УДК 515.122.5

В. М. Бабич (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)
В. О. Пєхтєрєв (Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ТОПОЛОГІЧНОЇ СУМИ

The paper contains a number of generalizations of known facts from the theory of topological sums. In particular, we give sufficient condition for decomposition of topological space into topological sum in terms of fundamental cover. We obtain the criterion for a map to topological sum to be continuous, open, closed and quotient. We prove distributivity of topological sum and topological product in the case of arbitrary index sets.

У роботі отримано ряд узагальнень відомих фактів з теорії топологічних сум. Зокрема, наведено достатню умову розкладу топологічного простору в топологічну суму в термінах фундаментального розбиття. Знайдено критерій неперервності, відкритості, замкненості та факторності довільного відображення в топологічну суму. Встановлена дистрибутивність топологічної суми відносно топологічного добутку у випадку довільних індексних множин.

Поняття топологічної суми, яке вперше виникло в роботі Тітце [1], нині використовується як в наукових статтях, так і в навчально-методичних текстах з топології, оскільки застосування цієї конструкції часто спрощує виклад. В даній статті ми наводимо теоретичне підґрунтя для ширшого застосування цього поняття.

Нагадаємо, що відображення $f : X \to Y$ топологічних просторів називається *відкритим* (*замкненим*), якщо образ відносно f кожної відкритої (замкненої) в X множини відкритий (замкнений) в Y. Відображення f називається *факторним*, якщо топологія на Y є фактортопологією відносно топології на X та відображення f. Зрозуміло, що бієктивне відображення топологічних просторів є факторним у тому й лише в тому разі, коли воно є гомеоморфізмом.

Нехай $\{(X_\alpha, \tau_\alpha), \alpha \in T\}$ — родина топологічних просторів, $\coprod\limits_{\alpha\in T} X_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha\in T}(X_\alpha \times \{\alpha\}) = \{(x_\alpha, \alpha) \mid x_\alpha \in X_\alpha, \alpha \in T\}$ — диз'юнктне об'єднання їх носіїв і

$$X_\alpha \ni x_\alpha \xmapsto{i_\alpha} (x_\alpha, \alpha) \in \coprod_{\alpha\in T} X_\alpha,\ \alpha \in T,$$

— *природні* (*канонічні*) *вкладення*. Фінальна топологія τ на $\coprod\limits_{\alpha\in T} X_\alpha$ відносно канонічних вкладень i_α, $\alpha \in T$, називається *сумою* топологій τ_α, $\alpha \in T$. Легко бачити, що $\tau = \{\coprod\limits_{\alpha\in T} U_\alpha \mid U_\alpha \in \tau_\alpha, \alpha \in T\}$. Пара $(\coprod\limits_{\alpha\in T} X_\alpha, \tau)$ називається *топологічною сумою* родини просторів $\{(X_\alpha, \tau_\alpha), \alpha \in T\}$ (див. [2]).

Кожна підмножина диз'юнктного об'єднання $\coprod\limits_{\alpha\in T} X_\alpha$ має, очевидно, вигляд $\coprod\limits_{\alpha\in T} A_\alpha$, де $A_\alpha \subset X_\alpha$, $\alpha \in T$, — деякі підмножини, і є відкритою (замкненою) в топологічній сумі $\coprod\limits_{\alpha\in T} X_\alpha$ тоді й лише тоді, коли множина A_α відкрита (замкнена) в X_α для кожного $\alpha \in T$. Крім того, канонічне вкладення $i_\alpha : X_\alpha \to \coprod\limits_{\alpha\in T} X_\alpha$ для довільного $\alpha \in T$ є відкритим замкненим відображенням, яке здійснює гомеоморфізм між топологічним простором X_α та підпростором $i_\alpha(X_\alpha) = X_\alpha \times \{\alpha\}$ топологічної суми $\coprod\limits_{\alpha\in T} X_\alpha$, оскільки звуження $i'_\alpha : X_\alpha \to X_\alpha \times \{\alpha\}$ відображення

i_α — неперервна й відкрита біекція. Тому родина $\{X_\alpha \times \{\alpha\}, \alpha \in T\}$ образів є відкритим замкненим розбиттям топологічної суми $\coprod\limits_{\alpha \in T} X_\alpha$.

Відомо, що наявність відкритого розбиття у топологічному просторі є не лише необхідною, а й достатньою умовою того, що цей топологічний простір гомеоморфний деякій топологічній сумі.

Теорема 1 ([3], [4]). *Нехай X — топологічний простір, $\{U_\alpha, \alpha \in T\}$ — довільне його відкрите розбиття. Тоді топологічна сума $\coprod\limits_{\alpha \in T} U_\alpha$ підпросторів U_α, $\alpha \in T$, гомеоморфна простору X.*

Виявляється, даний результат можна узагальнити (теорема 2).

Покриття $\pi = \{U_\alpha, \alpha \in T\}$ топологічного простору X називається *фундаментальним*, якщо кожна множина $A \subset X$, для якої перетин $A \cap U_\alpha$ відкритий в U_α для довільного $\alpha \in T$, відкрита в X. Ясно, що покриття топологічного простору, яке містить фундаментальне підпокриття, фундаментальне, і кожне відкрите та кожне локально скінченне замкнене покриття топологічного простору фундаментальне ([5]).

Теорема 2. *Нехай X — топологічний простір, $\{U_\alpha, \alpha \in T\}$ — довільне його фундаментальне розбиття. Тоді топологічна сума $\coprod\limits_{\alpha \in T} U_\alpha$ підпросторів U_α, $\alpha \in T$, гомеоморфна простору X.*

Доведення. Відображення $\coprod\limits_{\alpha \in T} U_\alpha \ni (x_\alpha, \alpha) \overset{f}{\mapsto} x_\alpha \in X$, очевидно, бієктивне. Далі, для кожної відкритої в X множини U перетин $U_\alpha \cap U$ відкритий в U_α для кожного $\alpha \in T$. Тоді прообраз $f^{-1}(U) = f^{-1}(\bigcup\limits_{\alpha \in T}(U_\alpha \cap U)) = \bigcup\limits_{\alpha \in T} f^{-1}(U_\alpha \cap U) = \bigcup\limits_{\alpha \in T}((U_\alpha \cap U) \times \{\alpha\}) = \coprod\limits_{\alpha \in T}(U_\alpha \cap U)$ відкритий в $\coprod\limits_{\alpha \in T} U_\alpha$, і відображення f неперервне. Нарешті, якщо множина $\coprod\limits_{\alpha \in T} V_\alpha$ відкрита в $\coprod\limits_{\alpha \in T} U_\alpha$, то V_α відкрита в U_α для кожного $\alpha \in T$. Оскільки $f(\coprod\limits_{\alpha \in T} V_\alpha) = f(\bigcup\limits_{\alpha \in T}(V_\alpha \times \{\alpha\})) = \bigcup\limits_{\alpha \in T} f(V_\alpha \times \{\alpha\}) = \bigcup\limits_{\alpha \in T} V_\alpha$ і перетин $(\bigcup\limits_{\alpha \in T} V_\alpha) \cap U_{\alpha'} = V_{\alpha'}$ відкритий в $U_{\alpha'}$ для кожного $\alpha' \in T$, то в силу фундаментальності розбиття образ $f(\coprod\limits_{\alpha \in T} V_\alpha)$ відкритий в X, тобто відображення f відкрите. Отже, f — гомеоморфізм.

Зауважимо, що в попередній теоремі умову фундаментальності розбиття опустити не можна.

Приклад 1. *Родина усіх одноточкових множин є нефундаментальним розбиттям множини $\mathbb{N}$ натуральних чисел з коскінченною топологією. Відповідна топологічна сума $\coprod\limits_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$ є, очевидно, дискретним топологічним простором, і отже, не гомеоморфна $\mathbb{N}$.*

Нехай тепер X, X_α, $\alpha \in T$, — топологічні простори і f — довільне відображення з X у топологічну суму $\coprod\limits_{\alpha \in T} X_\alpha$. Без обмеження загальності можемо вважати, що кожен прообраз $U_\alpha = f^{-1}(X_\alpha \times \{\alpha\})$, $\alpha \in T$, непорожній. Розглянемо звуження $f_\alpha = f|_{U_\alpha}^{X_\alpha \times \{\alpha\}} : U_\alpha \to X_\alpha \times \{\alpha\}$ відображення f. Нехай $f'_\alpha = {i'}_\alpha^{-1} f_\alpha : U_\alpha \to X_\alpha$, де i'_α — гомеоморфізм $i_\alpha|_{X_\alpha}^{X_\alpha \times \{\alpha\}} : X_\alpha \to X_\alpha \times \{\alpha\}$. Оскільки родина $\{U_\alpha, \alpha \in T\}$ є відкритим, а отже, й фундаментальним, розбиттям простору X, то відображення $\coprod\limits_{\alpha\in T} U_\alpha \ni (x_\alpha,\alpha) \overset{g}{\mapsto} x_\alpha \in X$ є гомеоморфізмом (див. теорему 2). Покладемо $f' = fg : \coprod\limits_{\alpha\in T} U_\alpha \to \coprod\limits_{\alpha\in T} X_\alpha$. Тоді відображення f' є прямою сумою відображень f'_α, $\alpha\in T$. Справді, діаграма

$$\begin{tikzcd}
X & \coprod\limits_{\alpha\in T} U_\alpha \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "f'"'] & U_\alpha \arrow[l, "j_\alpha"'] \arrow[d, "f'_\alpha"] \arrow[dr, "f_\alpha"] & \\
 & \coprod\limits_{\alpha\in T} X_\alpha \arrow[from=1-1, "f"'] & X_\alpha \arrow[l, "i_\alpha"'] \arrow[r, "i'_\alpha"] & X_\alpha\times\{\alpha\}
\end{tikzcd},$$

де $i_\alpha : X_\alpha \to \coprod\limits_{\alpha\in T} X_\alpha$ і $j_\alpha : U_\alpha \to \coprod\limits_{\alpha\in T} U_\alpha$ — канонічні вкладення, комутативна для кожного $\alpha\in T$, оскільки для всіх $\alpha\in T$ і будь-якого $x\in U_\alpha$ маємо $(f'j_\alpha)(x) = f'(j_\alpha(x)) = (fg)(x,\alpha) = f(g(x,\alpha)) = f(x)$ і $(i_\alpha f'_\alpha)(x) = (i_\alpha {i'}^{-1}_\alpha f_\alpha)(x) = f_\alpha(x) = f(x)$, тобто $f'j_\alpha = i_\alpha f'_\alpha$.

Тепер, враховуючи, що кожен гомеоморфізм є неперервним відкритим замкненим факторним відображенням, композиція неперервних (відкритих, замкнених, факторних) відображень неперервна (відкрита, замкнена, факторна), а пряма сума відображень неперервна (відкрита, замкнена, факторна) в тому й лише в тому разі, коли кожне відображення неперервне (відкрите, замкнене, факторне), одержуємо наступний результат.

Теорема 3. *Нехай X, X_α, $\alpha\in T$, — топологічні простори, $f : X \to \coprod\limits_{\alpha\in T} X_\alpha$ — довільне відображення, $U_\alpha = f^{-1}(X_\alpha\times\{\alpha\})$ — непорожня множина і $f_\alpha = f|_{U_\alpha}^{X_\alpha\times\{\alpha\}} : U_\alpha \to X_\alpha\times\{\alpha\}$ — звуження відображення f, $\alpha\in T$. Відображення f неперервне (відкрите, замкнене, факторне) тоді й лише тоді, коли відображення f_α неперервне (відкрите, замкнене, факторне) для кожного $\alpha\in T$.*

Цей результат дає можливість отримати дистрибутивний закон для топологічної суми та топологічного добутку у випадку довільних індексних множин, який є узагальненням відомої формули про топологічний добуток двох топологічних сум.

Теорема 4. *Для довільної родини $\{X_{\gamma_\alpha}, \gamma_\alpha\in S_\alpha, \alpha\in T\}$ топологічних просторів має місце гомеоморфізм*

$$\prod_{\alpha\in T}\Big(\coprod_{\gamma_\alpha\in S_\alpha} X_{\gamma_\alpha}\Big) \cong \coprod_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}\in \prod\limits_{\alpha\in T} S_\alpha} \Big(\prod_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha}\Big).$$

Доведення. Відображення

$$\prod_{\alpha\in T}\Big(\coprod_{\gamma_\alpha\in S_\alpha} X_{\gamma_\alpha}\Big) \ni ((x_{\gamma_\alpha},\gamma_\alpha))_{\alpha\in T} \overset{f}{\longmapsto} ((x_{\gamma_\alpha})_{\alpha\in T}, (\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}) \in \coprod_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}\in \prod\limits_{\alpha\in T} S_\alpha} \Big(\prod_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha}\Big),$$

очевидно, бієктивне. Для кожного $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T} \in \prod\limits_{\alpha\in T} S_\alpha$ покладемо

$$U_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}} = f^{-1}\Big(\Big(\prod_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha}\Big)\times\{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}\}\Big) = \prod_{\alpha\in T}(X_{\gamma_\alpha}\times\{\gamma_\alpha\})$$

і розглянемо звуження

$$f_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}} = f\Big|^{(\prod\limits_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha})\times\{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}\}}_{U_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}}} : \prod_{\alpha\in T}(X_{\gamma_\alpha}\times\{\gamma_\alpha\}) \to (\prod_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha})\times\{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}\}$$

та діаграму

$$\begin{tikzcd}
\prod\limits_{\alpha\in T}(X_{\gamma_\alpha}\times\{\gamma_\alpha\}) \arrow[r, "f_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}}"] & (\prod\limits_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha})\times\{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}\} \\
\prod\limits_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha} \arrow[u, "\prod\limits_{\alpha\in T} i'_{\gamma_\alpha}"] \arrow[r, equal] & \prod\limits_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha}\ , \arrow[u, "j'_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}}"']
\end{tikzcd}$$

де $i'_{\gamma_\alpha} = i_{\gamma_\alpha}|^{X_{\gamma_\alpha}\times\{\gamma_\alpha\}}_{X_{\gamma_\alpha}}$ і $j'_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}} = j_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}}\Big|^{(\prod\limits_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha})\times\{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}\}}_{\prod\limits_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha}}$ — гомеоморфізми, індуковані канонічними вкладеннями $i_{\gamma_\alpha} : X_{\gamma_\alpha} \to \coprod\limits_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha}$ і $j_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}} : \prod\limits_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha} \to \coprod\limits_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}\in\prod\limits_{\alpha\in T} S_\alpha}(\prod\limits_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha})$ відповідно. Ця діаграма комутативна, бо

$$\begin{aligned}
(f_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}}\prod_{\alpha\in T} i'_{\gamma_\alpha})((x_{\gamma_\alpha})_{\alpha\in T}) = f((\prod_{\alpha\in T} i'_{\gamma_\alpha})((x_{\gamma_\alpha})_{\alpha\in T})) = f((i_{\gamma_\alpha}(x_{\gamma_\alpha}))_{\alpha\in T}) = \\
= f((x_{\gamma_\alpha},\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}) = ((x_{\gamma_\alpha})_{\alpha\in T},(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}) = j'_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}}((x_{\gamma_\alpha})_{\alpha\in T})
\end{aligned}$$

для всіх $(x_{\gamma_\alpha})_{\alpha\in T} \in \prod\limits_{\alpha\in T} X_{\gamma_\alpha}$.

А позаяк вертикальні стрілки у цій діаграмі є гомеоморфізмами, то всі відображення $f_{(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T}}$, $(\gamma_\alpha)_{\alpha\in T} \in \prod\limits_{\alpha\in T} S_\alpha$, є гомеоморфізмами. За теоремою 3 відображення f — гомеоморфізм.

1. *Tietze H.* Beiträge zur allgemeinen Topologie I // Math. Ann. – 1923. – 88. – P. 290-312.
2. *Бурбаки Н.* Общая топология. Основные структуры. – М.: Наука, 1968. – 272 с.
3. *Александрян Р. А., Мирзаханян Э. А.* Общая топология. – М.: Высшая школа, 1979. – 336 с.
4. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 750 с.
5. *Рохлин В. А., Фукс Д. Б.* Начальный курс топологии. Геометрические главы. – М.: Наука, 1977. – 504 с.

Одержано 27.09.2010