) = \phi(x, C)$. А тоді загальним розв'язком вихідного рівняння буде $y = f(x, \phi(x, C))$.

II. $x = f(y, y')$.

Введемо заміну: $y' = p(y)$. Тоді одержимо:

$$x = f(y, p(y)) \Longrightarrow x' = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} = \frac{1}{p} \Longrightarrow \frac{dp}{dy} = \frac{\frac{1}{p} - \frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial p}}.$$

Нехай розв'язком останнього рівняння є функція $p(y) = \phi(y, C)$. А тоді загальним розв'язком вихідного рівняння буде $x = f(y, \phi(y, C))$.

Приклад 3.2. Проінтегрувати диференціальне рівняння:

$$2xy' - y = y' \ln yy'. \tag{3.6}$$

Розв'яжемо рівняння (3.6) відносно змінної x:

$$x = \frac{y + y' \ln yy'}{2y'}. \tag{3.7}$$

Введемо заміну змінних: $y' = p(y)$. Тоді (3.7) перепишуться таким чином:

$$x = \frac{y + p \ln yp}{2p} \Longrightarrow x' = \frac{1}{2y} + \frac{1}{2p} + \left(\frac{1}{2p} - \frac{y}{2p^2}\right)\frac{dp}{dy} = \frac{1}{p} \Longrightarrow$$

$$\frac{dp}{dy} = -\frac{p}{y} \Longrightarrow \frac{dp}{p} = -\frac{dy}{y} \Longrightarrow \ln p = -\ln y + \ln C \Longrightarrow p(y) = \frac{C}{y}.$$

На основі знайденого значення функції $p(y)$ можемо записати, що загальним розв'язком диференціального рівняння (3.6) буде функція:

$$x = \frac{1}{2}\ln C + \frac{y^2}{2C}.$$

IV. Диференціальне рівняння вигляду:

$$y = x\phi(y') + \psi(y'),$$

де $\phi(y')$, $\psi(y')$ — задані неперервні функції, називається *рівнянням Лагранжа.*

Для його інтегрування введемо заміну: $y' = p(x)$.

Тоді рівняння Лагранжа перепишеться так:

$$y = x\phi(p) + \psi(p) \Longrightarrow y' = \phi(p) + (x\phi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dx} = p \Longrightarrow$$

$$\frac{dx}{dp} = \frac{x\phi'(p) + \psi'(p)}{p - \phi(p)} \Longrightarrow \frac{dx}{dp} - \frac{\phi'(p)}{p - \phi(p)}x = \frac{\psi'(p)}{p - \phi(p)}.$$

Одержали лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з шуканою функцією $x = x(p)$, розв'язок якого шукаємо методом варіації сталої. Припустимо, що ми знайшли функцію $x = \gamma(p, C)$, яка є розв'язком останнього рівняння.

Тоді загальний розв'язок рівняння Лагранжа запишеться так:

$$\begin{cases} x = \gamma(p, C), \\ y = \gamma(p, C)\phi(p) + \psi(p). \end{cases}$$

V. Диференціальне рівняння вигляду:

$$y = xy' + \psi(y'),$$

де $\psi(y')$ — задана неперервна функція, називається *рівнянням Клеро.*

Для його інтегрування введемо заміну: $y' = p(x)$.

Тоді рівняння Клеро перепишеться так:

$$y = xp + \psi(p) \Longrightarrow y' = p + (x + \psi'(p))\frac{dp}{dx} = p \Longrightarrow$$

$$(x + \psi'(p))\frac{dp}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \vee x + \psi'(p) = 0 \Longrightarrow$$

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Longrightarrow p = C \Longrightarrow y = Cx + \psi(C)$$

— загальний інтеграл рівняння Клеро, а система функцій

$$x = -\psi'(p), y = -p\psi'(p) + \psi(p)$$

задає його особливий розв'язок.

Приклад 3.3. Знайти розв'язок рівняння Клеро:

$$xy' - y = \ln y'.$$

Введемо параметр: $y' = p(x)$. Тоді з диференціального рівняння одержимо:

$$y = xy' - \ln y' \Longrightarrow y = xp - \ln p \Longrightarrow y' = p + \left(x - \frac{1}{p}\right)\frac{dp}{dx} = p \Longrightarrow$$

$$\left(x - \frac{1}{p}\right)\frac{dp}{dx} = 0 \Longrightarrow \frac{dp}{dx} = 0 \vee x - \frac{1}{p} = 0;$$

З першого співвідношення маємо, що

$$\frac{dp}{dx} = 0 \Longrightarrow p = C \Longrightarrow y = Cx - \ln C$$

— загальний розв'язок рівняння Клеро, а з другого —

$$x = \frac{1}{p} \Longrightarrow p = \frac{1}{x} \Longrightarrow y = 1 + \ln x$$

— його особливий розв'язок.

Завдання для аудиторної роботи

1. Методом введення параметру проінтегрувати неявні диференціальні рівняння:
   - $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$;
   - $x^3 + y'^3 - 3xy' = 0$;
   - $y = y'^2 + 2y'^3$;
   - $y^2 + y'^2 = R^2$;
   - $shy' + y'^3 - 2y' = 0$;
   - $5y + y'^2 = x(x + y')$;
   - $y = -xy'^2 + y'^3$.
2. Знайти розв'язки рівняння Лагранжа та Клеро:
   - $y = xy'^2 + y'^3$;
   - $y = 2xy' - 4y'^3$;
   - $2y'^2(y - xy') = 1$;
   - $y'^3 = 3(xy' - y)$.

Завдання для індивідуальної роботи №3

Варіант 1.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$;
2. $x = y'\sqrt{y'^2 + 1}$;
3. $y'^2 - y^2 = 0$;
4. $xy'^2 = y$;

5. $y = xy' - y'^2$.

Варіант 2.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $xy'^2 - 2yy' + x = 0$;

2. $xy' = \sqrt{1 + y'^2}$;

3. $y'^2 - 4y^3 = 0$;

4. $yy'^3 + x = 1$;

5. $y = 2xy' - 4y'^3$.

Варіант 3.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y'^2 + x = 2y$;

2. $x = y'^3 + y'$;

3. $8y'^3 = 27y$;

4. $y = x + y' - \ln y'$

5. $y'^3 = 3(xy' - y)$.

Варіант 4.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$;

2. $x(y'^2 - 1) = 2y'$;

3. $y'^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$;

4. $y = 2xy' + \ln y'$;

5. $y + xy' = 4\sqrt{y'}$.

Варіант 5.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y'^2 - 2yy' = y^2(e^x - 1)$;

2. $y'^2 + x^2 = a^2$;

3. $y^2(y'^2 + 1) = 1$;

4. $y'^3 + y^2 = xyy'$;

5. $y = xy' - (2 + y')$.

Варіант 6.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y'^4 + y^2 = y^4$;

2. $\ln y'(xy') = 1$;

3. $y'^2 = 4y^3(1 - y)$;

4. $y = 2xy' + y^2y'^3$;

5. $y = xy'^2 - 2y'^3$.

Варіант 7.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y(xy' - y)^2 = y - 2xy'$;

2. $\cos y'\sqrt{1 + x} = 2$;

3. $4(1 - y) = (3y - 2)^2y'^2$;

4. $y'^3 - xy'^2 - 4yy' + 4xy = 0$;

5. $xy' - y = \ln y'$.

Варіант 8.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y(y-2xy')^2 = 2y'$;

2. $2y' = x + \ln y'$;

3. $y'^4 = 2yy' + y^2$;

4. $y'^3 - 4xy' + 8y^2 = 0$;

5. $2y'^2(y - xy') = 1$.

Варіант 9.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $xy'(xy' + y) = 2y^2$;

2. $\frac{x^2}{y'^2} = e^{2y'}$;

3. $y'^2 - 4y = 0$;

4. $y^2y'^2 - 2xyy' + 2y^2 - x^2 = 0$;

5. $2yy' = x(y'^2 + 4)$.

Варіант 10.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $xy'^2 = y(2y' - 1)$;

2. $xy'^3 + y' = 0$;

3. $y = (y' - 1)e^{y'}$;

4. $y'^2 - 2xy' = x^2 - 4y$;

5. $y + xy' - y'^2 = 0$.

Варіант 11.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y'^3 + (x+2)e^y = 0;$

2. $\ln y' + \sin y' - x = 0;$

3. $y'^2 = 4|y|;$

4. $2xy' - y = y' \ln yy';$

5. $xy' + \sqrt{1 - y'^2} - y = 0.$

Варіант 12.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $(xy' + 3y)^2 = 7x;$

2. $(x \cos y' + \sin 2y') = 1;$

3. $y'y'^2 + 2y'^3;$

4. $y(y - 2xy')^3 = y'^2;$

5. $x = \frac{y}{y'} + \frac{1}{y'^2}.$

Варіант 13.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy';$

2. $x(x+1)(y' - 1) = y';$

3. $y'^4 - y'^2 = y^2;$

4. $y = y'^2 - xy' + \frac{x^2}{2};$

5. $3x(1 - y') + (2y' - 1)^{\frac{3}{2}} = 3y.$

Варіант 14.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y'(2y - y') = y^2 \sin^2 x$;

2. $x(y'^2 - 1) = 2y'$;

3. $y = \ln y' + y'^2$;

4. $yy'^2 - (xy + 1)y' + x = 0$;

5. $x(1 - y') + y'^2 = y' + y$.

Варіант 15.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$;

2. $y'^2 = \frac{1}{4|x|}$;

3. $y'^2 - y'^3 = y^2$;

4. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$;

5. $xy'(y' + 2) = y$.

Варіант 16.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^2(x^2 - 4)$;

2. $y'^2 = (4x + y' - 3)^2$;

3. $y^2(1 + y'^2) = a^2$;

4. $y' = e^{\frac{xy'}{y}}$;

5. $2xy' - y = \ln y'$.

Варіант 17.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y(y - 2xy')^2 = 2y'$;

2. $y' = \sqrt[3]{2x - y'} + 2$;

3. $y = y'\sqrt{1 + y'^2}$;

4. $x = \frac{y}{y'} \ln y - \frac{y'^2}{y^2}$;

5. $y = x(1 + y') + y'^2$.

Варіант 18.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y'^2 + 4xy' - y^2 - 2x^2y = x^4 - 4x^2$;

2. $xy' = e^{-\frac{1}{y'^2}} + 2y'$;

3. $3y'^4 = y' + y$;

4. $x^2y'^2 = xyy' + 1$;

5. $y + a\sqrt{1 + y'^2} = xy'$.

Варіант 19.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $yy'(yy' - 2x) = x^2 - 2y^2$;

2. $xy'^2 = y'^3 - y'$.

3. $y' = \sqrt{2y - y'} + 2$;

4. $y = xy' - x^2y'^3$;

5. $y + y' = x + y'^2$.

Варіант 20.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $x(y - xy')^2 = xy'^2 - 2yy'$;

2. $2xy' - y' = \sin y'$;

3. $(1 - 2y')^2 = 4yy'$;

4. $y = \frac{xy'}{2} + \frac{y'}{x^2}$;

5. $x(y' - y'^2) + e^{-\frac{1}{y'}} = y$.

Варіант 21.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$;

2. $x = \frac{1}{2}\sqrt{y'} + \sqrt[3]{y'}$;

3. $yy' + ctgy' = \cos y'$;

4. $yy' + y'^2 = x^2 + xy$;

5. $3(y + xy') = y^{\frac{3}{2}}$.

Варіант 22.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y'^3 + (x + 2)e^y = 0$;

2. $2y' = x + \ln y'$;

3. $y = \frac{y}{y'} + e^{y'}$

4. $x(x + 1)(y' - 1) = y$;

5. $y + xy' - y' - y'^3 = 0$.

Варіант 23.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $(xy' + 3y)^2 = 7x$;

2. $x = \sin 2y' cos y'$;

3. $y = y'^2 + \frac{1}{y'} \ln y' - 1$;

4. $2xy' - y = \sin y'$;

5. $x(y' - 1) + e^{y'} = y' + y$.

Варіант 24.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $y'^2 + xy = y^2 + xy'$;

2. $y'^3 - \frac{1}{4x} y' = 0$;

3. $y'^2 - 4y = 0$;

4. $(xy' - y)^3 = y'^3 - 1$;

5. $(2y' - 1)^{\frac{3}{2}} + 3x(3y' - 1) = 3y$.

Варіант 25.

Проінтегрувати диференціальні рівняння:

1. $xy'^2 = y(2y' - 1)$;

2. $y'(x - \ln y') = 1$;

3. $\ln y' + \sin y' - y = 0$;

4. $y'^4 = 4y(xy' - 2y)^2$.

5. $y'^2 - x(1 - y') - y' = 0$.

Список рекомендованої літератури

1. *Городецький Ю. Д.* Диференціальні рівняння/ Городецький Ю. Д., Кирилич В. М., Лавренюк В. М.—Л.: ЛНУ ім. Івана Франка, 2011.— 470 с.
2. *Кривошея С. А.* Диференціальні та інтегральні рівняння/ Кривошея С. А., Перестюк М. О., Бурим В. М.—- К.: Либідь, 2004.—408 с.
3. *Самойленко А. М.* Диференціальні рівняння/ Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. — К.: Либідь, 2003.-600с.
4. *Н. М. Матвеев.* Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.—М.:Высшая школа,1967. — 564 с.
5. *Э. Камке.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1965.—703 с.
6. *В. Степанов.* Курс дифференциальных уравнений. — М.: Гос. издательство технико–теоретической литературы, 1950. — 473 с.
7. *Самойленко А. М.* Диференціальні рівняння у прикладах і задачах/ Самойленко А. М., Кривошея С. А., Перестюк М. О..:К.—Вища школа, 1994.—454 с.
8. А. Ф. Филипов. Сборник задач по дифференциальным уравнениям, 2000.—174 с.

Зміст

Стор.

Відповідальний за випуск:
завідувач кафедри диференціальних рівнянь та математичної фізики
доктор фіз.–мат. наук, проф. Маринець В. В.

Автор: кандидат фіз.–мат. наук, Маринець К. В.

Рецензенти: доктор фіз.–мат.наук, проф. Ронто М. Й.

доктор фіз.–мат.наук, доцент Сливка–Тилищак Г. І.

НАВЧАЛЬНИЙ ПОСІБНИК

з курсу "Диференціальні рівняння"

Частина I

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ
ТА МЕТОДИ ЇХ ІНТЕГРУВАННЯ