УДК 512.53+512.64

Бондаренко В. М., Костишин Е. М.
(Інститут математики НАН України, Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

МОДУЛЯРНІ ЗОБРАЖЕННЯ НАПІВГРУПИ T_2

In this paper we describe the modular matrix representations of the semigroup T_2 of all transformations of a set of 2 elements.

У цій роботі описано модулярні матричні зображення напівгрупи T_2 всіх перетворень множини із двох елементів.

Матричні зображення скінченних груп над полями вивчені достатньо добре. У класичному випадку (коли характеристика p поля K не ділить порядок скінченної групи), група має скінченний зображувальний тип; у цьому випадку кожне нерозкладне зображення є незвідним і всі вони вичерпуються прямими доданками регулярного зображення. У модулярному випадку (коли характеристика p ділить порядок групи), група має скінченний зображувальний тип тоді і лише тоді, коли її силівська p-підгрупа є циклічною. У модулярному випадку більшість скінченних груп є дикими, тобто задача про опис їх зображень включає в себе задачу про класифікацію пар матриць з точністю до подібності. Точні означення ручних та диких задач див. в [1]. Ручні та дикі групи для цього випадку повністю описані в роботі [2].

Матричні зображення напівгруп над полями вивчені не в такій мірі, як зображення груп. Найбільше робіт присвячено вивченню незвідних зображень напівгруп (зокрема, вивченню класів напівгруп, всі нерозкладні зображення яких є незвідними [3, 4], тощо). Серед інших випадків виділимо відомі результати з теорії зображень алгебр, які легко переформулювати в термінах зображень напівгруп (наприклад, опис зображень алгебри $< a, b \,|\, ab = ba = 0 >$ [5, 6] чи алгебри $< a, b \,|\, a^2 = b^2 = 0 >$ [7, 8]) і деякі результати про напівгрупи скінченного зображувального типу: випадок скінченної цілком простої напівгрупи [9] та деякі немодулярні випадки напівгруп всіх перетворень скінченної множини [10,11]. У цій статті ми вивчаємо модулярні матричні зображення напівгрупи T_2 всіх перетворень множини із двох елементів.

1. Попередні відомості. Напівгрупа T_2 всіх перетворень (відображень в себе) двоелементної множини $\{1, 2\}$ складається із чотирьох елементів e, a, b, c: $e(1) = 1, e(2) = 2; a(1) = 2, a(2) = 1; b(1) = 2, b(2) = 2; c(1) = 1, c(2) = 1$. Враховуючи, що елемент e є одиницею напігрупи і до того ж $a^2 = e, b^2 = b, ab = b, ba = c, c^2 = c, ac = c, bc = c, ca = b, cb = b$, легко бачити (підставивиши скрізь ba замість c), що e, a, b утворюють систему твірних із визначальними співвідношеннями

1) $ea = ae = a, eb = be = b$;
2) $a^2 = e,\ b^2 = b$;
3) $ab = b$.

Матричне зображення розмірності n напівгрупи $T = T_2$ над полем K — це (згідно загального означення матричного зображення напівгрупи) довільний гомоморфізм $X : T \to M_n(K)$ напівгрупи T в напівгрупу $M_n(K)$ всіх квадратних матриць порядку n над полем K (n — натуральне число). Зауважимо, що в загальному означенні нічого не говориться про одиничний елемент напівгрупи (бо його може і не бути), але у випадку, коли одиниця в напівгрупі є, практично можна вважати, що гомоморфізм переводить її у одиничну матрицю (див. наступний параграф); ми будемо розглядати лише такі зображення (якщо не сказано протилежне). Тоді зображення $X : T_2 \to M_n(K)$ напівгрупи $T = T_2$ однозначно задається парою матриць

$$R = \{A = X(a), B = X(b)\},$$

що задовольняють наступні рівності: $A^2 = E$, $B^2 = B$, $AB = B$.

Еквівалентність матричних зображень $R = \{A, B\}$ і $R' = \{A', B'\}$ напівгрупи T_2 означає існування оборотної матриці C такої, що $A' = CAC^{-1}$ і $B' = CBC^{-1}$ (або, що те ж саме, $A'C = CA$ і $B'C = CB$, що практично більш зручніше, бо маємо лінійні відносно C рівності). На мові елементарних перетворень це означає, що від зображення R до зображення R' можна перейти, зробивши спочатку деякі елементарні перетворення з рядками матриць A і B, а потім обернені перетворення зі стовпцями цих матриць (кожного разу потрібно робити одні і ті ж елементарні перетворення в обох матрицях).

Пряма сума матричних зображень $R = \{A, B\}$ і $R' = \{A', B'\}$ напівгрупи T_2 — це матричне зображення $R \oplus R' = \{A \oplus A', B \oplus B'\}$, де

$$A \oplus A' = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & A' \end{pmatrix}, \quad B \oplus B' = \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & B' \end{pmatrix}.$$

Зображення R називається розкладним, якщо воно еквівалентне прямій сумі двох зображень, і нерозкладним в іншому разі. Для матричних зображень напівгрупи $T = T_2$ (як і для будь-якої скінченновимірної алгебри) має місце теорема Крулля-Шмідта про однозначність розкладу довільного матричного зображення в пряму суму нерозкладних.

Матричне зображення напігрупи $T = T_2$ називається модулярним, якщо характеристика поля K, над яким воно розглядається, дорівнює 2 (бо напівгрупа T_2 має єдину нетривіальну підгрупу, породжену елементом a порядку 2).

2. Зауваження про матричні зображення напівгруп з одиницею. Вище ми говорили, що у випадку, коли напівгрупа має одиничний елемент, практично можна вважати, що матричне зображення зіставляє йому одиничну матрицю.

Більш точно, має місце наступний факт.

Якщо $X : S \to M_n(K)$ — матричне зображення деякої напівгрупи S (див. вище відповідні позначення) і S містить одиничний елемент e, то зображення X еквівалентне прямій сумі зображень X_1 і X_2, таких що $X_1(e)$ — одинична матриця і $X_2(s) = 0$ для довільного $s \in S$. Іншими словами, якщо в означенні матричного зображення напігрупи з одиницею ми додатково будемо вимагати, щоб одиничному елементу відповідала одинична матриця, то ми втратимо лише одне нерозкладне зображення, а саме зображення, всі матриці якого є нульовими порядку 1.

Дійсно, оскільки матриця $Q = X_1(e)$ ідемпотентна, то із добре відомої теореми про канонічну форму Жордана безпосередньо випливає, що існує оборотна матриця C така, що $Q = CQ_0C^{-1}$, де

$$Q_0 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

тут і надалі E позначає одиничну матрицю (довільного порядку $m \geq 0$).

Розглянемо матричне зображення $\widehat{X} : s \to C^{-1}X(s)C$ (еквівалентне зображенню X), яке зіставляє одиничному елементу e матрицю Q_0. Із рівностей $\widehat{X}(e)\widehat{X}(s) = \widehat{X}(s)\widehat{X}(e) = \widehat{X}(s)$ (для довільного $s \in S$) і $\widehat{X}(e) = Q_0$, випливає, що в матриці

$$\widehat{X}(s) = \begin{pmatrix} \widehat{X}(s)_{11} & \widehat{X}(s)_{12} \\ \widehat{X}(s)_{21} & \widehat{X}(s)_{22} \end{pmatrix}$$

(розбитої на горизонтальні та вертикальні смуги таким же чином, як і матриця Q_0) блоки $\widehat{X}(s)_{12}$, $\widehat{X}(s)_{21}$, $\widehat{X}(s)_{22}$ є нульовими, звідки маємо, що зображення $\widehat{X}(s)$ є прямою сумою зображення $X_1 : s \to \widehat{X}(s)_{11}$, яке зіставляє одиничному елементу e одиничну матрицю $\widehat{X}(e)_{11}$, та зображення $X_2 : s \to \widehat{X}(s)_{22}$, для якого всі матриці $\widehat{X}(s)_{22}$ є нульовими.

3. Канонічна форма матричних зображень напівгрупи T_2 над полем характеристики 2. Мета цього параграфа — установити канонічну форму модулярних зображень напівгрупи T_2.

Теорема 1. *Будь-яке матричне забраження напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 еквівалентне матричному зображенню вигляду*

$$a \to A_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c}
E & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & E & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E
\end{array}\right),$$

$$b \to B_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc|cc|c|c}
E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ \hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right).$$

Щоб довести цю теорему ми сформулюємо її в дещо іншій формі, яка узгоджується з нашим методом доведення (вказані в обох теоремах канонічні зображення відрізняються лише порядком розташування горизонтальних та вертикальних смуг блокових матриць); щоб було ясно, які діагональні блоки мають завідомо однаковий розмір, ми індексуємо одиничні матриці (в першому випадку на це вказували горизонтальні та вертикальні поділи).

Теорема 2. *Будь-яке матричне забраження напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 еквівалентне матричному зображенню вигляду*

$$a \to A = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

$$b \to B = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де $E_1, \ldots, E_5$ — деякі одиничні матриці.

Підкреслимо, що деякі (але не всі) одиничні матриці, вказані в теоремах, можуть мати нульовий порядок.

Зауваження 1. Як сказано вище, ми розглядаємо лише такі матричні зображення напігрупи T_2, які зіставляють одиничному елементу напівгрупи одиничну матрицю. Якщо цього не вимагати, тоді в умовах теорем 1 та 2 в кожній матриці треба додати (згідно параграфу 2) додаткову нульову горизонтальну та нульову вертикальну смуги.

Переходимо до доведення теореми 2.

Нехай $R = \{A, B\}$ — зображення напівгрупи T_2 над полем K. Нагадаємо, що $A^2 = E, AB = B, B^2 = B$ і поле K має характеристику 2. Очевидно, що без обмеження загальності можна вважати, що матриця B має жорданову нормальну форму, тобто

$$B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю A у блоковому вигляді, що відповідає вигляду B:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Використаємо спочатку співвідношення $AB = B$:

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ тобто } \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Звідси маємо, що $A_{11} = E$, $A_{21} = 0$, а тоді

$$A = \begin{pmatrix} E & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Залишилося ще одне співвідношення $A^2 = E$, тобто

$$\begin{pmatrix} E & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} E & A_{12} + A_{12}A_{22} \\ 0 & A_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності маємо

$$A_{12} = A_{12}A_{22} \tag{1}$$

$$A_{22}^2 = E \tag{2}$$

Отже, наше матричне зображення $R = \{A, B\}$ складається із матриць

$$A = \begin{pmatrix} E & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

і до того ж блоки A_{12} та A_{22} задовольняють рівності (1) і (2).

Дізнаємося тепер, які перетворення подібності ми можемо виконувати з A і B, щоб не змінювався їх загальний вигляд (тобто щоб не псувалися уже зроблені одиничні та нульові блоки). Якщо таке перетворення здійснює перехід від зображення R до зображення $\overline{R} = \{\overline{A}, \overline{B}\}$ такого ж самого вигляду, тобто

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} E & \overline{A_{12}} \\ 0 & \overline{A_{22}} \end{pmatrix}, \; \overline{B} = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то воно задається за допомогою оборотної матриці X, такої що

$$\overline{A} = XAX^{-1}, \quad \overline{B} = XBX^{-1}$$

або (в еквівалентній формі) $\overline{A}X = XA, \quad \overline{B}X = XB$. Очевидно, що при цьому матриці $\overline{B}$ і B рівні (це випливає із їх подібності).

Використаємо спочатку співвідношення $\overline{B}X = XB$:

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

де блоки X_{ij} матриці X задані у відповідності з блоками матриць A та B. Звідси маємо

$$\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

тобто $X_{12}=0, X_{21}=0$, а значить

$$X=\begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Перейдемо тепер до співвідношення $\overline{A}X = XA$:

$$\begin{pmatrix} E & \overline{A}_{12} \\ 0 & \overline{A}_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix},$$

тобто

$$\begin{pmatrix} X_{11} & \overline{A_{12}}X_{22} \\ 0 & \overline{A_{22}}X_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X_{11} & X_{11}A_{12} \\ 0 & X_{22}A_{22} \end{pmatrix}.$$

З останньої рівності маємо, що

$$\overline{A}_{12}X_{22}=X_{11}A_{12}, \quad \overline{A}_{22}X_{22}=X_{22}A_{22},$$

або (в еквівалентній формі)

$$\overline{A}_{12}=X_{11}A_{12}X_{22}^{-1} \tag{4}$$

$$\overline{A}_{22}=X_{22}A_{22}X_{22}^{-1}. \tag{5}$$

Отже, ми довели, що матричні зображення $R=\{A,B\}$ та $\overline{R}=\{\overline{A},\overline{B}\}$ еквівалентні тоді і лише тоді, коли виконані рівності (4) і (5). Якщо ж говорити на мові елементарних перетворень, то із цих ріностей і вигляду матриці X випливає, що допустимими перетвореннями для блоків A_{12} та A_{22} зображення R (тобто які індукуються перетвореннями подібності з рядками та стовпцями матриць A та B, які не псують їхнього вигляду) є лише наступні перетворення а), б) та їх композиції:

а) з рядками матриці A_{12} можна робити довільне елементарне перетворення;

б) з рядками матриці A_{22} можна робити довільне елементарне перетворення, але при цьому зі стовпцями матриць A_{12} і A_{22} треба зробити обернене елементарне перетворення.

Отже, задача про опис з точністю до еквівалентності матричних зображень вигляду (3) напівгрупи T_2 , а значить і взагалі всіх її матричних зображень, еквівалентна задачі про опис пар матриць A_{12} і A_{22} з точністю до еквівалентності, яка задана рівностями (4) та (5) або ж перетвореннями а) та б).

Розглянемо цю задачу про матриці A_{12} і A_{22}.

Оскільки $A_{22}^2=A_{22}$ (див. рівність (2)), то перетвореннями вигляду а) і б) (або ж, що те саме, використовуючи рівність (5)) приведемо матрицю A_{22} до наступного вигляду

$$A_{22}=\begin{pmatrix} E & 0 & E \\ 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \tag{6}$$

який легко отримати із жорданової нормальної форми (однаковою) перестановкою рядків і стовпців. Тоді, розбивши матрицю A_{12} на три вертикальні смуги у відповідності з розбиттям матриці A_{22} і скориставшись рівністю (1), маємо:

$$A_{12}=\begin{pmatrix} 0 & C & D \end{pmatrix}, \tag{7}$$

де C і D — деякі матриці[1].

Будемо тепер робити такі допустимі перетворення, які не змінюють загального вигляду матриць A_{12} і A_{22}, і подивимося, які перетворення з матрицями C і D при цьому індукуються.

По-перше, з рядками матриць C і D можна робити одне і те ж довільне елементарне перетворення (див. допустиме для A_{12} і A_{22} перетворення а)). По-друге, якщо перетворення вигляду б) зробити з рядками другої горизонтальної смуги матриці A_{22} та стовпцями другої вертикальної смуги матриць A_{12} і A_{22}, то загальний вигляд матриць A_{12} і A_{22} не зміниться, а зміниться лише матриця C, а саме з її стовпцями буде здійснено відповідне елементарне перетворення (що входить в б)). По-третє, якщо одне і те ж перетворення вигляду б) зробити одночасно з рядками першої та третьої горизонтальних смуг матриці A_{22} та стовпцями першої і третьої вертикальних смуг матриць A_{12} і A_{22}, то загальний вигляд матриць A_{12} і A_{22} не зміниться, а зміниться лише матриця D, а саме з її стовпцями буде здійснено відповідне елементарне перетворення (що входить в б)). І нарешті, по-четверте, якщо до j-го стовпця третьої вертикальної смуги додати i-ий стовпець другої вертикальної смуги, помножений на деякий елемент поля K одночасно в матрицях A_{12} і A_{22}, а із рядками матриці A_{22} зробити обернене елементарне перетворення (вказане перетворення з рядками та стовпцями є перетворенням вигляду б)), то загальний вигляд матриць A_{12} і A_{22} не зміниться, а зміниться очевидно зрозумілим чином лише матриця D.

Таким чином, допустимими для матриць C і D є довільні одночасні елементарні перетворення з їх рядками, незалежні елементарні перетворення з їх стовпцями та додавання стовпців матриці C до стовпців матриці D з деякими множниками із K; зрозуміло, що допустимими є і їх композиції.

Для нас неважливо є чи немає інших допустимих перетворень, але, розглядаючи матриці A_{22}, A_{12} вигляду (6), (7) та матриці $\overline{A}_{22}$, $\overline{A}_{12}$ такого ж вигляду, разом з перетвореннями (4), (5)(аналогічно, як для матричних зображень R і $\overline{R}$), можна показати , що інших допустимих перетворень для матриць C і D немає.

Із (3), (6) і (7) випливає, що наше зображення R приведено до наступного вигляду:

$$A = \begin{pmatrix} E & 0 & C & D \\ 0 & E & 0 & E \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

За лемою 1 роботи [12] матриці C і D (які утворюють зображення лінійно впорядкованої множини із двох елементів) можна привести за допомогою вказаних допустимих перетворень до наступного вигляду:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & E \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1]Формально матриці A_{12} і A_{22} треба було б позначити іншими символами, наприклад A'_{12} і A'_{22}, але для зручності і по прийнятій в теорії матричних задач традиції ми залишили старі позначення.

Підставляючи ці матриці у (8) та індексуючи одиничні матриці таким чином, щоб матриці завідомо однакового порядку мали один і той же індекс, маємо:

$$A = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & E_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_2 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} E_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема 2 доведена.

4. Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем характеристики 2. Із теореми 1 випливає повний опис модулярних нерозкладних зображень напівгрупи T_2.

Теорема 3. *Нерозкладні матричні зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 вичерпуються, з точністю до еквівалентності, наступними (попарно нееквівалентними) зображеннями:*

1) $a \to 1, \quad b \to 0;$

2) $a \to 1, \quad b \to 1;$

3) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

4) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$

5) $a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

Дійсно, із теореми 1 випливає, що будь-яке матричне зображення напівгрупи T_2 над полем K характеристики 2 еквівалентне прямій сумі зображень вигляду 1)–5). До того ж, зображення 1)–5) попарно нееквівалентні (у випадку зображень однакової розмірності це випливає із того, що матриці, які зіставлені елементу b, мають різні ранги).

Залишилося впевнитися в тому, що всі зображення 1)–5) нерозкладні. Якби існувало розкладне зображення R вигляду 1)–5), то згідно тільки що сказаного воно було б еквівалентним прямій сумі R_0 деяких зображень вигляду 1)–5) меншої розмірності. Якщо врахувати, що еквівалентні зображення мають подібні матриці, що відповідають елементу b, то можливі лише такі випадки:

а) зображення R вигляду 3) еквівалентне прямій сумі R_0 двох зображень вигляду 1);

б) зображення R вигляду 4) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень вигляду 1) та 2);

в) зображення R вигляду 5) еквівалентне прямій сумі R_0 двох зображень вигляду 1) та зображення вигляду 2);

г) зображення R вигляду 5) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень вигляду 1) та 4);

д) зображення R вигляду 5) еквівалентне прямій сумі R_0 зображень вигляду 2) та 3).

Але це неможливо, бо, як легко побачити, у кожному з перерахованих випадків матриці $R(a)$ та $R_0(a)$ не є подібними.

Зауваження 2. Як сказано вище, ми розглядаємо лише такі матричні зображення напівгрупи T_2, які зіставляють одиничному елементу напівгрупи одиничну матрицю. Якщо цього не вимагати, тоді в останній теоремі треба (згідно параграфу 2 чи зауваженню 1) додати наступне зображення:

0) $\quad a \to 0, \quad b \to 0.$

1. Дрозд Ю. А. О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
2. Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А. Представленческий тип конечных групп // Модули и представления : Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24–41.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. – Т. 1 – Москва: “Мир”, 1972. – 285 с.
4. Okninski, J. Linear representations of semigroups. – World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1991.
5. Гельфанд И. М., Пономарев В. А. Неразложимые представления группы Лоренца // Успехи мат. наук. – 1968 . – **23**, вып. 2. – С. 3–60.
6. Назарова Л. А., Ройтер А. В., Сергейчук В. В., Бондаренко В. М. Применение модулей над диадой для классификации конечных p-групп, обладающих абелевой подгруппой индекса p, и пар взаимно аннулирующих операторов // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 69–92.
7. Бондаренко В. М. Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, вып. 1. – С. 63–74.
8. Ringel C. The indecomposable representations of dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19–34.
9. Понизовский И. С. О конечности типа полугрупповой алгебры конечной вполне простой полугруппы // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 154–163.
10. Понизовский И. С. Некоторые примеры полугрупповых алгебр конечного типа // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1987. – **160**. – С. 229–238.
11. Ringel C. The representation type of the full transformation semigroup T_4 // Semigroup Forum. – 2000. – № 3. – P. 429–434.
12. Назарова Л. А., Ройтер А. В. Представления частично упорядоченных множеств // Зап. науч. семинаров ЛОМИ. – 1972. – **28**. – С. 5–31.

Одержано 29.03.2011