УДК 519.21

Г. І. Сливка-Тилищак, (Ужгородський нац. ун-т,)
О. О. Синявська (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ПОБУДОВА МОДЕЛІ РОЗВ'ЯЗКУ ПРЯМОКУТНОГО ПАРАЛЕЛЕПІПЕДА З ВИПАДКОВИМИ ФАКТОРАМИ

The work suggests a method of the model building of a solution of the problem of rectangular parallelepiped vibrations with the random initial conditions. There are considered strictly subgaussian random processes. The models bring the solution nearer to the given reliability and accuracy in even metric.

У роботі побудовано модель розв'язку задачі про коливання прямокутного паралелепіпеда з субгауссовими випадковими початковими умовами, що наближає його із заданою надійністю та точністю в рівномірній метриці.

1. Вступ. Одним із актуальних напрямків сучасної математичної фізики є вивчення математичних моделей різних явищ та процесів природи. Рівняння математичної фізики з випадковими факторами є математичними моделями реальних процесів, що не описуються детермінованими законами. Дослідження різних властивостей випадкових процесів широко використовуються в застосуванні теорії випадкових процесів, зокрема до моделювання розв'язків крайових задач математичної фізики. В роботі побудовано модель розв'язку задачі про коливання прямокутного паралелепіпеда з субгауссовими випадковими умовами, що наближає його з заданою надійністю та точністю в в рівномірній метриці.

Подібна задача для рівняння гіперболічного типу математичної фізики у багатовимірному випадку коли початкові умови є сумісно строго субгауссові випадкові процеси розглядалась в [[3]]. Для рівняння коливання однорідної струни із субгауссовими випадковими початковими умовами побудовано модель в роботі [[4]].

2. Моделювання розв'язку задачі про коливання прямокутного паралелепіпеда з випадковими початковими умовами

Розглянемо задачу про вільні коливання прямокутного паралелепіпеда $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$ із закріпленими кінцями:

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u_{tt}, \tag{1}$$

$$u|_{t=0} = \xi(x,y,z), \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \eta(x,y,z), \tag{2}$$

$$u|_S = 0, \tag{3}$$

де u – відхилення паралепіпеда від положення рівноваги, що співпадає з площиною x, y, z, S – межа області $0 < x < a$, $0 < y < b$, $0 < z < c$.

Нехай початкові умови $\{\xi(x,y,z),\ x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c]\}$, $\{\eta(x,y,z),\ x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ c \in [0,c]\}$ – незалежні строго субгауссові випадкові поля.

Розв'язок задачі (1)—(3) згідно [[5]] записується у вигляді

$$u(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} V_{klm}(x,y,z)\left[a_{klm}\cos\lambda_{klm}t + b_{klm}\sin\lambda_{klm}t\right], \tag{4}$$

де

$$a_{klm} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \xi(x,y,z) V_{klm}(x,y,z) dxdydz,$$

$$b_{klm} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \eta(x,y,z) V_{klm}(x,y,z) dxdydz,$$

$\lambda_{klm}, V_{klm}(x,y,z)$ – власні значення та відповідні їм власні функції задачі Штурма-Ліувілля

$$V_{xx} + V_{yy} + V_{zz} + \lambda^2 V = 0,$$

$$V|_s = 0.$$

Власні значення λ_{klm} і власні функції $V_{klm}(x,y,z)$ мають вигляд:

$$\lambda^2_{klm} = \pi^2 \left(\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} + \frac{m^2}{c^2} \right),$$

$$V_{klm}(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{abc}} \sin \frac{k\pi}{a} x \sin \frac{l\pi}{b} y \sin \frac{m\pi}{c} z,$$

де $k, l, m = 1, 2, ...$

Побудуємо модель розв'язку задачі (1)—(3), що наближає його з заданою надійністю та точністю в рівномірній метриці.

Нехай $\{\widehat{\xi}(x,y,z),\ x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c]\}$, $\{\widehat{\eta}(x,y,z),\ x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c]\}$ є моделями випадкових полів $\{\xi(x,y,z),\ x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c]\}$, $\{\eta(x,y,z),$
$x \in [0,a],\ y \in [0,b],\ z \in [0,c]\}$. Моделі $\widehat{\xi}(x,y,z)$ і $\widehat{\eta}(x,y,z)$ - незалежні випадкові поля.

Позначимо

$$\widehat{a}_{klm} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \widehat{\xi}(x,y,z) V_{klm}(x,y,z) dxdydz,$$

$$\widehat{b}_{klm} = \int_0^a \int_0^b \int_0^c \widehat{\eta}(x,y,z) V_{klm}(x,y,z) dxdydz.$$

Моделлю випадкового процесу $u(x,y,z,t)$ називатимемо суму

$$\hat{u}^N(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N V_{klm}(x,y,z) \left[\widehat{a}_{klm} \cos \lambda_{klm} t + \widehat{b}_{klm} \sin \lambda_{klm} t \right].$$

Означення 1. *Модель $\hat{u}^N(x,y,z,t)$ наближає розв'язок задачі (1)—(3) $u(x,y,z,t)$, що зображений у вигляді ряду (4) із заданою надійністю $1-\gamma$ та точністю δ в рівномірній метриці області $D = [0,a] \times [0,b] \times [0,c] \times [0,T]$, якщо*

$$P \left\{ \sup_{(x,y,z,t) \in D} |\hat{u}^N(x,y,z,t) - u(x,y,z,t)| > \delta \right\} \le \gamma.$$

Зробимо позначення

$$\Delta_N(x,y,z,t,N) = u(x,y,z,t) - \hat{u}^N(x,y,z,t) = u_N(x,y,z,t) + v_N(x,y,z,t),$$

де

$$u_N(x,y,z,t) = \sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty} V_{klm}(x,y,z)\left[a_{klm}\cos\lambda_{klm}t + b_{klm}\sin\lambda_{klm}t\right],$$

$$v_N(x,y,z,t) = \sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N} V_{klm}(x,y,z)\left[(\widehat{a}_{klm} - a_{klm})\cos\lambda_{klm}t + (\widehat{b}_{klm} - b_{klm})\sin\lambda_{klm}t\right].$$

Теорема 1. *Нехай* $\{\xi(x,y,z),\ x\in[0,a],\ y\in[0,b],\ z\in[0,c]\}$, $\{\eta(x,y,z),\ x\in[0,a],\ y\in[0,b],\ z\in[0,c]\}$ *– незалежні сумісно строго субгауссові випадкові поля такі, що виконуються умови:*

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c \sqrt{E\left(\widehat{\xi}(x,y,z) - \xi(x,y,z)\right)^2}dxdydz \le \Lambda,$$

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^c \sqrt{E\left(\widehat{\eta}(x,y,z) - \eta(x,y,z)\right)^2}dxdydz \le \Lambda.$$

Тоді випадковий процес $\hat{u}^N(x,y,z,t)$ *є моделлю, що наближає випадковий процес* $u(x,y,z,t)$ *з надійністю* $1-\gamma$ *та точністю* δ *в області* $D=[0,a]\times[0,b]\times[0,c]\times[0,T]$, *якщо* γ *та* N *такі, що виконуються нерівності:*

$$\left(T^{1/2} + a^{1/2} + b^{1/2} + c^{1/2}\right) A_N^2 \epsilon_0^2(N) < \delta,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^{1/3}\left(\delta^{2/3} - 3\left(T^{1/2} + a^{1/2} + b^{1/2} + c^{1/2}\right)^{2/3} A_N^{1/3}\epsilon_0^{1/3}(N)\right)}{\epsilon_0(N)}\right)^2 \ge \ln\frac{1}{\gamma},$$

де

$$A_N = \frac{4\pi}{a^{3/2}b^{3/2}c^{3/2}}\Bigg[\Bigg(\Bigg(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Ea_{klm}^2}(kbc + lab + mab)\Bigg)^2 +$$

$$+\Bigg(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Ea_{klm}^2}(kbc + lab + mab)\Bigg)^2\Bigg]^{1/2} +$$

$$+2\sqrt{2}\Lambda\Bigg(\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}(kbc + lac + mab)\right)^2 +$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{klm}{\pi\sqrt{k^2c^2b^2 + l^2a^2c^2 + m^2a^2b^2}}(kbc + lac + mab)\right)^2\Bigg)^{1/2}\Bigg].$$

$$\epsilon_0(N) = \frac{8}{abc}\Big[\left(\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} \sqrt{Ea_{klm}^2} \right)^2 + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} \sum_{m=N+1}^{\infty} \sqrt{Eb_{klm}^2} \right)^2 \right)^{1/2} +$$

$$+2\sqrt{2}\Lambda \left(N + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} \frac{abc}{\sqrt{k^2c^2b^2 + l^2a^2c^2 + m^2a^2b^2}} \right)^2 \Big]^{1/2}.$$

Доведення. Оскільки $\Delta_N(x, y, z, t, N)$ — строго субгауссовий випадковий процес, то використовуючи результат роботи [[3]], можна записати, що для довільного $0 < \theta < 1$

$$P\left\{ \sup_{(x,y,z,t)\in D} |\Delta_N(x, y, z, t, N)| > \delta \right\} \leq 2\widetilde{A}(\delta, \theta),$$

$$\widetilde{A}(\delta, \theta) = \exp\left\{ -\frac{\left(\delta(1-\theta) - \frac{2}{\theta} I(\theta\epsilon_0)\right)^2}{2\epsilon_0^2} \right\}, \tag{5}$$

де ϵ_0 - довільне число, таке що $\epsilon_0 \geq \sup\limits_{(x,y,z,t)\in D} (E|\Delta_N(x, y, z, t, N)|^2)^{1/2}$,

$$I(\theta\epsilon_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\theta\epsilon_0} \left(\ln\left(\frac{a}{2\sigma^{-1}(x)} + 1 \right) + \ln\left(\frac{b}{2\sigma^{-1}(x)} + 1 \right) + \right.$$

$$\left. + \ln\left(\frac{c}{2\sigma^{-1}(x)} + 1 \right) + \ln\left(\frac{T}{2\sigma^{-1}(x)} + 1 \right) \right)^{1/2} dx, \tag{6}$$

де $\sigma(h)$ — неперервна монотонно зростаюча функція, така що $\sigma(0) = 0$.

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leq h\\|y-y_1|\leq h\\|z-z_1|\leq h\\|t-t_1|\leq h}} \left(E|\Delta_N(x, y, z, t, N) - \Delta_N(x_1, y_1, z_1, t_1, N)|^2\right)^{1/2} \leq \sigma(h),$$

$$\sup_{\substack{|x-x_1|\leq h\\|y-y_1|\leq h\\|z-z_1|\leq h\\|t-t_1|\leq h}} \left(E|u_N(x, y, z, t) + v_N(x, y, z_1, t) - u_N(x_1, y_1, z_1, t_1) - v_N(x_1, y_1, z_1, t_1)|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sup_{\substack{|x-x_1|\leq h\\|y-y_1|\leq h\\|z-z_1|\leq h\\|t-t_1|\leq h}} \Big[\left(E|u_N(x, y, z, t) - u_N(x_1, y_1, z_1, t_1)|^2\right)^{1/2} +$$

$$+ \left(E|v_N(x, y, z, t) - v_N(x_1, y_1, z_1, t_1)|^2\right)^{1/2} \Big].$$

$$\sup_{(x,y,z,t)\in D} \left(E|\Delta_N(x, y, z, t, N)|^2\right)^{1/2} = \sup_{(x,y,z,t)\in D} \left(E|u_N(x, y, z, t) + v_N(x, y, z, t)|^2\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \sup_{(x,y,t)\in D} \left[\left(E|u_N(x, y, z, t)|^2\right)^{1/2} + \left(E|v_N(x, y, z, t)|^2\right)^{1/2} \right].$$

Оскільки випадкові процеси $\xi(x,y,z)$ та $\eta(x,y,z)$ незалежні, тобто a_{klm} і b_{klm} незалежні, то мають місце такі співвідношення:

$$E|u_N(x,y,z,t)-u_N(x_1,y_1,z_1,t_1)|^2=$$

$$=E\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}V_{klm}(x,y,z)\left[a_{klm}\cos\lambda_{klm}t+b_{klm}\sin\lambda_{klm}t\right]-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}V_{klm}(x_1,y_1,z_1)\left[a_{klm}\cos\lambda_{klm}t_1+b_{klm}\sin\lambda_{klm}t_1\right]\right|^2=$$

$$=E\left|\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}a_{klm}\sqrt{\frac{8}{abc}}\left[\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{l\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{c}z\cos\lambda_{klm}t-\right.\right.$$

$$\left.-\sin\frac{k\pi}{a}x_1\sin\frac{l\pi}{b}y_1\sin\frac{m\pi}{c}z_1\cos\lambda_{klm}t_1\right]+$$

$$+\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}b_{klm}\sqrt{\frac{8}{abc}}\left[\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{l\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{c}z\sin\lambda_{klm}t-\right.$$

$$\left.\left.-\sin\frac{k\pi}{a}x_1\sin\frac{l\pi}{b}y_1\sin\frac{m\pi}{c}z_1\sin\lambda_{klm}t_1\right]\right|^2\le$$

$$\le\frac{8}{abc}\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sum_{p=N+1}^{\infty}\sum_{q=N+1}^{\infty}\sum_{r=N+1}^{\infty}|Ea_{klm}a_{pqr}|\times$$

$$\times\left|\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{l\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{c}z\cos\lambda_{klm}t-\sin\frac{k\pi}{a}x_1\sin\frac{l\pi}{b}y_1\sin\frac{m\pi}{c}z_1\cos\lambda_{klm}t_1\right|\times$$

$$\times\left|\sin\frac{p\pi}{a}x\sin\frac{q\pi}{b}y\sin\frac{r\pi}{c}z\cos\lambda_{pqr}t--\sin\frac{p\pi}{a}x_1\sin\frac{q\pi}{b}y_1\sin\frac{r\pi}{c}z_1\cos\lambda_{pqr}t_1\right|+$$

$$+\frac{8}{abc}\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sum_{p=N+1}^{\infty}\sum_{q=N+1}^{\infty}\sum_{r=N+1}^{\infty}|Eb_{klm}b_{pqr}|\times$$

$$\left|\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{l\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{c}z\sin\lambda_{klm}t-\sin\frac{k\pi}{a}x_1\sin\frac{l\pi}{b}y_1\sin\frac{m\pi}{c}z_1\sin\lambda_{klm}t_1\right|\times$$

$$\times\left|\sin\frac{k\pi}{p}x\sin\frac{l\pi}{q}y\sin\lambda_{kl}t-\sin\frac{n\pi}{a}x_1\sin\frac{p\pi}{b}y_1\sin\frac{q\pi}{c}z_1\sin\lambda_{npq}t_1\right|=$$

$$=\frac{8}{abc}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Ea_{klm}^2}\left|\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{l\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{c}z\cos\lambda_{klm}t-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\sin\frac{k\pi}{a}x_1\sin\frac{l\pi}{b}y_1\sin\frac{m\pi}{c}z_1\cos\lambda_{klm}t_1\right|\right)^2+$$

$$+\frac{8}{abc}\left(\sum_{n=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Eb_{klm}^2}\left|\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{l\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{c}z\sin\lambda_{klm}t-\right.\right.$$

$$-\sin\frac{k\pi}{a}x_1\sin\frac{l\pi}{b}y_1\sin\frac{m\pi}{c}z_1\sin\lambda_{klm}t_1\bigg|\bigg)^2.$$

Легко бачити, що

$$\left|\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{l\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{c}z\cos\lambda_{klm}t-\sin\frac{k\pi}{a}x_1\sin\frac{l\pi}{b}y_1x\sin\frac{m\pi}{c}z_1\cos\lambda_{klm}t_1\right|\le$$

$$\le\left|\sin\frac{k\pi}{a}x-\sin\frac{k\pi}{a}x_1\right|+\left|\sin\frac{l\pi}{b}y-\sin\frac{l\pi}{b}y_1\right|+$$

$$+\left|\sin\frac{m\pi}{c}z-\sin\frac{m\pi}{c}z_1\right|+|\cos\lambda_{klm}t-\cos\lambda_{klm}t_1|\le$$

$$\le 2\left|\sin\frac{\frac{k\pi}{a}(x-x_1)}{2}\right|+2\left|\sin\frac{\frac{l\pi}{b}(y-y_1)}{2}\right|+2\left|\sin\frac{\frac{m\pi}{c}(z-z_1)}{2}\right|+2\left|\sin\frac{\lambda_{klm}(t-t_1)}{2}\right|\le$$

$$\le\frac{k\pi}{a}h+\frac{l\pi}{b}h+\frac{m\pi}{c}h+\lambda_{klm}h=\pi h\left(\frac{k}{a}+\frac{l}{b}+\frac{m}{c}+\sqrt{\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}+\frac{m^2}{c^2}}\right)\le$$

$$\le 2\pi h\left(\frac{k}{a}+\frac{l}{b}+\frac{m}{c}\right)=2\pi h\left(\frac{kbc+lac+mab}{abc}\right).$$

Аналогічно

$$\left|\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{l\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{c}z\sin\lambda_{klm}t-\sin\frac{k\pi}{a}x_1\sin\frac{l\pi}{b}y_1\sin\frac{m\pi}{c}z_1\sin\lambda_{klm}t_1\right|\le$$

$$\le 2\pi h\left(\frac{k}{a}+\frac{l}{b}+\frac{m}{c}\right)=\frac{2\pi h}{abc}(kbc+lac+mab).$$

Отже

$$\left(E|u_N(x,y,z,t)-u_N(x_1,y_1,z_1,t_1)|^2\right)^{1/2}\le$$

$$\le\left(\left(\frac{8}{abc}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Ea_{klm}^2}\left(\frac{2\pi h}{abc}(kbc+lac+mab)\right)\right)\right)^2+\right.$$

$$\left.+\frac{8}{abc}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Eb_{klm}^2}\left(\frac{2\pi h}{abc}(kbc+lac+mab)\right)\right)^2\right)^{1/2}=$$

$$=\frac{8\pi h}{a^{\frac32}b^{\frac32}c^{\frac32}}\left(\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Ea_{klm}^2}(kbc+lac+mab)\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Eb_{klm}^2}(kbc+lac+mab)\right)^2\right)^{1/2}.$$

Такими ж міркуваннями можна отримати, що

$$\left(E|v_N(x,y,z,t)-v_N(x_1,y_1,z_1,t_1)|^2\right)^{1/2}\le$$

$$\leq \frac{8\pi h}{a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{3}{2}}c^{\frac{3}{2}}}\left(\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sqrt{E(\widehat{a}_{klm}-a_{klm})^2}(kbc+lac+mab)\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sqrt{E(\widehat{b}_{klm}-b_{klm})^2}(kbc+lac+mab)\right)^2\right)^{1/2}.$$

Розглянемо

$$E(\widehat{a}_{klm}-a_{klm})^2=$$

$$=E\left(\int_0^a\int_0^b\int_0^c\left(\widehat{\xi}(x,y,z)-\xi(x,y,z)\right)V_{klm}(x,y,z)dxdydz\right)^2=$$

$$=E\left(\sqrt{\frac{8}{abc}}\int_0^a\int_0^b\int_0^c\left(\widehat{\xi}(x,y,z)-\xi(x,y,z)\right)\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{l\pi}{b}y\sin\frac{m\pi}{c}z\right)^2\leq$$

$$\leq\left(\sqrt{\frac{8}{abc}}\int_0^a\int_0^b\int_0^c\sqrt{E\left(\widehat{\xi}(x,y,z)-\xi(x,y,z)\right)^2}dxdydz\right)^2\leq 8\Lambda^2.$$

Аналогічно

$$E(\widehat{b}_{klm}-b_{klm})^2=8\Lambda^2\frac{k^2l^2m^2}{\pi^2(k^2c^2b^2+l^2a^2c^2+m^2a^2b^2)}.$$

Таким чином

$$E\left[|v_N(x,y,z,t)-v_N(x_1,y_1,z_1,t_1)|^2\right]^{1/2}\leq$$

$$\leq\frac{8\pi h}{a^{3/2}b^{3/2}c^{3/2}}\left(\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}2\sqrt{2}\Lambda(kbc+lac+mab)\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}2\sqrt{2}\Lambda\frac{klm}{\pi\sqrt{k^2c^2b^2+l^2a^2c^2+m^2a^2b^2}}(kbc+lac+mab)\right)^2\right)^{1/2}.$$

Отже отримаємо, що $\sigma(h)=hA_N$, де

$$A_N=\frac{4\pi}{a^{3/2}b^{3/2}c^{3/2}}\Bigg[\Bigg(\Bigg(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Ea_{klm}^2}(kbc+lab+mab)\Bigg)^2+$$

$$+\Bigg(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Ea_{klm}^2}(kbc+lab+mab)\Bigg)^2\Bigg]^{1/2}+$$

$$+2\sqrt{2}\Lambda\Bigg(\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}(kbc+lac+mab)\right)^2+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{klm}{\pi\sqrt{k^2c^2b^2+l^2a^2c^2+m^2a^2b^2}}(kbc+lac+mab)\right)^2\Bigg)^{1/2}\Bigg].$$

Легко бачити, що мають такі співвідношення:

$$E|u_N(x,y,z,t)|^2 \le$$

$$\le \frac{8}{abc}\left(\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Ea_{klm}^2}\right)^2+\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Eb_{klm}^2}\right)^2\right),$$

$$E|v_N(x,y,t)|^2 \le$$

$$\le \frac{8}{abc}\left(\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sqrt{E\left(\widehat{a}_{klm}-a_{klm}\right)^2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\sqrt{E\left(\widehat{b}_{klm}-b_{klm}\right)^2}\right)^2\right).$$

Отже з останніх співвідношень випливає, що

$$\epsilon_0(N)=\frac{8}{abc}\Bigg[\left(\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Ea_{klm}^2}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sum_{m=N+1}^{\infty}\sqrt{Eb_{klm}^2}\right)^2\right)^{1/2}+$$

$$+2\sqrt{2}\Lambda\left(N+\frac{1}{\pi^2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\frac{abc}{\sqrt{k^2c^2b^2+l^2a^2c^2+m^2a^2b^2}}\right)^2\Bigg]^{1/2}.$$

Підставивши знайдені значені $\sigma(h)$ та $\epsilon_0(N)$ у рівність (6), одержуємо:

$$I(\theta\varepsilon_0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^w\left(\ln\left(\frac{aA_N}{2x}+1\right)+\right.$$

$$\left.+\ln\left(\frac{bA_N}{2x}+1\right)+\ln\left(\frac{cA_N}{2x}+1\right)+\ln\left(\frac{TA_N}{2x}+1\right)\right)^{1/2}dx \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^w\left(\ln\left(\frac{aA_N}{2x}+1\right)\right)^{1/2}dx+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^w\left(\ln\left(\frac{bA_N}{2x}+1\right)\right)^{1/2}dx+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^w\left(\ln\left(\frac{cA_N}{2x}+1\right)\right)^{1/2}dx+\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^w\left(\ln\left(\frac{TA_N}{2x}+1\right)\right)^{1/2}dx \le$$

$$\le \Bigg[\int_0^w\left(\frac{aA_N}{2x}\right)^{1/2}dx+\int_0^w\left(\frac{bA_N}{2x}\right)^{1/2}dx+\int_0^w\left(\frac{cA_N}{2x}\right)^{1/2}dx+$$

$$+\int\limits_0^z \left(\frac{TA_N}{2x}\right)^{1/2} dx\Bigg] = \left(T^{1/2}+a^{1/2}+b^{1/2}+c^{1/2}\right) A_N^{1/2}\epsilon_0^{1/2}(N),$$

тоді рівність (5) можна записати у вигляді

$$\widetilde{A}(\delta,\theta) \le exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta(1-\theta)-\frac{2}{\theta^{1/2}}\left(T^{1/2}+a^{1/2}+b^{1/2}+c^{1/2}\right)^{2/3}A_N^{1/2}\epsilon_0^{1/2}(N)}{\epsilon_0(N)}\right)^2\right\}.$$

Якщо $\left(T^{1/2}+a^{1/2}+b^{1/2}+c^{1/2}\right)A_N^2\epsilon_0^2(N) < \delta$, то найменшого значення $\widetilde{A}(\delta,\theta)$ набуває при

$$\theta = \frac{\left(T^{1/2}+a^{1/2}+b^{1/2}+c^{1/2}\right)^{2/3}A_N^{1/3}\epsilon_0^{1/3}(N)}{\delta^{2/3}},$$

а саме

$$\min_\theta \widetilde{A}(\delta,\theta) = exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\delta(1-\theta)-\frac{2}{\theta^{1/2}}\left(T^{1/2}+a^{1/2}+b^{1/2}+c^{1/2}\right)^{2/3}A_N^{1/2}\epsilon_0^{1/2}(N)}{\epsilon_0(N)}\right)^2\right\}.$$

Отже, щоб при точності δ отримати модель, що має надійність $1-\gamma$, потрібно, щоб виконувались нерівності:

$$\left(T^{1/2}+a^{1/2}+b^{1/2}+c^{1/2}\right)A_N^2\epsilon_0^2(N) < \delta,$$

$$\left(\frac{\delta^{1/3}\left(\delta^{2/3}-3\left(T^{1/2}+a^{1/2}+b^{1/2}+c^{1/2}\right)^{2/3}A_N^{1/3}\epsilon_0^{1/3}(N)\right)}{\epsilon_0(N)}\right)^2 \ge 2\ln\frac{1}{\gamma}.$$

3. Приклад

Розглянемо задачу про вільні коливання прямокутної мембрани $0<x<a$, $0<y<b$ із закріпленими кінцями:

$$u_{xx}+u_{yy}=u_{tt}, \tag{7}$$

$$u|_{t=0}=\xi(x,y),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\eta(x,y), \tag{8}$$

$$u|_S = 0, \tag{9}$$

де u – відхилення мембрани від положення рівноваги, що співпадає з площиною x, y, а S – межа прямокутника $0<x<a$, $0<y<b$.

Нехай початкові умови $\{\xi(x,y), x\in[0,a], y\in[0,b]\}$, $\{\eta(x,y), x\in[0,a], y\in[0,b]\}$ – незалежні строго субгауссові випадкові поля.

Розв'язок задачі (7)— (9) записується у вигляді

$$u(x,y,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}V_{kl}(x,y)\left[a_{kl}\cos\sqrt{\lambda_{kl}}t+b_{kl}\sin\sqrt{\lambda_{kl}}t\right],$$

де власні функції $V_{kl}(x,y)$ є розв'язком рівняння

$$V_{xx}+V_{yy}+\lambda V=0,$$

які задовольняють умові (9). Використовуючи метод відокремлення змінних $V_{kl}(x,y)$ можна записати у вигляді

$$V_{kl}(x,y)=\frac{2}{\sqrt{ab}}\sin\frac{k\pi}{a}x\sin\frac{l\pi}{b}y.$$

Власні функції $V_{kl}(x,y)$ відповідають власним значенням λ_{kl}

$$\lambda_{kl}=\pi^2\left(\frac{k^2}{a^2}+\frac{l^2}{b^2}\right),$$

де $k,l=1,2,....$
Коефіцієнти a_{kl} і b_{kl} мають вигляд

$$a_{kl}=\int\limits_0^a\int\limits_0^b\xi(x,y)V_{kl}(x,y)dxdy,$$

$$b_{kl}=\int\limits_0^a\int\limits_0^b\eta(x,y)V_{kl}(x,y)dxdy.$$

Позначимо $D=[0,a]\times[0,b]\times[0,T]$.

Нехай $\{\widehat{\xi}(x,y),x\in[0,a],y\in[0,b]\}$, $\{\widehat{\eta}(x,y),x\in[0,a],y\in[0,b]\}$ є моделями випадкових полів $\{\xi(x,y),x\in[0,a],y\in[0,b]\}$, $\{\eta(x,y),x\in[0,a],y\in[0,b]\}$. Моделі $\widehat{\xi}(x,y)$ і $\widehat{\eta}(x,y)$ - незалежні випадкові поля.
Позначимо

$$\widehat{a}_{kl}=\int\limits_0^a\int\limits_0^b\widehat{\xi}(x,y)V_{kl}(x,y)dxdy,$$

$$\widehat{b}_{kl}=\int\limits_0^a\int\limits_0^b\widehat{\eta}(x,y)V_{kl}(x,y)dxdy.$$

Моделлю випадкового процесу $u(x,y,t)$ називатимемо суму

$$\hat{u}^N(x,y,t)=\sum_{k=1}^N\sum_{l=1}^N V_{kl}(x,y)\left[\widehat{a}_{kl}\cos\sqrt{\lambda_{kl}}t+\widehat{b}_{kl}\sin\sqrt{\lambda_{kl}}t\right].$$

Зробимо позначення

$$\Delta_N(x,y,t,N)=u(x,y,t)-\hat{u}^N(x,y,t)=u_N(x,y,t)+v_N(x,y,t),$$

де

$$u_N(x,y,t)=\sum_{k=N+1}^\infty\sum_{l=N+1}^\infty V_{kl}(x,y)\left[a_{kl}\cos\sqrt{\lambda_{kl}}t+b_{kl}\sin\sqrt{\lambda_{kl}}t\right],$$

$$v_N(x,y,t)=\sum_{k=1}^N\sum_{l=1}^N V_{kl}(x,y)\left[(\widehat{a}_{kl}-a_{kl})\cos\sqrt{\lambda_{kl}}t+(\widehat{b}_{kl}-b_{kl})\sin\sqrt{\lambda_{kl}}t\right].$$

Теорема 2. *Нехай* $\{\xi(x,y), x \in [0,a], y \in [0,b]\}$, $\{\eta(x,y), x \in [0,a], y \in [0,b]\}$ *— незалежні сумісно строго субгауссові випадкові процеси такі, що виконуються умови:*

$$\int_0^a \int_0^b \sqrt{E\left(\widehat{\xi}(x,y) - \xi(x,y)\right)^2} dxdy \leq \Lambda,$$

$$\int_0^a \int_0^b \sqrt{E\left(\widehat{\eta}(x,y) - \eta(x,y)\right)^2} dxdy \leq \Lambda.$$

Тоді випадковий процес $\hat{u}^N(x,y,t)$ *є моделлю, що наближає випадковий процес* $u(x,y,t)$ *з надійністю* $1-\gamma$ *та точністю* δ *в області* $D = [0,a] \times [0,b] \times [0,T]$, *якщо* γ *та* N *такі, що виконуються нерівності:*

$$\left(T^{1/2} + a^{1/2} + b^{1/2}\right) A_N^2 \epsilon_0^2(N) < \delta,$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\delta^{1/3}\left(\delta^{2/3} - 3\left(T^{1/2} + a^{1/2} + b^{1/2}\right)^{2/3} A_N^{1/3} \epsilon_0^{1/3}(N)\right)}{\epsilon_0(N)}\right)^2 \geq \ln \frac{1}{\gamma},$$

де

$$A_N = \frac{2\pi}{a^{3/2} b^{3/2}} \left[\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} \sqrt{E a_{kl}^2}(kb + la)\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} \sqrt{E b_{kl}^2}(kb + la)\right)^2\right]^{1/2} +$$

$$+2\Lambda \left[\left(\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} (kb + la)\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \frac{kl}{\pi\sqrt{k^2a^2 + l^2b^2}}(kb + la)\right)^2\right]^{1/2} \Bigg),$$

$$\epsilon_0(N) = \frac{4}{ab}\Bigg[\left(\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} \sqrt{E a_{kl}^2}\right)^2 + \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \sum_{l=N+1}^{\infty} \sqrt{E b_{kl}^2}\right)^2\right)^{1/2} +$$

$$+2\Lambda\left(N + \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \frac{ab}{\sqrt{k^2a^2 + l^2b^2}}\right)^{1/2} \Bigg]^{1/2}.$$

Покладемо тепер в умовах теореми (2) $a = b = \pi$, $T = \pi$, $b_{kl} = 0$, $\eta(x,y) = 0$, а $\xi(x,y)$ — гауссів випадковий процес такий, що

$$\xi(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \xi_j \sin(j\,(xy)),$$

де ξ_j — незалежні нормально розподілені випадкові величини такі, що $E\xi_j = 0$, $E\xi_j^2 = b^j$, де b — деяке число таке, що $0 < b < 1$.

Нехай

$$\hat{\xi}(x,y) = \hat{\xi}_M(x,y) = \sum_{j=1}^{M} \xi_j \sin(j\,(xy)).$$

Отже

$$\sqrt{\mathbb{E}\left(\xi(x,y) - \hat{\xi}_M(x,y)\right)^2} = \sum_{j=M+1}^{\infty} b^j \sin^2(j\,(xy)) \le \sum_{j=M+1}^{\infty} b^j = \frac{b^{M+1}}{1-b},$$

тобто при заданому Λ M вибирається так, щоб виконувалась нерівність

$$\frac{\pi^2 b^{M+1}}{1-b} < \Lambda, \quad \text{тобто} \quad M \ge \frac{\ln(\Lambda(1-b))}{\ln(\pi^2 b)}.$$

В цьому випадку $b_{kl} = 0$,

$$a_{kl} = \int_0^a \int_0^b \xi(x,y) V_{kl}(x,y)\,dxdy = \xi_{kl},$$

тобто $Ea_{kl}^2 = b^{kl}$. Отже одержимо наступну рівність

$$\hat{u}^N(x,y,t) = \frac{2}{\sqrt{ab}} \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} \hat{a}_{kl} \sin\frac{k\pi}{a}x \sin\frac{l\pi}{b}y \cos\left(\pi\sqrt{\frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2}}t\right).$$

Отже

$$A_N = \frac{2}{\pi}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sqrt{b^{kl}}\,(k+l) + 2\Lambda\left[\left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}(k+l)\right)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left(\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{kl(k+l)}{\sqrt{k^2+l^2}}\right)^2\right]^{1/2}\right),$$

$$\epsilon_0(N) = \frac{4}{\pi^2}\left[\sum_{k=N+1}^{\infty}\sum_{l=N+1}^{\infty}\sqrt{b^{kl}} + 2\Lambda\left(N + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\sum_{l=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{k^2+l^2}}\right)^{1/2}\right].$$

Таким чином, шуканою моделлю буде модель, де N та Λ підібрані так, що розв'язавши нерівність

$$A_N^2 \epsilon_0^2(N) < \frac{\delta}{3\sqrt{\pi}},$$

$$\left(\frac{\delta^{1/3}\left(\delta^{2/3} - (243\pi A_N \epsilon_0(N))^{1/3}\right)}{\epsilon_0(N)}\right)^2 \ge 2\ln\left(\frac{1}{\gamma}\right),$$

отримаємо, що модель $\hat{u}^N(x,y,t)$ наближає випадковий процес $u(x,y,t)$ із заданою надійністю та точністю.

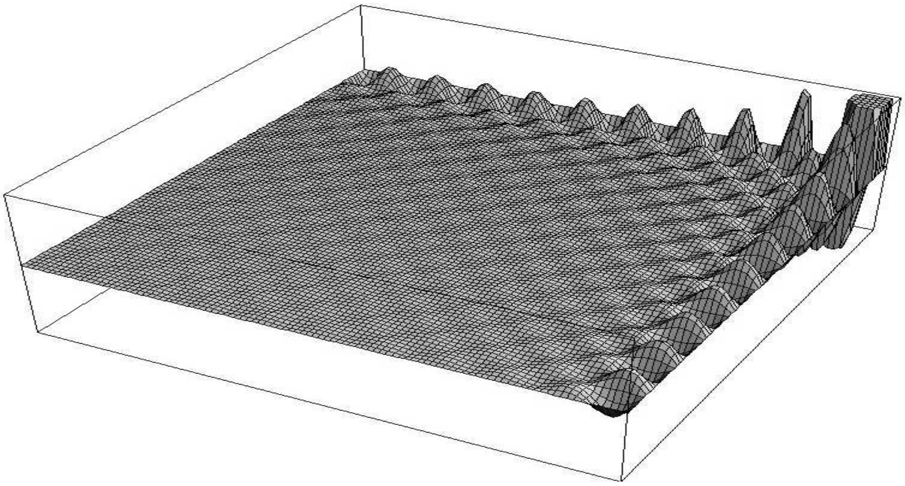

Рис. 1. Модель коливання мембрани в момент часу $t = 0$

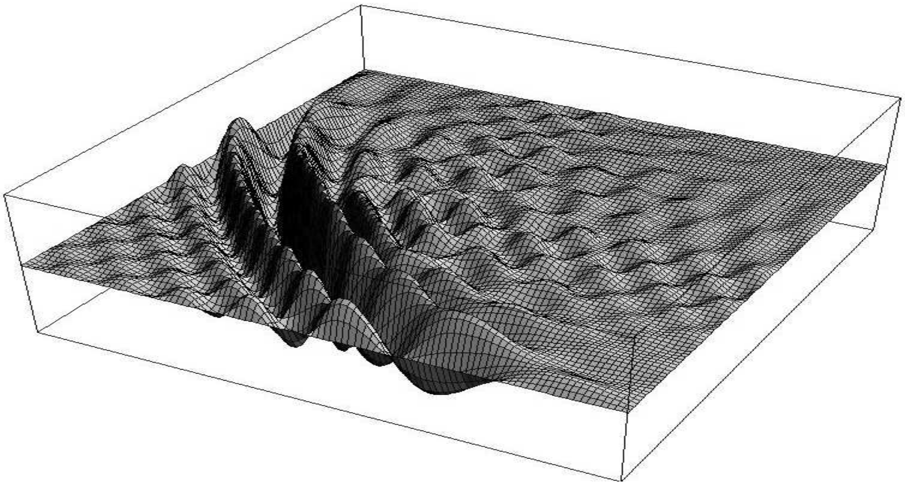

Рис. 2. Модель коливання мембрани в момент часу $t = 1$

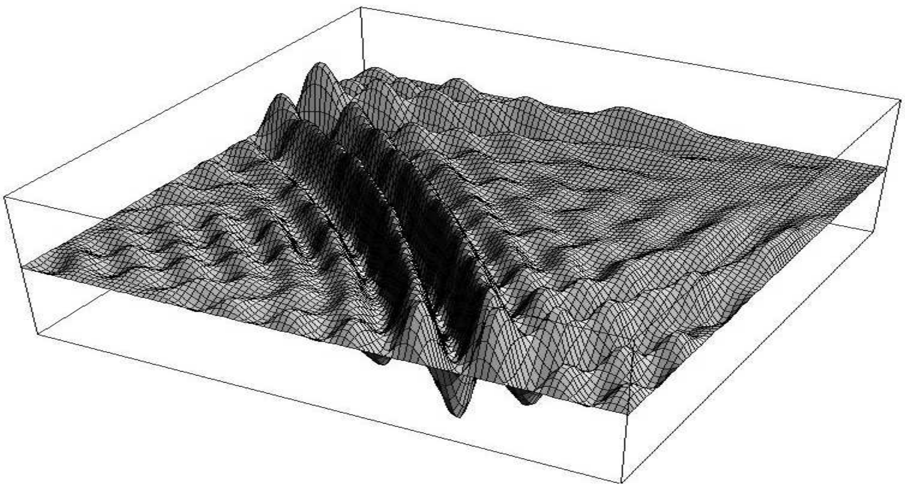

Рис. 3. Модель коливання мембрани в момент часу $t = 2$

1. *V. V. Buldygin, Yu. V. Kozachenko.* Metric Characterization of Random Variables and Random processes, – American Mathematical Society, Providence, Rhode, 2000.
2. *Б.В. Довгай, Ю.В. Козаченко, Г.І. Сливка-Тилищак Г.І.* Крайові задачі математичної фізики з випадковими факторами.Монографія, Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008 – 175с.
3. Козаченко Ю.В., Сливка Г.І. Про моделювання розв'язку гіперболічного рівняння з випадковими початковими умовами // Теорія ймов. та матем. статист. – 2006. – Вип. 74. – С. 52–67.
4. Сливка Г.І., Тегза А.М. Моделювання розв'язку коливання однорідної струни з випадковими початковими умовами // Науковий вісник Ужг. ун-ту, 2005. – Вип. 10–11, С.131–137.
5. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. – Москва: Гос. изд. технико-теоретической литературы, 1954. – С. 338–345, 397–402.

Одержано 19.10.2010