**УДК 519.8**

# ТЕОРІЯ ОПТИМАЛЬНОГО ВИБОРУ. ПІДКРИТЕРІЇ ПАРЕТІВСЬКОЇ ЗГОРТКИ КРИТЕРІЇВ

**Червак О.Ю.**

*В роботі розглядається один з методів розв'язання паретівської багатокритеріальної задачі оптимізації як математичного засобу процесу прийняття рішень. Для впорядкування задач вибору на одній і тій допустимій множині альтернатив введені поняття надкритерію будь-якого критерію; якщо критерій є надкритерієм даного критерію на цій множині, то останній критерій є підкритерієм першого. Показано, що розв'язання задачі багатокритеріального вибору за паретівською згорткою зводяться до розв'язання задач скалярної або лексикографічної оптимізації. За умови попарної рівної важливості багатьох критеріїв, запропоновані згортки, відмінні від паретівської, які є підкритеріями останньої (число різних цих підкритеріїв рівне числу заданих критеріїв).*

***Кількість бібліографічних посилань – 4, мова – українська.***

***Ключові слова:*** *задача оптимізації, скалярна (однокритеріальна) задача, багатокритеріальна задача, згортка критеріїв, лексикографічна згортка, паретівська згортка, лексикографічно-паретівська згортка, парето-лексикографічна згортка, надкритерій критерію, підкритерій критерію.*

## ВСТУП

Однією з основних операцій цілеспрямованої діяльності є вибір. Майже кожна складна практична задача вибору є багатокритеріальною. Але, так як альтернатива, оптимальна за кожним з багатьох критеріїв, існує дуже рідко, то ці критерії, як правило, "згортаються" в один єдиний критерій за допомогою тих чи інших умов узгодження. Різні такі умови визначають й різні згортки критеріїв, отже, вони визначають й різні задачі багатокритеріальної оптимізації. Дуже часто використовуються скалярні й векторні згортки багатьох критеріїв.. Однією з найбільш поширених векторних згорток критеріїв є паретівська згортка, в якій всі критерії вважаються попарно рівноважливими при оцінці альтернатив.

Паретівська згортка багатьох критеріїв, як векторний критерій, задає на множині альтернатив єдиний порядок (в розумінні *краще, гірше, рівноцінно*), який є "згорткою" порядків, заданих на ній його компонентами. Зазначимо, що цей порядок є частковим порядком, навіть, якщо кожен з порядків, заданих компонентами векторного критерію, є повним порядком на цій множині. У зв'язку з цим паретівська задача багатокритеріальної оптимізації має, в загальному, багато непорівнянних оптимальних альтернатив, відшукання яких потребує розробки спеціальних методів. Одним із підходів до знаходження цих альтернатив є заміна паретівської задачі однією або багатьма задачами, оптимальні альтернативи в яких є оптимальними альтернативами і в паретівській задачі.

Нарешті, зазначимо, що проблема заміни будь-якої задачі оптимізації (однокритеріальної чи багатокритеріальної) однією або багатьма простішими задачами оптимізації, такими, щоб їх оптимальні розв'язки були б оптимальними розв'язками і для даної задачі, є також актуальною проблемою.

## 1 ПІДКРИТЕРІЇ ПАРЕТІВСЬКОЇ ЗГОРТКИ КРИТЕРІЇВ

Розглядається вибір на допустимій множині $X$ з критеріями

$$c_j,\ j = 1, 2, \ldots, k, \qquad \textbf{(1)}$$

за умовою їх попарної рівної важливості при оцінці альтернатив. Зазначимо, що альтернатива $\mathbf{x}_*(P) \in X$ вважається оптимальною в паретівській згортці цих критеріїв, якщо і тільки якщо не існує така допустима альтернатива $\mathbf{x} \in X$, яка була б *негіршою* за $\mathbf{x}_*(P)$ за кожним з критеріїв (1) і *кращою* за неї хоча б за одним з цих критеріїв.

В умовах попарної рівної важливості критеріїв (1) можуть бути й інші оптимальності альтернатив, відмінні від оптимальності в паретівській згортці. В подальшому, паретівську згортку критеріїв (1) будемо позначати через $P_1$ $(P \equiv P_1)$, а відповідну оптимальну альтернативу через $\mathbf{x}_*(P_1)$. Тут ми будемо розглядати згортки, які позначатимемо через $P_2, P_3, ..., P_s, ..., P_k$; відповідні оптимальні альтернативи позначатимемо $\mathbf{x}_*(P_2), \mathbf{x}_*(P_3), ... \mathbf{x}_*(P_s), ... \mathbf{x}_*(P_k)$. В кожній з цих згорток, як і в згортці $P_1$, альтернативи $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in X$ будемо вважати *рівноцінними*, якщо і тільки якщо вони *рівноцінні* за кожним з критеріїв (1), тобто, якщо вони *рівноцінні* і в згортці $P_1$. Множину оптимальних альтернатив в згортці $P_s$ позначатимемо через $X_*(P_s)$. Отже, розглядувані згортки відрізнятимуться одна від одної тільки правилами віддачі переваги. Так, альтернатива $\mathbf{x}$ вважається *кращою* за альтернативу $\mathbf{y}$ в згортці $P_2$, якщо і тільки якщо $\mathbf{x}$ *не гірша* за $\mathbf{y}$ за кожним з критеріїв (1) і є *кращою* за неї хоча б за двома з цих критеріїв. Отже, альтернатива $\mathbf{x}_*(P_2) \in X$ є оптимальною в цій згортці, якщо і тільки якщо не існує допустима альтернатива $\mathbf{x} \in X$, яка була б *не гіршою* за $\mathbf{x}_*(P_2)$ за критеріями (1), але була б *кращою* за неї хоча б за двома з цих критеріїв. Дамо означення правила віддачі переваги для згортки $P_s, 1 \le s \le k$.

Означення. Альтернатива $\mathbf{x}$ *краща* за альтернативу $\mathbf{y}$ в згортці $P_s\ (1 \le s \le k)$, якщо і тільки якщо
$c_j(\mathbf{x}) \ge c_j(\mathbf{y}),\ j = 1,2,...,k$,
і існують номери $t_1, t_2, ..., t_s\ (1 \le t_1, t_2, ... t_s \le k)$, такі, що виконуються строгі нерівності
$c_{t_1}(\mathbf{x}) > c_{t_1}(\mathbf{y})$,
$c_{t_2}(\mathbf{x}) > c_{t_2}(\mathbf{y})$,
………………….,
$c_{t_s}(\mathbf{x}) > c_{t_s}(\mathbf{y})$,
тобто альтернатива $\mathbf{x}$ *не гірша* за альтернативу $\mathbf{y}$ в кожному з порядків (1) і *краща* за неї хоча б в $s$ порядках.

Теорема1. Нехай $s_1, s_2 (1 \le s_1, s_2 \le k)$ – будь-які номери. Якщо $s_2 > s_1$, то критерій $\chi_2$, який визначає згортку $P_{s_2}$, є підкритерієм на $X$ критерію $\chi_1$, який визначає згортку $P_{s_1}$, отже, критерій $\chi_1$ є надкритерієм критерію $\chi_2$.

З теореми 1 випливає, що згортки $P_i, i = 2,3,...,k$ є підкритеріями паретівської згортки $P$ критеріїв (1). Отже, кожна альтернатива, оптимальна в кожній з цих згорток є й оптимальною альтернативою в паретівській згортці. Якщо $\mathbf{x}_*(P_{s_1})$ є оптимальною альтернативою в згортці $P_{s_1}$, то вона є оптимальною альтернативою і в згортці $P_{s_2}$ на $X$, якщо $s_1 < s_2$.

Критерій лексикографічної згортки $L$ критеріїв (1) є надкритерієм їх парето-лексикографічної згортки $PL$, отже, $X_*(L) \subset X_*(PL)$. Критерій парето-лексикографічної згортки $PL$ критеріїв (1) є надкритерієм їх паретівської згортки $P$, отже, $X_*(PL) \subset X_*(P)$. Критерій паретівської згортки $P$ критеріїв (1) $(P \equiv P_1)$ є надкритерієм їх згортки $P_2$, отже, $X_*(P_1) \subset X_*(P_2)$. Критерій згортки $P_2$ критеріїв (1) є надкритерієм їх згортки $P_3$, отже, $X_*(P_2) \subset X_*(P_3)$; і т.д.. Критерій згортки $P_{k-1}$ критеріїв (1) є надкритерієм їх згортки $P_k$, отже, $X_*(P_{k-1}) \subset X_*(P_k)$. Таким чином, мають місце для множин альтернатив, оптимальних на $X$ в згортках критеріїв (1), відповідно $L, PL, P_1, P_2, P_3, ..., P_{k-1}, P_k$, такі умови включення

$$X_*(L) \subset X_*(PL) \subset X_*(P_1) \subset X_*(P_2) \subset ... \subset X_*(P_{k-1}) \subset X_*(P_k) \qquad \mathbf{(2)}$$

Таким чином, з відношень (2) випливає, що альтернатива $\mathbf{x}_*(L)$, оптимальна в лексикографічній згортці критеріїв (1) є оптимальною альтернативою на $X$ і в кожній іншій з перерахованих згорток цих критеріїв. Тому, якщо ставиться задача відшукання однієї (будь-якої) альтернативи, оптимальної в будь-якій з цих згорток, то достатньо розв'язати задачу лексикографічної максимізації векторної функції $\mathbf{c}(\mathbf{x}) = (c_1(\mathbf{x}), c_2(\mathbf{x}), ..., c_k(\mathbf{x}))$ на $X$; оптимальний розв'язок цієї задачі і буде шуканою оптимальною альтернативою в цій згортці.

Пропонується спосіб знаходження альтернатив, оптимальних на $X$ в згортці $P_s$, за допомогою розв'язання спеціальних однокритеріальних дискретних задач.

Розглянемо будь-яку невід'ємну лінійну комбінацію критеріїв (1):

$$l(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i c_i(\mathbf{x}) \qquad \textbf{(3)}$$

Тоді, справедлива наступна теорема.

Теорема2. Якщо серед невід'ємних коефіцієнтів $\alpha_i, i = 1,2,...,k$, лінійної комбінації (3) є не більше, ніж $s - 1\ (1 \le s \le k)$ нульових коефіцієнтів, то точка $\mathbf{x}_* \in X$ максимуму функції (3) є оптимальною альтернативою на $X$ в згортці $P_s$ критеріїв (1).

**ВИСНОВКИ**

Запропоновані методи в сукупності, вирішують як з теоретичної , так і з практичної точки зору, важливі проблеми багатокритеріального вибору, або, інакше, важливі проблеми теорії прийняття рішень за багатьма критеріями. Результати роботи дають можливість формалізувати процеси прийняття рішень в умовах, коли альтернативи оцінюються за багатьма критеріями, будь-яка пара з яких або є рівноважливою, або є різноважливою при оцінці альтернатив.

Доведено, що якщо $X_*(L)$ – множина оптимальних альтернатив в лексикографічній згортці багатьох критеріїв, $X_*(PL)$ – множина оптимальних альтернатив в їх парето-лексикографічній згортці, $X_*(LP)$ – множина оптимальних альтернатив в їх лексикографічно - паретівській згортці, $X_*(P)$ – множина оптимальних альтернатив в їх паретівській згортці, то $X_*(L) \subset X_*(PL) \subset X_*(P)$ ; $X_*(L) \subset X_*(LP) \subset X_*(P)$ .

Отже, показано, що багатокритеріальні задачі оптимізації, критеріями в яких є згортки, за умовами рівної важливості або різної важливості, або змішаної важливості критеріїв, зводяться до задач скалярної оптимізації або до задач векторної лексикографічної оптимізації.

**ПЕРЕЛІК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ**


1. Подиновский В.В. О построении множества эффективных стратегий в многокритериальных задачах с упорядоченными по важности критериями // ЖВМ и МФ. - 1978. - №4. - С.908 - 915.
2. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. - М.: Наука, 1982. – 254с.
3. Червак Ю.Ю. Лексикографический поиск решений задач дискретного программирования: текст лекций. – Ужгород: из-во Ужгородского университета, 1977. - 43 С.
4. Pareto V. Vanuel d'economie politigue. - Paris: Giard, 1909.



**Червак Олеся Юріївна,** к. ф.-м. н., доцент кафедри економіки, менеджменту та маркетингу Ужгородського національного університету