УДК 517.9

С. І. Балога, І. І. Король(Ужгородський нац. ун-т)

ІНВАРІАНТНІ МНОГОВИДИ ОДНОГО КЛАСУ СИСТЕМ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

In this article some classes of differential equations defined in direct product of m-measurable torus and n-measurable Euclidean space for which the conditions of existence of invariant toroidal manifolds are satisfied, are invertigated.

В даній статті досліджено класи диференціальних рівнянь, визначених у прямому добутку m-вимірного тора і n-вимірного евклідового простору, для яких умови існування інваріантних тороїдальних многовидів виконуються.

Системи диференціальних рівнянь, що є розширенням динамічної системи на торі, описують процеси, що носять коливний характер. В останні роки теорія розширень динамічних рівнянь на торі інтенсивно розвивається. Даній тематиці присвячено ряд робіт, серед яких [1-4]. Важливим питанням є встановлення умов існування інваріантних многовидів таких систем та дослідження їх стійкості. Дана робота присвячена дослідженню умов існування інваріантних многовидів лінійної та слабконелінійної систем диференціальних рівнянь, визначених в прямому добутку тора та евклідового простору, та виокремлено деякі класи задач, для яких умови існування мають місце.

Розглянемо систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + f(\varphi), \tag{1}$$

в якій $\varphi \in T^m$, $x \in R^n$, $a(\varphi)$ — ліпшицева векторна функція на m-вимірному торі T^m, 2π-періодична по кожній компоненті φ_j, $j = 1, 2, ..., m$. $\Lambda(\varphi)$ і $f(\varphi)$ — неперервні матрична та векторна 2π-періодичні по φ_j функції відповідно.

Позначимо через $\varphi_t(\varphi)$ розв'язок першого із рівнянь системи (1) такий, що $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, а через $\Omega^t_\tau(\varphi)$— матрицант однорідної системи

$$\dot{x} = \Lambda(\varphi_t(\varphi))x \tag{2}$$

залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра. Покладемо

$$G(0,\tau,\varphi) = \begin{cases} \Omega^0_\tau(\varphi)C(\varphi_\tau(\varphi)), & \tau \leq 0, \\ \Omega^0_\tau(\varphi)(C(\varphi_\tau(\varphi)) - E), & \tau > 0, \end{cases}$$

де $C(\varphi), \varphi \in T^m$ — неперервна матрична функція, і назвемо функцією Гріна-Самойленка системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x,$$

якщо інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \parallel G(0,\tau,\varphi) \parallel d\tau$ рівномірно обмежений по φ:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \parallel G(0,\tau,\varphi) \parallel d\tau \leq k < \infty, \tag{3}$$

для всіх $\varphi \in T^m$. Функція $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє систему (2) при $t \neq \tau$, а при $t=\tau$ вона має розрив першого роду зі стрибком

$$G(\tau+0,\tau,\varphi) - G(\tau-0,\tau,\varphi) = E.$$

Нехай Ω_φ — ω-гранична множина розв'язку першого із рівнянь системи (1) $\varphi_t(\varphi)$ такого, що $\varphi_0(\varphi)=\varphi$. Як відомо, наприклад із [1], Ω_φ не пуста множина для всіх $\varphi \in T^m$ в силу компактності фазового простору T^m, $\Omega = \bigcup\limits_{\varphi\in T^m} \Omega_\varphi$. Позначимо $A = \bigcup\limits_{\varphi\in T^m} A_\varphi$, де A_φ — α-гранична множина розв'язку першого із рівнянь системи (1) $\varphi_t(\varphi)$ такого, що $\varphi_0(\varphi)=\varphi$.

Нехай для всіх $\varphi \in T^m$ існує границя

$$\lim_{|t|\to+\infty} \Lambda(\varphi_t(\varphi)) = \Lambda. \tag{4}$$

Це означає, що матрична функція $\Lambda(\varphi)$ на множинах Ω і A є сталою матрицею $\Lambda(\varphi)=\Lambda$ для всіх $\varphi \in \Omega \cup A$. Крім того, будемо розглядати випадок, коли матриця $\Lambda(\varphi)$ блочно-діагонального вигляду:

$$\Lambda(\varphi_t(\varphi)) = \begin{pmatrix} \Lambda_-(\varphi_t(\varphi)) & 0 \\ 0 & \Lambda_+(\varphi_t(\varphi)) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Теорема 1. *Якщо дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці Λ відмінні від нуля $Re(\lambda_j(\Lambda)) \neq 0$, $(j=1,2,...,n)$, причому $Re(\lambda_j(\Lambda)) < 0$, $j=1,2,...,k$ і $Re(\lambda_j(\Lambda)) > 0$, $j=k+1,...,n$, то для довільної неперервної 2π-періодичної по φ_j, $j=1,2,...,m$ функції $f(\varphi)$ система (1) має інваріантну тороїдальну множину $x=u(\varphi)$.*

Доведення. Розглянемо лінійну неоднорідну систему диференціальних рівнянь, залежну від $\varphi \in T^m$ як від параметра:

$$\dot{x} = \Lambda(\varphi_t(\varphi))x + f(\varphi_t(\varphi)). \tag{6}$$

Позначимо через $\Omega^t_\tau(\varphi,\Lambda_-)$ і $\Omega^t_\tau(\varphi,\Lambda_+)$ — матриціанти однорідних систем

$$\dot{x_1} = \Lambda_-(\varphi_t(\varphi))x_1$$

і

$$\dot{x_2} = \Lambda_+(\varphi_t(\varphi))x_2$$

відповідно, для яких справедливі оцінки

$$\begin{aligned} \|\Omega^t_\tau(\varphi,\Lambda_-)\| \le Ke^{-\gamma(t-\tau)}, \quad t \ge \tau, \\ \|\Omega^t_\tau(\varphi,\Lambda_+)\| \le Ke^{\gamma(t-\tau)}, \quad t \le \tau, \end{aligned} \tag{7}$$

при деяких доданих K і γ та при будь-яких $t,\tau \in R$, $\varphi \in T^m$. Покажемо справедливість першої із нерівностей (7). Для цього проведемо міркування, аналогічні як у [2].

Оскільки матрицант $\Omega^t_\tau(\varphi,\Lambda_-)$ допускає інтегральне представлення

$$\Omega^t_\tau(\varphi,\Lambda_-) = e^{\Lambda_-(t-\tau)} + \int\limits_\tau^t e^{\Lambda_-(t-s)}(\Lambda_-(\varphi_s(\varphi)) - \Lambda_-)\Omega^t_s(\varphi,\Lambda_-)ds \tag{8}$$

і при деяких $K>0$ і $\gamma>0$

$$\left\|e^{\Lambda_-(t-\tau)}\right\| \le Ke^{-\gamma(t-\tau)},\ t\ge\tau,$$

а при достатньо великому $t\ge T$ і досить малому a

$$\|\Lambda_-(\varphi_t(\varphi))-\Lambda_-\|\le a,$$

з рівності (8) маємо

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi,\Lambda_-)\right\|\le Ke^{-\gamma(t-\tau)}+\int\limits_\tau^t Ke^{-\gamma(t-s)}\left\|\Lambda_-(\varphi_s(\varphi))-\Lambda_-\right\|\left\|\Omega_\tau^s(\varphi,\Lambda_-)\right\|ds,$$

$$e^{\gamma(t-\tau)}\left\|\Omega_\tau^t(\varphi,\Lambda_-)\right\|\le K+\int\limits_\tau^T Ke^{\gamma(s-\tau)}\left\|\Lambda_-(\varphi_s(\varphi))-\Lambda_-\right\|\left\|\Omega_\tau^s(\varphi,\Lambda_-)\right\|ds+$$

$$+\int\limits_\tau^t Kae^{\gamma(s-\tau)}\|\Omega_\tau^s(\varphi,\Lambda_-)\|ds.$$

В силу леми Гронуолла-Беллмана знаходимо

$$\left\|\Omega_\tau^t(\varphi,\Lambda_-)\right\|\le K_1e^{-(\gamma-Ka)(t-\tau)},$$

де

$$K_1=K+\int\limits_\tau^T Ke^{\gamma(s-\tau)}\left\|\Lambda_-(\varphi_s(\varphi))-\Lambda_-\right\|\left\|\Omega_\tau^s(\varphi,\Lambda_-)\right\|ds.$$

Другу із нерівностей (7) можна довести аналогічними міркуваннями. Позначимо через

$$G(t,\tau,\varphi)=\begin{cases} diag(\Omega_\tau^t(\varphi,\Lambda_-),0), & t\ge\tau,\\ -diag(0,\Omega_\tau^t(\varphi,\Lambda_+)), & t<\tau.\end{cases}$$

Із нерівностей (7) випливає, що $G(t,\tau,\varphi)$ задовольняє оцінку

$$\|G(t,\tau,\varphi)\|\le Ke^{-\gamma|t-\tau|}, \tag{9}$$

при $K>0$, $\gamma>0$ та при будь-яких $t,\tau\in R$, $\varphi\in T^m$. Враховуючи це, отримуємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\|G(0,\tau,\varphi)\|\,d\tau\le\frac{2K}{\gamma}<\infty.$$

Отже, для кожного $\varphi\in T^m$ функція

$$x^*(t)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}G(t,\tau,\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau \tag{10}$$

є обмеженим при всіх $t\in R$ розв'язком системи (6).

Записавши (10) у вигляді

$$x^*(t) = u(\varphi_t(\varphi)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau,$$

де $x = u(\varphi)$, $u(\varphi)$ — 2π-періодична по φ_j, $(j = 1, 2, ..., m)$ функція, одержимо шукану інваріантну множину

$$x = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(0,\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau. \tag{11}$$

Теорема доведена.

Розглянемо тепер збурену систему рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi))x + f(\varphi). \tag{12}$$

Справедлива

Теорема 2. *Нехай для всіх $\varphi \in T^m$ існує границя (4) і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці Λ відмінні від нуля $Re(\lambda_j(\Lambda)) \neq 0$ $(j = 1, 2, ..., n)$, причому $Re(\lambda_j(\Lambda)) < 0$ при $j = 1, 2, ..., k$, $Re(\lambda_j(\Lambda)) > 0$ при $j = k + 1, ..., n$. Тоді існує таке $b > 0$, що для будь-якої неперервної 2π-періодичної по φ_j, $j = 1, 2, ..., m$ матриці $B(\varphi)$ такої, що*

$$\max_{\varphi \in\ T^m} \|B(\varphi)\| \leq b, \tag{13}$$

система (12) має інваріантну тороїдальну множину.

Доведення. Доведення теореми полягає в тому, щоб показати, що функція Гріна-Самойленка $G(t, \tau, \varphi, \Lambda + B)$ системи рівнянь

$$\dot{x} = \Lambda(\varphi_t(\varphi))x + B(\varphi_t(\varphi))x \tag{14}$$

при досить великих t допускає оцінку типу $exp(-\gamma|t - \tau|)$, а сам многовид є

$$x = u(\varphi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(0,\tau,\varphi,\Lambda + B) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau. \tag{15}$$

Позначимо через $G(t,\tau,\varphi)$ функцію Гріна-Самойленка системи (2), яка задовольняє оцінку (9). Для кожного $\varphi \in T^m$ функція

$$x^*(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} G(t,\tau,\varphi,\Lambda + B) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau \tag{16}$$

є обмеженим при всіх $t \in R$ розв'язком системи, залежної від $\varphi \in T^m$ як від параметра

$$\dot{x} = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi)))x + f(\varphi_t(\varphi)),$$

якщо тільки

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \|G(0,\tau,\varphi,\Lambda+B)\|\, d\tau < \infty. \qquad (17)$$

Як відомо із [3], враховуючи умови теореми, а також нерівність (9), система (14) має функцію Гріна-Самойленка, яка задовольняє нерівність

$$\|G(t,\tau,\varphi,\Lambda+B)\| \le K_1 e^{-\gamma_1|t-\tau|},\ t,\tau \in R, \qquad (18)$$

для деяких додатних сталих K_1 і γ_1, а отже має місце нерівність (17).

Звідси одержуємо, що функція $x = u(\varphi)$, $u(\varphi+2\pi) = u(\varphi)$ вигляду (15) визначає інваріантну тороїдальну множину системи (12). Теорему доведено.

Розглянемо слабконелінійну систему диференціальних рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = F(\varphi,x) + \Lambda(\varphi)x, \qquad (19)$$

в якій $\varphi \in T^m$, $a(\varphi) \in C_{Lip}(T^m)$, $\Lambda(\varphi) \in C(T^m)$, $F(\varphi,x) \in C^{(0,2)}_{\varphi,x}(\varphi \in T^m, x \in R^n)$, $\|x\| \le h$, $\Lambda(\varphi)$ — вигляду (5). Запишемо цю систему у вигляді

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi,x)x + f(\varphi), \qquad (20)$$

де $f(\varphi) = F(\varphi,0)$, $B(\varphi,x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial F(\varphi,\tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau$. Наведемо достатні умови існування інваріантного многовиду системи (19).

Теорема 3. *Нехай для всіх $\varphi \in T^m$ існує границя (4) і дійсні частини всіх власних чисел граничної матриці Λ відмінні від нуля $Re\lambda_j(\Lambda) \ne 0$, $(j = 1,2,...,n)$, причому $Re\lambda_j(\Lambda) < 0$, при $j = 1,2,...,k$ і $Re\lambda_j(\Lambda) > 0$, при $j = k+1,...,n$. Тоді існують такі сталі $b_0 > 0$, $m > 0$ і достатньо мала стала Ліпшиця L, що для будь-якої неперервної по φ і x в області $\varphi \in T^m$, $\|x\| \le h$, 2π-періодичної по φ_j, $j = 1,2,...,m$ матриці $F(\varphi,x)$ такої, що*

$$\max_{\varphi \in T^m} \|F(\varphi,0)\| = m,$$

$$\max_{\varphi \in T^m,\ \|x\| \le h} \|B(\varphi,x)\| = b_0$$

і

$$\left\| B(\varphi,x') - B(\varphi,x'') \right\| \le L \left\| x' - x'' \right\|,$$

де $B(\varphi,x) = \int\limits_0^1 \frac{\partial F(\varphi,\ \tau x)}{\partial(\tau x)} d\tau$, система (19) має інваріантний тороїдальний многовид.

Доведення. Покажемо, що при умовах, накладених на систему (19), вона має інваріантний тороїдальний многовид.

Цей многовид шукатимемо методом послідовних наближень як границю послідовності

$$M_k:\ x = u^{(k)}(\varphi),\ \varphi \in T^m,\ k = 1,2,...,\ u^{(0)}(\varphi) = 0,$$

кожна з яких є інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь:

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = \Lambda(\varphi)x + B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi))x + f(\varphi), \tag{21}$$

тобто многовид

$$x = u^{(k)}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, s, \varphi, \Lambda + B_{k-1}) f(\varphi_s(\varphi)) ds. \tag{22}$$

Оскільки функція Гріна-Самойленка системи рівнянь (2) допускає оцінку (9), то легко встановити (як і при доведенні теореми 2), що функція Гріна-Самойленка системи рівнянь

$$\dot{x} = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), 0))x$$

допускає оцінку

$$\|G(t, \tau, \varphi, \Lambda + B_0)\| \le K_1 e^{-\gamma_1|t-\tau|},\ t, \tau \in R,\ \varphi \in T^m, \tag{23}$$

для деяких додатних сталих K_1 і γ_1, якщо тільки

$$\max_{\varphi \in\ T^m} \|B(\varphi, 0)\| \le b_0,$$

де b_0 — достатньо мале. Тоді на основі теореми 2 робимо висновок, що тороїдальний многовид $x = u^{(1)}(\varphi)$ системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi, 0))x + f(\varphi)$$

існує і має вигляд

$$x = u^{(1)}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, s, \varphi, \Lambda + B_0) f(\varphi_s(\varphi)) ds.$$

За многовид M_2 візьмемо інваріантний тороїдальний многовид системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi, u^{(1)}(\varphi)))x + f(\varphi),$$

а саме

$$x = u^{(2)}(\varphi) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(0, s, \varphi, \Lambda + B_1) f(\varphi_s(\varphi)) ds.$$

Якщо таким чином ми побудували многовиди $M_1, M_2, ..., M_{k-1}$, то за многовид M_k беремо інваріантний тороїдальний многовид (22) системи рівнянь (21).

Покажемо, що таким методом можна побудувати інваріантний многовид системи (19). Для цього треба переконатись в тому, що можна побудувати функцію $u^{(k)}(\varphi)$ для будь-якого $k = 1, 2, ...$, довести рівномірну збіжність

$$u^{(k)}(\varphi) \rightrightarrows u(\varphi),\ \varphi \in T^m$$

і показати, що $x = u(\varphi)$ задає інваріантний тороїдальний многовид вихідної системи (19).

Із (22) слідує нерівність

$$\left\|u^{(1)}(\varphi)\right\| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(0,s,\varphi,\Lambda+B_0)\| \, \|f(\varphi_s(\varphi))\| \, ds$$

або, враховуючи оцінку (23),

$$\max_{\varphi\in\ T^m} \left\|u^{(1)}(\varphi)\right\| \leq \frac{2K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi\in\ T^m} \|f(\varphi)\| .$$

Вважаємо, що $\gamma_1 h > K_1 m$, тому

$$\max_{\varphi\in\ T^m} \left\|u^{(1)}(\varphi)\right\| < h. \tag{24}$$

Нехай для $u^{(j)}(\varphi)$, $j = 1, 2, ..., k-1$ нерівність (24) виконується. Тоді для $j = k$ маємо:

$$\max_{\varphi\in\ T^m} \left\|u^{(k)}(\varphi)\right\| \leq \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \|G(0,s,\varphi,\Lambda+B_{k-1})\| \, \|f(\varphi_s(\varphi))\| \, ds \leq \frac{2K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi\in\ T^m} \|f(\varphi)\| .$$

За індукцією робимо висновок: якщо $\gamma_1 h > K_1 m$, то для кожного $k = 1, 2, ...$ функцію $u^{(k)}(\varphi)$ можна побудувати, а, отже, можна побудувати і множину M_k, що є інваріантною тороїдальною множиною системи (21).

Встановимо умови збіжності послідовності $u^{(k)}(\varphi)$.

Оцінимо різницю $u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi)$. Для будь-якого $\varphi \in T^m$ $u^{(k)}(\varphi)$ є інваріантним многовидом рівняння (21), тобто $u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))$ задовольняє рівність

$$\frac{d}{dt}u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)) = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u^{(k-1)}(\varphi_t(\varphi))))u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi)),$$

а $u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi))$ рівність

$$\frac{d}{dt}u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))))u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi)),$$

а тому різниця $u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) - u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))$ задовольняє рівність

$$\tfrac{d}{dt}(u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) - u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))) = (\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))))(u^{(k+1)}(\varphi_t(\varphi)) -$$
$$-u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))) + (B(\varphi_t(\varphi), u^{(k)}(\varphi_t(\varphi))) - B(\varphi_t(\varphi), u^{(k-1)}(\varphi_t(\varphi))))u^{(k)}(\varphi_t(\varphi)).$$

Тому $u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi)$ визначає інваріантну тороїдальну множину системи рівнянь

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = (\Lambda(\varphi) + B(\varphi, u^{(k)}(\varphi)))x + (B(\varphi, u^{(k)}(\varphi)) - B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi)))u^{(k)}(\varphi),$$

а отже, задовольняє нерівність

$$\max_{\varphi\in\ T^m} \left\|u^{(k+1)}(\varphi) - u^{(k)}(\varphi)\right\| \leq \frac{2K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi\in\ T^m} \left\|B(\varphi, u^{(k)}(\varphi)) - B(\varphi, u^{(k-1)}(\varphi))\right\| \left\|u^{(k)}(\varphi)\right\| \leq$$

$$\leq \frac{2K_1}{\gamma_1} \cdot \frac{2K_1}{\gamma_1} \max_{\varphi \in \ T^m} \|f(\varphi)\| \cdot L \cdot \left\| u^{(k)}(\varphi) - u^{(k-1)}(\varphi) \right\|.$$

Таким чином, вважаючи, що константа Ліпшиця L настільки мала, що

$$L\frac{2K_1}{\gamma_1}h < 1,$$

робимо висновок про рівномірну збіжність послідовності функцій $\{u^{(k)}(\varphi)\}$.

Покладемо

$$\lim_{k\to\infty} u^{(k)}(\varphi) = u(\varphi).$$

Переконаємося, що многовид $x = u(\varphi)$ є інваріантним многовидом вихідної системи.

Перейшовши до границі, коли $k \to \infty$ в рівності (22), бачимо, що функція $u(\varphi)$ допускає представлення (15), в якому $G(0, \tau, \varphi, \Lambda + B)$ — функція Гріна-Самойленка системи

$$\dot{\varphi} = a(\varphi),\ \dot{x} = [\Lambda(\varphi) + B(\varphi, u(\varphi))]x.$$

Отже, $u(\varphi_t(\varphi))$ для будь-якого $\varphi \in T^m$ задовольняє рівність

$$\dot{u}(\varphi_t(\varphi)) = [\Lambda(\varphi_t(\varphi)) + B(\varphi_t(\varphi), u(\varphi_t(\varphi)))]u(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi)),$$

а тому многовид $x = u(\varphi)$ є інваріантним многовидом системи (19). Теорему доведено.

Зауважимо, якщо ж дійсні частини всіх власних значень граничної матриці Λ від'ємні, то, як відомо із [4], інваріантні многовиди систем (2), (12) і (19) є асимптотично стійкими.

1. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
2. *Балога С. І.* Про існування інваріантної множини одного класу лінійних розширень динамічної системи на торі. // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. Сер. матем. і інформ. - 2011.- Вип.22, № 2. - С.4 - 12.
3. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова.– К.: Наук. думка, 1990. — 272 с.
4. *Перестюк М. О., Балога С. І.* Існування інваріантного тора одного класу систем диференціальних рівнянь. // Нелінійні коливання. - Т. 11, №4. - 2008. - С.520 - 529.

Одержано 10.04.2012