УДК 519.81

П. П. Антосяк (Ужгородський нац. ун-т)

НЕПРЯМИЙ ПІДХІД ДО ПРОБЛЕМИ ВИЗНАЧЕННЯ РЕЗУЛЬТУЮЧОЇ ОЦІНКИ ПРИ НЕЧІТКОМУ КОЛЕКТИВНОМУ ОРДИНАЛЬНОМУ ЕКСПЕРТНОМУ ОЦІНЮВАННІ

The article suggests methods for determining the collective ranking based on the indirect approach. Consider the case of fuzzy expert preferences given in the form of matrices of fuzzy tournaments and also the case of ordinal fuzzy expert assessments. The first method makes it possible to do without the complex optimization problems that arise in group decision making. Another method can be used for direct ranking of alternatives by experts.

У роботі пропонуються методи побудови колективного ранжування альтернатив, засновані на непрямому підході. Розглядається випадок нечітких експертних переваг, поданих у вигляді матриць нечітких турнірів, а також випадок нечітких ординальних експертних оцінок. Перший метод дає можливість уникнути складних оптимізаційних задач, що, як правило, виникають при колективному прийнятті рішень. Інший метод може бути використаний у задачах ранжування альтернатив великої розмірності.

Вступ. Розглядається задача визначення групових ординальних експертних оцінок у наступній постановці.

Дано: чітка скінченна множина альтернатив $A = \{a_1, \ldots, a_{n_A}\}$, n_A – кількість альтернатив; якісний критерій K оцінки альтернатив; чіткі нормовані коефіцієнти $\alpha_l \in (0,1)$, $l \in N_E = \{1, ..., n_E\}$, $\sum\limits_{l=1}^{n_E} \alpha_l = 1$, які визначають компетентність експертів, n_E – кількість експертів.

Знайти: колективне, яке "найкращим чином" узагальнює думку всіх експертів, узгоджене з урахуванням компетентності експертів, ранжування альтернатив множини A за критерієм K.

В основі існуючих методів визначення результуючих оцінок на основі нечіткої експертної інформації лежать два підходи: прямий та непрямий [1]. При непрямому підході, в залежності від типу нечітких індивідуальних оцінок та способу їх подання, по різному можна реалізувати його основні етапи: етап аґреґування та етап прийняття рішення.

Визначення нечітких колективних ординальних оцінок альтернатив на основі нечітких експертних матриць парних порівнянь. На етапі аґреґування нечіткої експертної інформації із нечітких індивідуальних переваг $\{P_1, \ldots, P_{n_A}\}$, заданих експертами у вигляді матриць парних порівнянь, будується нечітка колективна перевага P_C у вигляді матриці з елементами $\mu_{ij}^{(C)}$, $i, j = 1, \ldots, n_A$. Кожне значення $\mu_{ij}^{(C)} \in [0,1]$ виражає ступінь впевненості про перевагу альтернативи a_i над альтернативою a_j групи експертів в цілому.

Для аґреґування індивідуальних переваг використаємо підхід, що базується на понятті нечіткої більшості, згідно якого:

$$\mu_{ij}^{(C)} = \mu_Q \left(\frac{1}{n_E} \sum_{l=1}^{n_E} \mu_{ij}^{(l)} \right), \tag{1}$$

де $\mu_Q(\cdot)$ – функція належності нечіткого квантифікатора Q.

Пропорційні квантифікатори [2], такі як "більшість", "що найменше половина", тощо можуть бути подані за допомогою нечітких підмножин одиничного відрізку [0,1]. $\forall\ r \in [0,1]$ $Q(r)$ позначає ступінь, з якою кількісне відношення відповідає значенню квантифікатора, що його представляє. Функція належності неспадного квантифікатора (тобто $\forall\ a, b$ якщо $a > b$, то $Q(a) \geq Q(b)$) може бути представлена у наступному вигляді:

$$Q(r) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } r \leq a, \\ \frac{r-a}{b-a}, & \text{якщо } a < r < b, \\ 1, & \text{якщо } r \geq b, \end{cases}$$

де $a, b, r \in [0,1]$.

Легко переконатися у правильності наступного результату.

Твердження 1. *Нехай всі індивідуальні переваги є нечіткими турнірами. Якщо Q неспадний лінгвістичний квантифікатор з параметрами (a, b) такими, що $a + b = 1$, тоді і колективна перевага, побудована за правилом (1), також є нечітким турніром.*

Іншим підходом до аґреґування індивідуальних переваг може бути використання різного роду операторів аґреґування інформації. Розглянемо найбільш обґрунтоване та часто уживане на практиці сімейство операторів аґреґування. *Усереднюючий оператор із впорядкованими вагами* (OWA оператор), запропонований Р. Ягером у роботі [3] та пізніше більш детально вивчений і охарактеризований у [4]. OWA оператор комутативний, ідемпотентний, неперервний, монотонний, нейтральний, зрівноважений і стійкий по відношенню до лінійних перетворень, але в загальному випадку не асоціативний. OWA оператор приймає значення з інтервалу між значеннями операторів $Min(\cdot)$ та $Max(\cdot)$. Фундаментальним аспектом OWA оператора є переупорядкування аргументів у відповідності до важливості (значущості) їх значень.

OWA оператор розмірності n є функцією $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, якій відповідає ваговий вектор $W = (w_1, \ldots, w_n)$, $w_i \in [0,1]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1$ і призначений для аґреґування набору значень $\{v_1, \ldots, v_n\}$ у відповідності з наступним виразом

$$\varphi_W(v_1, ..., v_n) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot v_{p_i},$$

де $p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ така перестановка, що $v_{p_i} \geq v_{p_{i+1}}, i = 1, \ldots, n-1$.

У [3] запропоновано два шляхи для отримання вагового вектора. Перший підхід полягає у використанні деяких характерних особливостей досліджуваної проблеми; другий підхід – у спробі дати деяку семантику або значущість щодо важливості. Останній підхід отримав широке застосування в області нечіткої і багатозначної логіки, квантифіковано керованої аґреґації.

У [3, 4] пропонується використовувати нечіткі квантифікатори для обчислення вагових коефіцієнтів OWA оператора, які у випадку неспадного пропорційного квантифікатора Q мають вигляд:

$$w_i = Q\left(\frac{i}{n}\right) - Q\left(\frac{i-1}{n}\right),\ i = 1, \ldots, n.$$

На випадок наявності інформації про компетентність експертів у вигляді чітких вагових коефіцієнтів Р. Ягер [6] визначив *індукований усереднюючий оператор з упорядкованими вагами* (IOWA оператор) як узагальнення OWA оператора.

IOWA оператор розмірності n є функцією $\Phi_W : (\mathbb{R}\times\mathbb{R})^n \to \mathbb{R}$, якій відповідає множина ваг або ваговий вектор $W = (w_1, \ldots, w_n)$, $w_i \in [0,1]$, $\sum\limits_{i=1}^{n} w_i = 1$ і призначений для аґреґування множини других аргументів набору n пар $\{\langle u_1, v_1\rangle, \ldots, \langle u_n, v_n\rangle\}$ у відповідності з виразом

$$\Phi_W(\langle u_1, v_1\rangle, \ldots, \langle u_n, v_n\rangle) = \sum_{i=1}^{n} w_i \cdot v_{p_i},$$

де $p : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$ така перестановка, що $u_{p_i} \geq u_{p_{i+1}}, i = 1, \ldots, n-1$, так, наприклад, $\langle u_{p_i}, v_{p_i}\rangle$ пара, де u_{p_i} це $i-$е найбільше значення у множині $\{u_1, \ldots, u_n\}$.

Набір $\{u_1, \ldots, u_n\}$ може виражати ступінь значимості (компетентності) думок експертів і в цьому випадку ваги обчислюються так:

$$w_i = Q\left(\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{i} u_{p_k}\right) - Q\left(\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{i-1} u_{p_k}\right),$$

де $T = \sum\limits_{i=1}^{n} u_{p_i}$ – сумарна значимість групи експертів.

При використані OWA оператора для аґреґування експертних переваг справедливий наступний результат.

Твердження 2 ([7, с. 74]). *Нехай Q неспадний лінгвістичний квантифікатор з параметрами (a, b) такими, що $a + b = 1$. Тоді OWA оператор керований квантифікатором Q зберігає властивість адитивності.*

Для побудови нечіткого колективного ранжування альтернатив на основі нечіткої колективної переваги скористаємося методом, запронованим у роботі [8]. Він полягає у тому, що на основі наявної матриці переваг $P = (\mu_{ij})_{i,j=1,\ldots,n_A}$ можна визначити оцінки істинності (впевненості) більш складних висловлювань відносно альтернатив, а саме наступних висловлювань ω_{ik}, $k = 0, \ldots, n_A - 1$, $\forall\ i \in N_A$:

$$\omega_{ik} = \text{“альтернатива } a_i \text{ краща за } k \text{ альтернатив із множини } A\text{”}.$$

Найбільш загальним поданням операторів перетину, об’єднання та заперечення є їх визначення в класі трикутних норм (t-норм), конорм (t-конорм) та інверторів відповідно. Розглянемо часто уживані на практиці t-норму $T(\cdot,\cdot) = \min\{\cdot,\cdot\}$, t-конорму $S(\cdot,\cdot) = \max\{\cdot,\cdot\}$та інвертор $N(\cdot) = 1 - \cdot$. У цьому випадку визначення ступеня істинності висловлювання ω_{ik} зводиться до наступного правила [8]:

$$\mu(\omega_{ik}) = \begin{cases} 1 - \mu_{ip_1}, & k = 0; \\ \min\{\mu_{ip_k}, 1 - \mu_{ip_{k+1}}\}, & 0 < k \leq n_A - 2; \\ \mu_{ip_{n_A - 1}}, & k = n_A - 1. \end{cases}$$

Визначення нечітких колективних ординальних оцінок альтернатив на основі нечітких експертних ординальних оцінок. Досить розповсюдженою процедурою отримання експертної інформації є безпосереднє (пряме) ранжування альтернатив. Експерту пропонується весь набір альтернатив для оцінювання і пропонується впорядкувати їх за перевагою. Пряме ранжування альтернатив може здійснюватися різними способами. Але у загальному випадку задані експертом ординальні оцінки альтернатив можуть бути нечіткими. В якості нечіткої ординальної оцінки альтернативи можуть виступати наступні нечіткі висловлювання експерта:

- місце (ранг) альтернативи a_i десь біля r_i;
- ранг альтернативи a_i приблизно в межах від $r_i^{(1)}$ до $r_i^{(2)}$;
- нечіткі висловлювання, які містять лінгвістичну змінну "ранг".

Для нашої задачі формалізуємо перші дві нечіткі оцінки у вигляді нечіткого трикутного числа та нечіткого трапецієподібного числа відповідно.

$$\mu_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < r - \frac{n_A}{10}; \\ 10 \cdot \frac{x-r}{n_A} + 1, & \text{якщо } r - \frac{n_A}{10} \le x < r; \\ 10 \cdot \frac{r-x}{n_A} + 1, & \text{якщо } r \le x < r + \frac{n_A}{10}; \\ 0, & \text{якщо } x \ge r + \frac{n_A}{10}. \end{cases}$$

$$\mu_{r_1 r_2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < r_1 - \frac{n_A}{10}; \\ 10 \cdot \frac{x-r_1}{n_A} + 1, & \text{якщо } r_1 - \frac{n_A}{10} \le x < r_1; \\ 1, & \text{якщо } r_1 \le x < r_2; \\ 10 \cdot \frac{r_2-x}{n_A} + 1, & \text{якщо } r_2 \le x < r_2 + \frac{n_A}{10}; \\ 0, & \text{якщо } x \ge r_2 + \frac{n_A}{10}. \end{cases}$$

Як відмічається у роботі [1], у прикладних задачах, де широко використовуються експертні оцінки, спеціалістам зручніше формулювати їх в термінах природної мови. Такі висловлювання експерта можна формалізувати через лінгвістичну змінну, котра описується кортежем $\langle X, T(X), U, G, M\rangle$. Тут X – найменування лінгвістичної змінної, яка відображає деякий об'єкт; $T(X)$ – множина значень або термів цієї змінної, які є найменуваннями нечітких змінних; U – множина, яка є областю визначення термів; G – синтаксична процедура (граматика), яка описує процес створення з елементів множини $T(X)$ нових значень лінгвістичної змінної; M – семантична процедура, яка дозволяє приписати кожному новому значенню лінгвістичної змінної деяку семантику шляхом формування відповідної нечіткої множини. Для нашого випадку:

- $X =$ *"ранг"*;
- $T(X) = \{$*"високий"*,*"середній"*,*"низький"*$\}$;
- $U = \{1, 2, \ldots, n_A\}$;
- $G = \{$*"дуже"*, *"більш-менш"*, *"не"*, *"і"*, *"або"*$\}$;

- *В якості семантичних правил використаємо класичні правила для логічних зв'язок та заперечення у відповідності до вищезгаданих.*

Функції належності відповідних термів можна визначити, наприклад, так:

$$\mu_{high}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 1; \\ 1, & \text{якщо } 1 \le x < \frac{n_A}{10} + 1; \\ 10 \cdot \frac{n_A - 3x + 3}{7 n_A}, & \text{якщо } \frac{n_A}{10} + 1 \le x < \frac{n_A}{3} + 1; \\ 0, & \text{якщо } x \ge \frac{n_A}{3} + 1. \end{cases}$$

$$\mu_{middle}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < \frac{n_A}{4}; \\ \frac{4x - n_A}{n_A}, & \text{якщо } \frac{n_A}{4} \le x < \frac{n_A}{2}; \\ \frac{3n_A - 4x}{n_A}, & \text{якщо } \frac{n_A}{2} \le x < \frac{3}{4} n_A; \\ 0, & \text{якщо } x \ge \frac{3}{4} n_A. \end{cases}$$

$$\mu_{low}(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < \frac{2}{3} n_A; \\ 10 \cdot \frac{3x - 2n_A}{7 n_A}, & \text{якщо } \frac{2}{3} n_A \le x < \frac{9}{10} n_A; \\ 1, & \text{якщо } \frac{9}{10} n_A \le x \le n_A; \\ 0, & \text{якщо } x > n_A. \end{cases}$$

Отже, альтернативою парному порівнянню альтернатив (у літературі такий спосіб подання експертних оцінок отримав назву подання у вигляді "об'єкт–об'єкт") може бути спосіб "об'єкт–ранг" подання експертних оцінок. У результаті такого підходу експерти явно чи неявно формують свої індивідуальні оцінки у вигляді матриць $P_l = (\mu_{ik}^{(l)})_{i,k=1,\ldots,n_A}$, $l = 1, \ldots, n_E$, елементи яких виражають ступінь істинності висловлювання

$$\omega_{ik} = \text{“альтернатива } a_i \text{ має ранг } k\text{”}.$$

На етапі аґреґування експертної інформації на основі наявних нечітких ординальних індивідуальних оцінок визначимо ступінь істинності наступного нечіткого висловлювання:

$$\omega_{ik}^{(C)} = \text{“більшість еспертів вважає, що альтернатива } a_i \text{ має ранг } k\text{ ”}.$$

Ступінь істинності такого нечіткого висловлювання обчислюється за таким правилом:

$$\mu_{ik}^{(C)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } \frac{1}{n_E} \sum_{l=1}^{n_E} \mu_{ik}^{(l)} \le 0.3; \\ \frac{2}{n_E} \sum_{l=1}^{n_E} \mu_{ik}^{(l)} - 0.6, & \text{якщо } 0.3 < \frac{1}{n_E} \sum_{l=1}^{n_E} \mu_{ik}^{(l)} < 0.8; \\ 1, & \text{якщо } 0.8 \le \frac{1}{n_E} \sum_{l=1}^{n_E} \mu_{ik}^{(l)} \le 1, \end{cases}$$

де $\mu_{ik}^{(l)} = \mu_l(\omega_{ik})$, $\mu_l(\cdot)$ – функція належності відповідного нечіткого рангу, заданого l-м експертом.

Під колективним нечітким ранжуванням множини альтернатив A будемо розуміти набір всіх нечітких підмножин A_i, $i = 1, \ldots, n_A$, що визначаються значеннями $\mu_{ik}^{(C)}$, $k = 1, \ldots, n_A$, та відповідно з наступними функціями належності:

$$\mu_{A_i}(k) = \frac{\mu_{ik}^{(C)}}{\max\limits_{k=1,\ldots,n_A} \mu_{ik}^{(C)}}. \tag{2}$$

Висновки. Відомо [8], що у випадку, коли матриця нечіткої переваги є матрицею нечіткого турніру, то відповідне нечітке ранжування володіє властивістю випуклості, у сенсі випуклості нечітких множин. При перерізі A_i, які входять у нечітке ранжування, за будь-яким значенням ступеня належності, кожній альтернативі a_i буде поставлено у відповідність єдиний сегмент у множині чітких рангів. Якщо мова йде про нечіткі індивідуальні ранжування, то при неможливості визначення чітких результуючих рангів на основі α-перерізу, експертам пропонується переглянути свої оцінки, після чого описаний вище підхід застосовується знову.

Розглянуті методи визначення результуючих ординальних оцінок альтернатив можуть слугувати альтернативою до методу, який розвинуто автором у роботі [9] та який заснований на прямому підході.

Приклад 1. *Нехай кожен із групи експертів* $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *здійснює пряме ранжування семи альтернатив множини A. Результат проведених оцінок поданий у таблиці 1.*

Таблиця 1.

Нечіткі ординальні експертні оцінки

	e_1	e_2	e_3	e_4
a_1	високий	біля 1	середній	біля 2
a_2	біля 3	високий	не н. і не д.в.	середній
a_3	сер. або низьк.	не д.в.	низький	дуже низький
a_4	не низький	малий	біля 2	дуже високий
a_5	не дуже високий	середній	не дуже низьк.	біля 4
a_6	десь у межах [5,7]	невисокий	високий	не д.в.
a_7	низький	біля 6	середній	невисокий

На основі нечітких експертних ранжувань (таблиця 1) обчислюємо значення $\mu_{ik}^{(C)}$ *для* $i, k = 1, \ldots, 7$ *та заносимо їх у таблицю 2.*

Таблиця 2.

Колективна нечітка ординальна оцінка

	1	2	3	4	5	6	7
a_1	**0.543**	0.522	0.002	0	0	0	0
a_2	0	0.189	**0.838**	0.4	0	0	0
a_3	0	0	0.236	0.257	0.125	1	**1**
a_4	0.543	**0.733**	0.064	0	0	0	0
a_5	0	0.138	0.879	**1**	0.593	0.067	0
a_6	0	0.067	0.379	0.543	**0.9**	0.9	0.9
a_7	0	0	0.155	0.257	0.216	**0.808**	0.543

Далі за формулою (2) обчислюємо значення $\mu_{A_i}(k)$, $i, k = 1, \ldots, 7$. *Нечітке ранжування, подане у вигляді функцій належності, зображено на малюнку 1.*

На основі перерізу нечіткого колективного ранжування за найвищим ступенем належності, як розв'язок нашої модельної задачі, отримуємо чітке строге ранжування альтернатив, якому відповідає перестановка індексів альтернатив $(1, 4, 2, 5, 6, 7, 3)$.

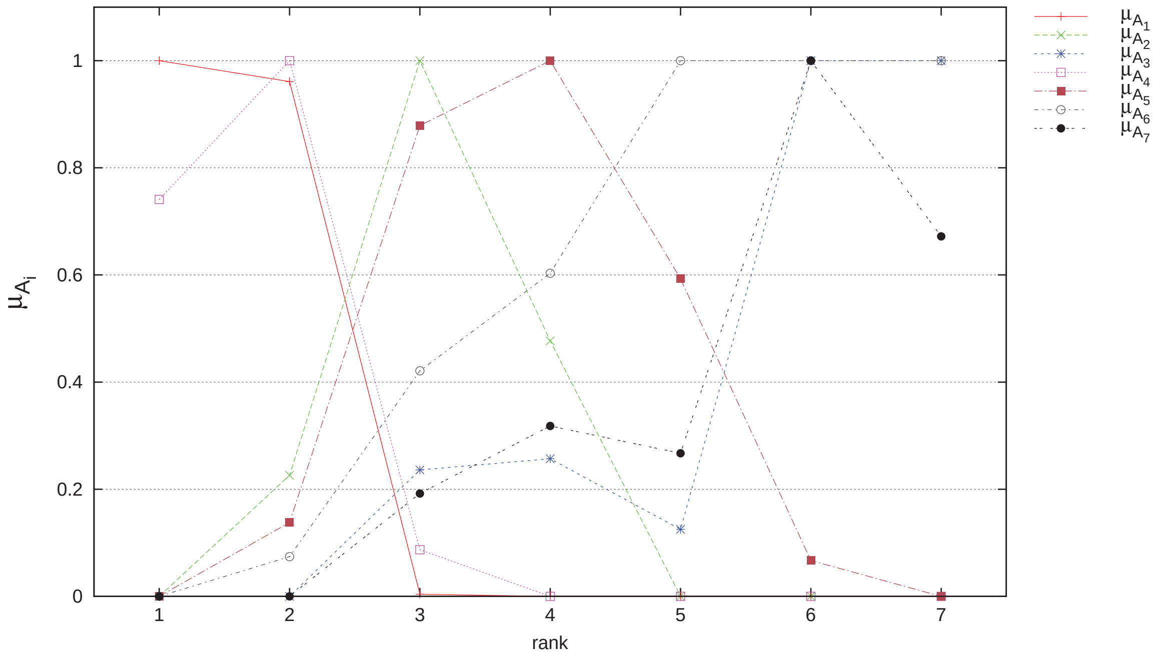

Рис. 1. Нечітке колективне ранжування множини альтернатив A

1. *Kacprzyk J.* Group decision making under fuzziness / J. Kacprzyk, H. Nurmi // Fuzzy sets in decision analysis, operations research and statistics / Ed. by Roman Slowiński. — Boston: Kluwer, 1998. — Vol. 1 — P. 103–136.
2. *Zadeh L. A.* A computational approach to fuzzy quantifiers in natural languages / L. A. Zadeh // Computers and Mathematics with Applications. — 1983. — Vol. 9. — P. 149–184.
3. *Yager R. R.* On ordered weighted averaging aggregation operators in multicriteria decision making / R. R. Yager // Systems, Man and and Cybernetics, Part A: Systems and Humans. — 1988. — Vol. 18. — P. 183–190.
4. *Yager R. R.* Families of owa operators / R. R. Yager // Fuzzy Sets and Systems. — 1993. — Vol. 59, No. 2. — P. 125–148.
5. *Yager R. R.* Quantifier guided aggregation using owa operators / R. R. Yager // International Journal of Intelligent Systems. — 1994. — Vol. 11. — P. 49–73.
6. Yager R. R. Including importances in owa aggregations using fuzzy systems modeling / R. R. Yager // Fuzzy Systems. — 1998. — Vol. 6, No. 2. — P. 286–294.
7. Anote on the reciprocity in the aggregation of fuzzy preference relations using owa operators / [F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez] // Fuzzy Sets and Systems. — 2003. — Vol. 137. — P. 71–83.
8. Скофенко А. В. Применение нечеткой логики при ранжировании объектов методом парных сравнений / А. В. Скофенко // Кибернетика. – 1983. – № 3. – С. 116–118.
9. *Антосяк П. П.* Узагальнення медіанного підходу на випадок нечітких індивідуальних переваг / П. П. Антосяк // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. – 2010. – № 2. – С. 81–86.

Одержано 28.04.2011