УДК 517.983

В. Ф. Журавлев (Житомирский национальный агроэкологический университет)

ПСЕВДООБРАТНЫЙ ОПЕРАТОР К МАТРИЧНОМУ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

The paper covers the formula of the single pseudoinversed operator for matrix normally solvable operators in Hilbert spaces. The author has introduced the notion of the unilaterally pseudoinversed operators for matrix normally solvable equations which function in Hilbert spaces. The paper also highlights the methods of their construction.

В роботі отримано формулу для єдиного псевдооберненого оператора до матричного нормально розв'язного оператора в гільбертовому просторі. Введено поняття односторонньо псевдообернених операторів до матричних нормально розв'язних, які діють в гільбертових просторах, розглянуто способи їх побудови.

Введение. Известно [1, с. 29], что в фиксированном базисе соответствие между операторами, действующими в бесконечномерных гильбертовых пространствах, и бесконечными матрицами взаимно однозначно и обладает обычными алгебраическими свойствами. Если базис меняется, то одному оператору ставится в соответствие множество матриц. С другой стороны, в отличие от конечномерного случая, не каждой бесконечной матрице соответствует оператор. Необходимым условием того, чтобы матрица отвечала какому-нибудь оператору является квадратичная суммируемость последовательностей элементов строк и столбцов матрицы. Но оно не является достаточным. Достаточным будет условие квадратичной суммируемости последовательности всех элементов матрицы, но оно не является необходимым. Этим существенно отличается теория бесконечных матриц от теории конечных: каждому оператору в фиксированном базисе соответствует матрица, но не каждой матрице соответствует оператор.

Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать $Q:\mathbf{H}_1^s\to\mathbf{H}_2^s-$ линейный ограниченный оператор, действующий из гильбертова пространства числовых последовательностей $\mathbf{H}_1^s$ в гильбертово пространство числовых последовательностей $\mathbf{H}_2^s$ (символ $s-$ от англ. sequence), который определяется с помощью бесконечномерной матрицы $Q=\{q_{ij}\}_{i=1}^{\infty}{}_{j=1}^{\infty}$.

Определение 1. *Оператор $Q^-:\mathbf{H}_2^s\to\mathbf{H}_1^s$, удовлетворяющий свойствам*

$$\begin{aligned} &1.\quad QQ^-Q=Q;\\ &2.\quad Q^-QQ^-=Q^- \end{aligned}\tag{1}$$

называется обобщенно-обратным [2] к оператору Q.

Известно [2], что обобщенно-обратный оператор не определяется однозначно. Однако, благодаря наличию в гильбертовых пространствах скалярного произведения, однозначного разложения их в прямые суммы ортогональных замкнутых подпространств, изоморфности взаимно сопряженных пространств, из множества обобщенно-обратных операторов удается выделить единственный псевдообратный.

Определение 2. *Оператор* $Q^+ : \mathbf{H}_2^s \to \mathbf{H}_1^s$, *удовлетворяющий свойствам:*

$$\begin{aligned} &1.\quad QQ^+Q = Q;\\ &2.\quad Q^+QQ^+ = Q^+;\\ &3.\quad (QQ^+)^* = QQ^+ = I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)};\\ &4.\quad (Q^+Q)^* = Q^+Q = I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q)} \end{aligned} \tag{2}$$

называется псевдообратным к оператору Q *по Муру–Пенроузу [3], [4], где* $P_{N(Q)} : \mathbf{H}_1^s \to N(Q)$ *и* $P_{N(Q^*)} : \mathbf{H}_2^s \to N(Q^*)$ *ортопроекторы на нуль-пространства* $N(Q)$ *и* $N(Q^*)$ *операторов* Q *и ему сопряженного* Q^**, соответственно.*

1. Постановка задачи. Пусть $Q-$ линейный ограниченный нормально разрешимый $R(Q) = \overline{R(Q)}$ матричный оператор, действующий из гильбертова пространства $\mathbf{H}_1^s$ в гильбертово пространство $\mathbf{H}_2^s$, $Q : \mathbf{H}_1^s \to \mathbf{H}_2^s$. Обозначим $Q^* : \mathbf{H}_2^* \to \mathbf{H}_1^*-$ сопряженный к оператору Q матричный оператор, действующий из сопряженного гильбертова пространства $(\mathbf{H}_2^s)^*$ в сопряженное гильбертово пространство $(\mathbf{H}_1^s)^*$. Поскольку в гильбертовом пространстве линейный функционал порождается элементом того же пространства [5, с. 181], то $(\mathbf{H}_1^s)^* = \mathbf{H}_1^s$, $(\mathbf{H}_2^s)^* = \mathbf{H}_2^s$, т.е. пространство, сопряженное гильбертовому совпадает с ним с точностью до изоморфизма [6]. Следовательно, оператор Q^* действует из пространства $\mathbf{H}_2^s$ в пространство $\mathbf{H}_1^s$.

Так как нуль-пространство $N(Q) \subset \mathbf{H}_1^s$ и образ $R(Q) \subset \mathbf{H}_2^s$ оператора Q замкнуты, а любое замкнутое подмножество гильбертова пространства дополняемо, то матричный оператор Q обобщенно обратим [7, с. 139] и существуют ограниченные ортопроекторы $P_{N(Q)} : \mathbf{H}_1^s \to N(Q)$ и $P_{N(Q^*)} : \mathbf{H}_2^s \to N(Q^*)$, которые индуцируют разбиение $\mathbf{H}_1^s$ и $\mathbf{H}_2^s$ в прямые ортогональные суммы [8]

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_1^s &= N(Q) \oplus R(Q^*),\\ \mathbf{H}_2^s &= N(Q^*) \oplus R(Q), \end{aligned} \tag{3}$$

где $N(Q) = P_{N(Q)}\mathbf{H}_1^s, N(Q^*) = P_{N(Q^*)}\mathbf{H}_2^s$, $R(Q) = (I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q)})\mathbf{H}_2^s, R(Q^*) = (I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q)})\mathbf{H}_1^s$.

В дальнейшем множество линейных ограниченных нормально разрешимых, а, следовательно, обобщенно обратимых матричных операторов, действующих из гильбертова пространства $\mathbf{H}_1^s$ в гильбертово пространство $\mathbf{H}_2^s$ будем обозначать $\mathbf{GI}(\mathbf{H}_1^s, \mathbf{H}_2^s)$ (Generalized Inverses).

Ставятся следующие задачи: 1) построить односторонне псевдообратные операторы Q_r^+ и Q_l^+, определения которых даны в п. 4; 2) построить единственный псевдообратный оператор Q^+.

2. Вспомогательный результат. Пусть гильбертовы пространства $\mathbf{H}_1^s$ и $\mathbf{H}_2^s$ имеют базисы. Это могут быть счетные базисы Шаудера или более общие базисы. Обозначим $\mathfrak{U}_i$, $i = 1, 2-$ множества произвольной мощности, $\{f_\alpha\}, \alpha \in \mathfrak{U}_1$ и $\{\varphi_\beta\}, \beta \in \mathfrak{U}_2-$ полные системы ортонормированных бесконечномерных векторов с постоянными компонентами, которые составляют, соответственно, базисы нуль-пространств $N(Q) \subset \mathbf{H}_1^s$ и $N(Q^*) \subset \mathbf{H}_2^s$ [9, с. 239].

Определим операторы $P_{N(Q)} : \mathbf{H}_1^s \to N(Q)$ и $P_{N(Q^*)} : \mathbf{H}_1^s \to N(Q^*)$ следующим образом

$$P_{N(Q)}x = \sum_{\alpha \in \mathfrak{U}_1} (x, f_\alpha) f_\alpha,$$
$$\tag{4}$$
$$P_{N(Q^*)}y = \sum_{\beta \in \mathfrak{U}_2} (y, \varphi_\beta) \varphi_\beta.$$

Известно [9], что, если множество $\mathfrak{U}_1$ несчетно, то для любого $x \in \mathbf{H}_1^s$ не более чем счетное число коэффициентов $x_\alpha = (x, f_\alpha)$ отлично от нуля. Если множество $\mathfrak{U}_1$ является счетным, то вместо знака $\sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{U}_1}$ пишут знак $\sum_{\alpha=1}^{\infty}$, подчеркивая счетность множества $\mathfrak{U}_1$.

Поскольку в гильбертовом пространстве любое замкнутое подпространство дополняемо [10], [11], то операторы $P_{N(Q)} : \mathbf{H}_1^s \to N(Q)$ и $P_{N(Q^*)} : \mathbf{H}_1^s \to N(Q^*)$ ограничены. А так как для любых элементов $x \in N(Q)$ и $y \in N(Q^*)$ имеют место равенства Парсеваля [9], то ряды (4) сходятся по нормам пространств $\mathbf{H}_1^s$ и $\mathbf{H}_2^s$, соответственно.

Операторы (4) являются ортопроекторами, так как очевидно, что $P^2_{N(Q)} = P^*_{N(Q)} = P_{N(Q)}$, $P^2_{N(Q^*)} = P^*_{N(Q^*)} = P_{N(Q^*)}$.

Составим из базисных элементов нуль-пространств $N(Q)$ и $N(Q^*)$, соответственно, матрицы:

$$X = (f_1 \; f_2 \; f_3 \; \ldots \; f_\alpha \; \ldots),$$

$$\varPhi = (\varphi_1 \; \varphi_2 \; \varphi_3, \; \ldots \; \varphi_\beta \; \ldots).$$

Определим скалярные произведения базисных вектор-столбцов $\{f_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{U}_1$ на некоторый элемент (вектор-столбец) $x \in \mathbf{H}_1^s$ как произведение матрицы X на вектор-столбец x следующим образом

$$(X, x)_{\mathbf{H}_1^s} = X^* \cdot x,$$

результатом которого будет бесконечномерный вектор-столбец чисел, α-я компонента которого есть скалярное произведение $(f_\alpha, x)_{\mathbf{H}_1^s} = f_\alpha^* \cdot x$, где f_α^*– вектор-строка, транспонированная к вектор-столбцу f_α, $\alpha \in \mathfrak{U}_1$.

Тогда, используя свойства скалярного произведения, проекторы (4) $P_{N(Q)} : \mathbf{H}_1^s \to N(Q)$ и $P_{N(Q^*)} : \mathbf{H}_1^s \to N(Q^*)$ можно записать в виде:

$$P_{N(Q)}x = X \cdot (X, x)_{\mathbf{H}_1^s} = X \cdot X^* \cdot x, \; \forall x \in \mathbf{H}_1^s,$$
$$\tag{5}$$
$$P_{N(Q^*)}y = \varPhi \cdot (\varPhi, y)_{\mathbf{H}_2^s} = \varPhi \cdot \varPhi^* \cdot y, \; \forall y \in \mathbf{H}_2^s.$$

Ортопроекторы (5) являются ограниченными операторами и разбивают пространство $\mathbf{H}_1^s$ в прямые суммы взаимно ортогональных замкнутых подпространств по формулам (3).

В зависимости от соотношения мощностей множеств $\mathfrak{U}_1$ и $\mathfrak{U}_2$ для нуль-пространств $N(Q)$ и $N(Q^*)$ возможны три случая:

1. *Если мощность множества* $\mathfrak{U}_1$ *меньше мощности множества* $\mathfrak{U}_2$, $|\mathfrak{U}_1| < |\mathfrak{U}_2|$, *то нуль-пространство* $N(Q)$ *линейно изоморфно некоторому подпространству* $N^{(1)}(Q^*) \subset N(Q^*)$: $N(Q) \cong N^{(1)}(Q^*)$.

В этом случае существуют:

i) линейный ограниченный обратимый оператор $U_1 : N(Q) \to N^{(1)}(Q^*)$ такой, что $U_1 N(Q) = N^{(1)}(Q^*), U_1^{-1} N^{(1)}(Q^*) = N(Q)$;

ii) ограниченный ортопроектор $P_{N^{(1)}(Q^*)} : \mathbf{H}_2^s \to \mathbf{H}_2^s$, разбивающий подпространство $N(Q^*)$ в прямую сумму замкнутых подпространств

$$N(Q^*) = N^{(1)}(Q^*) \oplus N^{(2)}(Q^*), \tag{6}$$

где $N^{(1)}(Q^*) = P_{N^{(1)}(Q^*)}\mathbf{H}_2^s$, $N^{(2)}(Q^*) = P_{N^{(2)}(Q^*)}\mathbf{H}_2^s$, $P_{N^{(2)}(Q^*)} = P_{N(Q^*)} - P_{N^{(1)}(Q^*)}$– ограниченный ортопроектор.

2. *Если мощность множества* $\mathfrak{U}_1$ *больше мощности множества* $\mathfrak{U}_2$, $|\mathfrak{U}_1| > |\mathfrak{U}_2|$, *то некоторое подпространство* $N^{(1)}(Q) \subset N(Q)$ *линейно изоморфно нуль-пространству* $N(Q^*) : N^{(1)}(Q) \cong N(Q^*)$.

В этом случае существуют:

i) линейный ограниченный обратимый оператор $U_2 : N^{(1)}(Q) \to N(Q^*)$ такой, что $U_2 N^{(1)}(Q) = N(Q^*)$, $U_2^{-1} N(Q^*) = N^{(1)}(Q)$;

ii) ограниченный ортопроектор $P_{N^{(1)}(Q)} : \mathbf{H}_1^s \to \mathbf{H}_1^s$, разбивающий подпространство $N(Q)$ в прямую сумму замкнутых подпространств

$$N(Q) = N^{(1)}(Q) \oplus N_2(L), \tag{7}$$

где $N^{(1)}(Q) = P_{N^{(1)}(Q)}\mathbf{H}_1^s$, $N_2(L) = P_{N_2(L)}\mathbf{H}_1^s$, $P_{N_2(L)} = P_{N(Q)} - P_{N^{(1)}(Q)}$– ограниченный ортопроектор.

3. *Если мощности множеств* $\mathfrak{U}_1$ *и* $\mathfrak{U}_2$ *совпадают,* $|\mathfrak{U}_1| = |\mathfrak{U}_2|$, *то нуль-пространство* $N(Q)$ *линейно изоморфно нуль-пространству* $N(Q^*)$: $N(Q) \cong N(Q^*)$.

Тогда существует линейный ограниченный обратимый оператор $U_3 : N(Q) \to N(Q^*)$ такой, что $U_3 N(Q) = N(Q^*)$, $U_3^{-1} N(Q^*) = N(Q)$.

Обозначим расширения операторов $U_i, i = 1, 2, 3$ на пространство $\mathbf{H}_1^s$ через $\overline{P}_{N^{(1)}(Q^*)} : \mathbf{H}_1^s \to N^{(1)}(Q^*) \subseteq N(Q^*)$, а через $\overline{P}_{N^{(1)}(Q)} : \mathbf{H}_2^s \to N^{(1)}(Q) \subseteq N(Q)$ – расширения операторов $U_i^{-1}, i = 1, 2, 3$ на пространство $\mathbf{H}_2^s$. В третьем случае $N^{(1)}(Q^*) \equiv N(Q^*)$, $N^{(1)}(Q) \equiv N(Q)$ и поэтому $\overline{P}_{N^{(1)}(Q^*)} \equiv \overline{P}_{N(Q^*)}$, а $\overline{P}_{N^{(1)}(Q)} \equiv \overline{P}_{N(Q)}$.

По формулам, аналогичным [12, с. 172, 173], построим ограниченные операторы $\overline{P}_{N^{(1)}(Q^*)} : \mathbf{H}_1^s \to N^{(1)}(Q^*) \subseteq N(Q^*)$, $\overline{P}_{N^{(1)}(Q)} : \mathbf{H}_2^s \to N^{(1)}(Q) \subseteq N(Q)$

$$\overline{P}_{N^{(1)}(Q^*)} x = \overline{\Phi}\,\overline{X}^* x, \quad \forall x \in \mathbf{H}_1^s,$$

$$\overline{P}_{N^{(1)}(Q)} y = \overline{X}\,\overline{\Phi}^* y, \quad \forall y \in \mathbf{H}_2^s,$$

где матрица $\overline{X}$ составлена из элементов матрицы X, составляющих ортонормированный базис подпространства $N^{(1)}(Q)$, а матрица $\overline{\Phi}$– из функционалов матрицы Φ, составляющих ортонормированный базис подпространства $N^{(1)}(Q^*)$.

Оператор $\overline{P}_{N^{(1)}(Q^*)} : \mathbf{H}_1^s \to N_1(Q^*)$ является расширением на все пространство $\mathbf{H}_1^s$ оператора, осуществляющего изоморфизм $N(Q) \to N_1(Q^*) \subset N(Q^*)$, а оператор $\overline{P}_{N^{(1)}(Q)} : \mathbf{H}_2^s \to N^{(1)}(Q) \subset N(Q)$– расширением ему обратного на пространство $\mathbf{H}_2^s$.

Лемма 1. *Пусть $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{H}_1^s, \mathbf{H}_2^s)$. Тогда оператор $\overline{Q} = Q + \overline{P}_{N_1(Q^*)}$ на подпространстве $R(\overline{Q})$ имеет ограниченный обратный*

$$\overline{Q}_{l,r}^{-1} = \begin{cases} (Q + \overline{P}_{N^{(1)}(Q^*)})_l^{-1} - & \textit{левый, если} \quad |\mathfrak{U}_1| < |\mathfrak{U}_2|, \\ \\ (Q + \overline{P}_{N(Q^*)})_r^{-1} - & \textit{правый, если} \quad |\mathfrak{U}_1| > |\mathfrak{U}_2|. \end{cases}$$

Общий вид односторонне обратных операторов $\overline{Q}_{l_0,r_0}^{-1}$ задается формулой

$$\overline{Q}_{l_0,r_0}^{-1} = \begin{cases} \overline{Q}_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q^*)}) - & \textit{левый, если} \quad |\mathfrak{U}_1| < |\mathfrak{U}_2|, \\ \\ (I_{\mathbf{H}_1^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q)})\overline{Q}_r^{-1} - & \textit{правый, если} \quad |\mathfrak{U}_1| > |\mathfrak{U}_2|, \end{cases}$$

где $\widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q)} : \mathbf{H}_1^s \to N^{(2)}(Q)$ и $\widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q^*)} : \mathbf{H}_2^s \to N^{(2)}(Q^*)$– произвольные бесконечномерные ограниченные косые проекторы.

Доказательство. Пусть для определенности $|\mathfrak{U}_1| > |\mathfrak{U}_2|$.

Покажем, что оператор $\overline{Q} = Q + \overline{P}_{N(Q^*)}$ имеет ограниченный правый обратный. Поскольку $N(Q)$ дополняемо в $\mathbf{H}_1^s$, то в силу равенства (5) и ограниченности ортопроектора $P_{N^{(2)}(Q)}$ подпространство $N(\overline{Q})$ дополняемо в $\mathbf{H}_1^s$. Таким образом, для доказательства существования правого обратного оператора необходимо и достаточно показать что [7]:

$$R(\overline{Q}) = R(Q + \overline{P}_{N_1(Q^*)}) \equiv \mathbf{H}_2^s$$

.

Поскольку $|\mathfrak{U}_1| > |\mathfrak{U}_2|$, то нуль-пространство $N(Q^*)$ изоморфно подпространству $N^{(1)}(Q) \subset N(Q)$ и $\overline{P}_{N_1(Q^*)} \equiv \overline{P}_{N(Q^*)} : \mathbf{H}_1^s \to N(Q^*)$. А так как подпространства $R(Q)$ и $N(Q^*)$ взаимно дополняемы в гильбертовом пространстве $\mathbf{H}_2^s$, то по определению операторов $\overline{Q}$, $\overline{P}_{N(Q^*)}$ и из соотношения (6) для произвольного элемента $x \in \mathbf{H}_1^s$, $x = x_1 + x_2$ и $(x_1, x_2) = 0$ имеем:

$$\overline{Q}x = Qx + \overline{P}_{N(Q^*)}x.$$

Но $Qx = x_1 \in R(Q)$, $\overline{P}_{N(Q^*)}x = x_2 \in N(Q^*)$. Следовательно, $R(\overline{Q}) \equiv \mathbf{H}_2^s$.

Таким образом, оператор $Q + \overline{P}_{N_1(Q^*)}$ имеет правый обратный.

Поскольку оператор $\overline{Q}$ осуществляет взаимно однозначное соответствие пространства $\mathbf{H}_1^s \ominus N^{(2)}(Q)$ на пространство $\mathbf{H}_2^s = R(\overline{Q})$, то правый обратный оператор $\overline{Q}_r^{-1}$ на пространстве $\mathbf{H}_2^s$ в силу теоремы Банаха [13] ограничен.

Известно [7], что общий вид правых обратных операторов представляется следующим образом: $\overline{Q}_{r_0}^{-1} = \mathcal{P}_{N(\overline{Q})}\overline{Q}^{-1}$, где $\mathcal{P}_{N(\overline{Q})}$– некоторый косой проектор на нуль-пространство оператора $\overline{Q}$. Как следует из (5), таким свойством обладает проектор $I_{\mathbf{H}_1^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q)}$, т.е. $N(I_{\mathbf{H}_1^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q)}) = N(\overline{Q})$, значит общее представление левых обратных операторов можно записать в виде

$$\overline{Q}_{r_0}^{-1} = (I_{\mathbf{H}_1^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q)})\overline{Q}_r^{-1}.$$

В общем виде косой проектор можно построить с использованием леммы А. Собчика [10].

Для случая, когда $N(Q)$ изоморфно подпространству $N^{(1)}(Q^*) \subset N(Q^*)$, лемма доказывается аналогично.

Лемма доказана.

3. Левый, правый псевдообратный операторы.

Известно [2] что, псевдообратный оператор минимизирует нормы невязок исходного $Qx = y$ и сопряженного $Q^*f = g$ уравнений. Однако каждый в отдельности минимум может достигаться с помощью разных операторов. Действительно, если обобщенный обратный оператор Q^- удовлетворяет условиям 1–3, то он будет давать решение $x = Q^-y$ минимизирующее норму невязки только исходного уравнения, а если для обобщенно-обратного оператора Q^- выполняются условия 1, 2, 4, то достигается минимум нормы невязки только сопряженного уравнения. В связи с этим введем следующие определения.

Определение 3. *Оператор* $Q_r^+ : \mathbf{H}_2^s \to \mathbf{H}_1^s$, *удовлетворяющий условиям*

$$\begin{aligned} &1.\quad QQ_r^+Q = Q,\\ &2.\quad Q_r^+QQ_r^+ = Q_r^+, \qquad (8)\\ &3.\quad (QQ_r^+)^* = QQ_r^+ = I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)} \end{aligned}$$

называется правым псевдообратным оператором к матричному оператору $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{H}_1^s, \mathbf{H}_2^s)$.

Определение 4. *Оператор* $Q_l^+ : \mathbf{H}_2^s \to \mathbf{H}_1^s$, *удовлетворяющий условиям*

$$\begin{aligned} &1.\quad QQ_l^+Q = Q,\\ &2.\quad Q_l^+QQ_l^+ = Q_l^+, \qquad (9)\\ &3.\quad (Q_l^+Q)^* = Q_l^+Q = I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q)}, \end{aligned}$$

называется левым псевдообратным оператором к матричному оператору $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{H}_1^s, \mathbf{H}_2^s)$.

Естественно, что оператор, являющийся и левым и правым псевдообратным одновременно, будет псевдообратным в смысле Мура–Пенроуза.

Конструкции односторонне псевдообратных операторов дают следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{H}_1^s, \mathbf{H}_2^s)$. *Тогда оператор*

$$Q_r^+ = \overline{Q}_{l_0,r_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)}) = \begin{cases} \overline{Q}_l^{-1}(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)}), & \text{если} \quad |\mathfrak{U}_1| < |\mathfrak{U}_2|,\\ \overline{Q}_r^{-1}(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)}), & \text{если} \quad |\mathfrak{U}_1| > |\mathfrak{U}_2| \end{cases} \qquad (10)$$

является ограниченным правым псевдообратным к матричному оператору Q.

Доказательство. Заключается в проверке выполнения свойств (8). Пусть для определенности $|\mathfrak{U}_1| > |\mathfrak{U}_2|$, т.е. подпространство $N^{(1)}(Q) \subset N(Q)$ изоморфно нуль-пространству $N(Q^*)$. Это значит, что существует правый обратный оператор $\overline{Q}_{r_0}^{-1}$.

Сначала проверим выполнение свойства 3.

$$QQ_r^+ = Q\overline{Q}_r^{\,-1}(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)}) = (I_{\mathbf{H}_2^s} - \mathcal{P}_{N(Q^*)})(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)}) =$$

$$= I_{\mathbf{H}_2^s} - \mathcal{P}_{N(Q^*)} - P_{N(Q^*)} + \mathcal{P}_{N(Q^*)}P_{N(Q^*)} =$$

$$= I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)} = (I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)})^* = (QQ_r^+)^*,$$

поскольку $\mathcal{P}_{N(Q^*)}P_{N(Q^*)} = \mathcal{P}_{N(Q^*)}$, где $\mathcal{P}_{N(Q^*)} : \mathbf{H}_1^s \to N(Q^*)$– некоторый ограниченный косой проектор.

Далее проверим выполнение свойств 1 и 2 из (8).

$$QQ_r^+Q = (I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)})Q = Q - P_{N(Q^*)}Q = Q,$$

поскольку $P_{N(Q^*)}Q = 0$.

$$Q_r^+QQ_r^+ = Q_r^+(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)}) = Q_r^+ - \overline{Q}_{r_0}^{\,-1}(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)})P_{N(Q^*)} =$$

$$= Q_r^+ - \overline{Q}_{r_0}^{\,-1}(P_{N(Q^*)} - P_{N(Q^*)}) = Q_r^+,$$

так как $P^2_{N(Q^*)} = P_{N(Q^*)}$.

Легко проверить, что условие 4 из (2) не выполняется. Действительно,

$$Q_r^+Q = \overline{Q}_{r_0}^{\,-1}(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)})Q = \overline{Q}_{r_0}^{\,-1}Q = I_{\mathbf{H}_1^s} - \mathcal{P}_{N(Q)},$$

так как $\overline{Q}_r^{\,-1}Q = I_{\mathbf{H}_1^s} - \mathcal{P}_{N(Q)}$, где $\mathcal{P}_{N(Q^*)} : \mathbf{H}_1^s \to N(Q)$– некоторый ограниченный косой проектор [7].

Теорема 2. *Пусть* $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{H}_1^s, \mathbf{H}_2^s)$. *Тогда оператор*

$$Q_l^+ = (I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q)})\,\overline{Q}_{l_0,r_0}^{\,-1} = \begin{cases} (I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q)})\,\overline{Q}_{l_0}^{\,-1}, & \textit{если} \quad |\mathfrak{U}_1| < |\mathfrak{U}_2|, \\ (I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q)})\,\overline{Q}_{r_0}^{\,-1}, & \textit{если} \quad |\mathfrak{U}_1| > |\mathfrak{U}_2| \end{cases} \tag{11}$$

является ограниченным левым псевдообратным к матричному оператору Q.

Доказательство теоремы 2 аналогично доказательству теоремы 1.

4. Псевдообратный оператор.

Теоремы 1, 2 позволяют предложить формулу для псевдообратного оператора к нормально разрешимому в гильбертовом пространстве.

Теорема 3. *Оператор*

$$Q^+ = \begin{cases} Q_l^+(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)}), & \textit{если} \quad |\mathfrak{U}_1| < |\mathfrak{U}_2|, \\ (I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q)})\,Q_r^+, & \textit{если} \quad |\mathfrak{U}_1| > |\mathfrak{U}_2| \end{cases} \tag{12}$$

является единственным ограниченным псевдообратным к линейному ограниченному матричному оператору $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{H}_1^s, \mathbf{H}_2^s)$.

Доказательство. Проверим выполнение свойств (2), которые определяют псевдообратный оператор. Для определенности рассмотрим случай, когда $|\mathfrak{U}_1| < |\mathfrak{U}_2|$, т.е. нуль-пространство $N(Q)$ изоморфно подпространству $N^{(1)}(Q^*) \subset N(Q^*)$. Это значит, что в силу леммы 1 существует левый обратный оператор $\overline{Q}_{l_0}^{\,-1}$.

Так как

$$Q(I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q)}) = Q; \quad (I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)})Q = Q; \quad \mathcal{P}_{N(Q^*)}Q = 0,$$

то имеем равенство, доказывающее первое свойство

$$QQ^+Q = Q(I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q)})\overline{Q}_{l_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)})Q =$$

$$= Q\overline{Q}_{l_0}^{-1}Q = (I_{\mathbf{H}_2^s} - \mathcal{P}_{N(Q^*)})Q = Q,$$

где $\mathcal{P}_{N(Q^*)} : \mathbf{H}_2^s \to N(Q^*)$– ограниченный косой проектор.

Поскольку $Q\overline{Q}_{l_0}^{-1} = I_{\mathbf{H}_2^s} - \mathcal{P}_{N(Q^*)}$, а $\mathcal{P}_{N(Q^*)}P_{N(Q^*)} = \mathcal{P}_{N(Q^*)}$, то

$$Q^+QQ^+ = Q^+Q(I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q)})\overline{Q}_{l_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)}) =$$

$$= Q^+Q\overline{Q}_{l_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)}) = Q^+(I_{\mathbf{H}_2^s} - \mathcal{P}_{N(Q^*)})(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)}) =$$

$$= Q^+(I_{\mathbf{H}_2^s} - \mathcal{P}_{N(Q^*)} - P_{N(Q^*)} + \mathcal{P}_{N(Q^*)}) = Q^+.$$

Проверим выполнение свойства 3:

$$QQ^+ = Q(I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q)})Q_{l_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)}) =$$
$$= QQ_{l_0}^{-1}(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)}) = (I_{\mathbf{H}_2^s} - \mathcal{P}_{N(Q^*)})(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)}) =$$
$$= I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)} = (QQ^+)^*.$$

И в заключение проверим свойство 4:

$$Q^+Q = Q_l^+(I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q^*)})Q = Q_l^+Q = I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q)} = (Q^+Q)^*,$$

так как Q_l^+– левый псевдообратный оператор.

Для случая $N(Q) \supset N^{(1)}(Q) \cong N(Q^*)$ доказательство проводится аналогично.

Теорема доказана.

Замечание 1. *Если $Q^- : \mathbf{H}_2^s \to \mathbf{H}_1^s$– некоторый обобщенно-обратный оператор, удовлетворяющий свойствам (1), то, используя конструкцию аналогичную (12) теоремы 3, легко доказать, что оператор*

$$Q^+ = (I_{\mathbf{H}_1^s} - P_{N(Q)})Q^-(I_{\mathbf{H}_2^s} - P_{N(Q^*)})$$

будет единственным псевдообратным оператором к оператору $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{H}_1^s, \mathbf{H}_2^s)$.

Если нуль-пространства $N(Q)$ и $N(Q^*)$ изоморфны, то для построения ограниченного псевдообратного матричного оператора Q^+ к линейному ограниченному матричному оператору $Q : \mathbf{H}_1^s \to \mathbf{H}_2^s$ можно применить следующую процедуру.

Поскольку $N(Q)$ изоморфно $N(Q)$, то $\overline{X} = X$, а $\overline{\Phi} = \Phi$. Тогда

$$\overline{P}_{N(Q^*)}x = \Phi(X, x)_{\mathbf{H}_1^s} = \Phi \cdot X^* \cdot x, \ \overline{P}_{N(Q^*)} : \mathbf{H}_1^s \to N(Q^*);$$

$$\overline{P}_{N(Q)}y = X(\varPhi, y)_{\mathbf{H}_2^s} = X \cdot \varPhi^* \cdot y,\ \overline{P}_{N(Q)} : \mathbf{H}_2^s \to N(Q).$$

Оператор $Q + \overline{P}_{N(Q^*)}$ действует из пространства $\mathbf{H}_1^s$ во все пространство $\mathbf{H}_2^s$ и по теореме Банаха имеет ограниченный обратный $(Q + \overline{P}_{N(Q^*)})^{-1}$.

Теорема 4. *Пусть матричный оператор $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{H}_1^s \to \mathbf{H}_2^s)$ и $N(Q)$ изоморфно $N(Q^*)$. Тогда на подпространстве $R(Q)$ матричный оператор*

$$Q^+ = (Q + \overline{P}_{N(Q^*)})^{-1} - \overline{P}_{N(Q)}$$

будет единственным ограниченным псевдообратным к оператору Q.

Доказательство теоремы 4 аналогично доказательству теоремы 3.

Как следствие из теоремы 4 сформулируем утверждение для случая, когда матричный оператор Q является самосопряженным, $Q : \mathbf{H^s} \to \mathbf{H^s}$.

Теорема 5. *Пусть матричный оператор $Q \in \mathbf{GI}(\mathbf{H}^s \to \mathbf{H}^s)$ является самосоряженным. Тогда на подпространстве $R(Q)$ матричный оператор*

$$Q^+ = (Q + P_{N(Q)})^{-1} - P_{N(Q)} \tag{13}$$

будет единственным ограниченным псевдообратным к оператору Q.

Доказательство. Поскольку матричный оператор — самосопряженный, то $N(Q) = N(Q^*)$, $X = \varPhi$ и, как следствие, $P_{N(Q^*)} = P_{N(Q)}$, $P_{N(Q)} = \overline{P}_{N(Q)} = \overline{P}_{N(Q^*)}$. Отсюда следует утверждение теоремы 5.

5. Пример.

Рассмотрим построение односторонне псевдообратных и псевдообратного операторов к оператору Q, действующему из евклидова пространства $\mathbf{R}^3$ в сепарабельное гильбертово пространство $\mathbf{l^2}$, который в некотором фиксированном базисе представляется $(\infty \times 3)-$ мерной матрицей

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{8} & 0 & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}.$$

Оператор $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{l^2}$ ограничен, поскольку

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} (q_{ij})^2 \le 2.$$

Пространства $\mathbf{R}^3$ и $\mathbf{l^2}$, в которых действует ограниченный оператор Q гильбертовы, поэтому можно построить ограниченные левый Q_l^+, правый Q_r^+, псевдообратные и псевдообратный Q^+ операторы к оператору $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{l^2}$.

По формулам (4) построим ортопроекторы $P_{N(Q)} : \mathbf{R}^3 \to N(Q)$ и $P_{N(Q^*)} : \mathbf{l^2} \to N(Q^*)$:

$$P_{N(Q)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

$$P_{N(Q^*)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 & -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{3}{16} & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{3}{8} & 0 & -\frac{13}{16} & 0 & -\frac{3}{32} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ -\frac{3}{16} & 0 & -\frac{3}{32} & 0 & -\frac{61}{64} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Далее вычислим ортопроекторы $I_{\mathbf{R}^3} - P_{N(Q)} : \mathbf{R}^3 \to R(Q^*)$ и $I_{\mathbf{l^2}} - P_{N(Q^*)} : \mathbf{l^2} \to R(Q)$:

$$I_{\mathbf{R}^3} - P_{N(Q)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$I_{\mathbf{l^2}} - P_{N(Q^*)} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & 0 & \frac{3}{64} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Поскольку мощность множества $\mathfrak{U}_1$ меньше мощности множества $\mathfrak{U}_1$, то по лемме 1 существует левый обратный оператор $\overline{Q}_l^{-1}$.

Одним из левых обратных операторов $\overline{Q}_l^{-1}$ к оператору $\overline{Q}$ будет оператор

$$\overline{Q}_l^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 & -2 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & 2 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -8 & 0 & 16 & 0 & -32 & 0 & 64 & \dots \end{pmatrix}.$$

Тогда, поскольку имеет место равенство (6), то $\widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q^*)} = \widetilde{\mathcal{P}}_{N(Q^*)} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(1)}(Q^*)}$ и один из косых проекторов $I_{\mathbf{H}_2^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q^*)}$ будет иметь вид:

$$I_{\mathbf{H}_2^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q^*)} = I_{\mathbf{H}_2} - \mathcal{P}_{N(Q^*)} + \mathcal{P}_{N^{(1)}(Q^*)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Тогда, следуя лемме 1, общий вид левого обратного оператора $\overline{Q}_{l_0}^{-1}$ относительно проектора $\widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q^*)}$ будет:

$$\overline{Q}_{l_0}^{\,-1} = \overline{Q}_{l}^{\,-1}(I_{\mathbf{H}_2^s} - \widetilde{\mathcal{P}}_{N^{(2)}(Q^*)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Далее, используя формулу (11) теоремы 2, получим левый псевдообратный оператор Q_l^+ к оператору Q.

$$Q_l^+ = (I_{\mathbf{R}^3} - P_{N(Q)})\overline{Q}_{l_0}^{\,-1} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

А используя формулу (10) теоремы 1, получим правый псевдообратный оператор Q_r^+ к оператору Q.

$$Q_r^+ = \overline{Q}_{l_0}^{\,-1}(I_{\mathbf{l}^2} - P_{N(Q^*)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & 0 & \frac{3}{64} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & \dots \end{pmatrix}.$$

Тогда по формуле (12) теоремы 3 найдем единственный псевдообратный оператор Q^+ к оператору Q.

$$Q^+ = Q_l^+(I_{\mathbf{l}^2} - P_{N(Q^*)}) = (I_{\mathbf{R}^3} - P_{N(Q)})\overline{Q}_{l_0}^{\,-1}(I_{\mathbf{l}^2} - P_{N(Q^*)}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & 0 & \frac{3}{64} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{16} & 0 & \frac{3}{32} & 0 & \frac{3}{64} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{3}{4} & 0 & \frac{3}{8} & 0 & \frac{3}{16} & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

1. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970. – 353 с.

2. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Изд-во ИМ НАНУ, 1995. – 320 с.

3. *Moore E.H.* On the Reciprocal of the General Algebraic Matrix (Abstract) // Bull. Amer. Math. Soc. – 1920. – № 26. – P. 394–395.

4. *Penrose R.* A Generalized Inverse for Matrices // Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955. T. 51, № 3. – P. 406–413.

5. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1968. – 496 с.

6. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 587 с.

7. *Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.

8. *Садовничий В.А.* Теория операторов. – 2-е изд. М.: Изд-во МГУ, 1986. – 368 с.

9. *Березанский Ю.М., Ус Г.Ф., Шефтель З.Г.* Функциональный анализ. – Киев: Наук. думка, 1990. – 600 с.

10. *Кадец М.И., Митягин Б.С.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // УМН. – 1973. – *28*, вып. 6. – С. 77 – 94.

11. *Попов М.М.* Доповнiвані простори i деякi задачi сучасної геометрiї просторiв Банаха // Математика сьогоднi'07. – 2007. – В. 13. – С. 78 – 116.

12. *Журавлев В.Ф.* Критерий разрешимости и представление решений линейных $n-$ $(d-)$ нормальных операторных уравнений в банаховом пространстве //УМЖ. – 2010. – **62**, №2. – С. 167 — 182.

13. *Треногин В.А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 495 с.

Одержано 02.03.2011