УДК 517.927

К. В. Маринець (Ужгородський нац. ун–т)

ПРО ДОСЛІДЖЕННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ З НЕЛІНІЙНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ

We obtain some results concerning the investigation of the solutions of certain type of boundary–value problem, subjected to two–point non–linear boundary conditions. We show that it is useful to reduce the given problem to the parametrized one with linear boundary restrictions containing some artificially introduced parameters. To study the transformed two–point problem we justify a method, which is based upon special type of approximations constructed in an analytic form. The introduced parameters can be found as solutions of so-called determining system of algebraic or transcendental equations.

Отримуємо деякі результати, що стосуються дослідження розв'язків крайових задач певного типу, підпорядкованих двоточковим нелінійним граничним умовам. Показується ефективність зведення даної задачі до параметризованої крайової задачі з лінійними граничними умовами, які містять деякі штучно введені параметри. Для вивчення перетвореної двоточкової задачі обґрунтовується метод, що базується на спеціального типу наближеннях, побудованих в аналітичній формі. Введені параметри знаходяться як розв'язки так званої системи алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь.

Вступ. У даній роботі пропонуємо один підхід для дослідження системи нелінійних диференціальних рівнянь, підпорядкованих нелінійним двоточковим крайовим умовам, який базується на переході до крайової задачі з лінійними граничними умовами шляхом підходящого типу параметризації. Дається чисельно–аналітична схема дослідження існування розв'язку та наближеної його побудови. Ефективність розглядуваного методу демонструється на ілюстративному прикладі.

1. Постановка задачі. Розглянемо нелінійну двоточкову крайову задачу з нелінійними граничними умовами наступного вигляду:

$$\frac{dx\left(t\right)}{dt}=f\left(t,x\left(t\right)\right), \tag{1}$$

$$g\left(x\left(0\right),x\left(T\right)\right)=0, \tag{2}$$

де $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}^n$, функції $f:[0,T]\times D\to\mathbb{R}^n$ та $g:D\times D\to\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ неперервні, а множина $D\subset\mathbb{R}^n$ — замкнена обмежена область.

Задача полягає у відшуканні неперервно–диференційовного на проміжку $[0,T]$ розв'язку системи диференціальних рівнянь (1), що задовольняє нелінійним граничним умовам (2).

Покажемо, що замість крайової задачі (1), (2) доцільно розглядати систему диференціальних рівнянь (1) при певних параметризованих граничних умовах, до яких потрібно приєднати деяку систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь для визначення значень введених параметрів.

2. Перехід до задачі з лінійними крайовими умовами. Замінимо значення компонент розв'язку задачі (1), (2) в точках $t=0$ та $t=T$ параметрами z_1, z_2, …, z_n та λ_1, λ_2 , …, λ_n відповідно:

$$\begin{aligned} x(0) = col\,(x_1(0), x_2(0), \ldots, x_n(0)) = col\,(z_1, z_2, \ldots, z_n)\,, \\ x(T) = col\,(x_1(T), x_2(T), \ldots, x_n(T)) = col\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Перетворимо крайові умови (2) наступним чином:

$$Ax(0) + Cx(T) + g\,(x(0), x(T)) = Ax(0) + Cx(T), \tag{4}$$

де A і C — квадратні матриці розмірності n, причому $detC \neq 0$.

Використовуючи параметризацію (3), нелінійні граничні умови (4) запишуться так:

$$Az + C\lambda + g\,(z, \lambda) = Ax(0) + Cx(T). \tag{5}$$

Введемо позначення:

$$d(z, \lambda) := Az + C\lambda + g\,(z, \lambda)\,, \tag{6}$$

де

$$\begin{aligned} z := x(0) = col\,(z_1, z_2, \ldots, z_n)\,, \\ \lambda := x(T) = col\,(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Для спрощення обчислень покладемо в рівнянні (5) $C \equiv I_n$, I_n — одинична матриця розмірності $n \times n$. Тоді з врахуванням (6), крайові умови (5) набудуть вигляду:

$$Ax(0) + x(T) = d\,(z, \lambda)\,. \tag{8}$$

Зауваження 1. Множина розв'язків нелінійної двоточкової крайової задачі (1), (2) співпадає з множиною тих розв'язків задачі (1), (8), які задовольняють додатковим умовам (3).

Для дослідження модифікованої крайової задачі (1), (8) обґрунтуємо відповідну чисельно–аналітичну схему, яка базується на методі послідовних наближень.

3. Побудова та збіжність послідовних наближень. На основі заданої функції f у правій частині системи диференціальних рівнянь (1) визначимо вектор:

$$\delta_D(f) := \frac{1}{2}\left[\max_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x) - \min_{(t,x)\in[0,T]\times D} f(t,x)\right], \tag{9}$$

для якого справедлива нерівність:

$$\delta_D(f) \leq \max_{(t,x)\in[0,T]\times D} |f\,(t,x)|\,.$$

У рівності (9), а також аналогічних співвідношеннях нижче, знаки $|\cdot|$, $\geq$, $\leq$ та операції max, min між векторами розуміються покомпонентно.

Для $z \in D$, $\lambda \in D$ вигляду (7) введемо в розгляд вектор $\beta\;:\;D\,\times\,D\;\rightarrow\;\mathbb{R}^n$:

$$\beta\,(z, \lambda) := \frac{T}{2}\delta_D(f) + |d\,(z, \lambda) - (A + I_n)\,z|\,. \tag{10}$$

Припустимо, що для крайової задачі (1), (2) виконуються наступні умови:

A) функція f неперервна в області $[0,T]\times D$ та задовольняє умову Ліпшиця:

$$|f(t,u)-f(t,v)|\leq K\,|u-v|\,, \tag{11}$$

для всіх $t\in[0,T]$, $\{u,v\}\subset D$, де $K=(k_{ij})_{i,j=1}^{n}$ — деяка стала матриця з невід'ємними компонентами;

B) множина

$$D_\beta:=\{z\in D: B(z,\beta(z,\lambda))\subset D, \forall\lambda\in D\subset\mathbb{R}^n\}$$

непорожня, де β — окіл $B(z,\beta(z,\lambda))$ точки $z\in D$, що визначається наступним чином:

$$B(z,\beta(z,\lambda)):=\{x\in\mathbb{R}^n: |x-z|\leq\beta(z,\lambda), \text{для всіх } \lambda\in D\subset\mathbb{R}^n\}\,;$$

C) спектральний радіус $r(K)$ матриці K задовольняє нерівність:

$$r(K)<\frac{10}{3T}. \tag{12}$$

Для дослідження розв'язків параметризованої крайової задачі (1), (8) введемо в розгляд послідовність функцій $\{x_m\}$, що визначається рекурентним співвідношенням:

$$x_m(t,z,\lambda):=z+\int_0^t f(s,x_{m-1}(s,z,\lambda))ds-$$
$$-\frac{t}{T}\int_0^T f(s,x_{m-1}(s,z,\lambda))ds+\frac{t}{T}\left[d\left(z,\lambda\right)-\left(A+I_n\right)z\right], \tag{13}$$

де $m=1,2,3,\ldots,\ x_0(t,z,\lambda)=col(z_1,z_2,\ldots,z_n)=z\in\ D_\beta$,
$x_m\left(t,z,\lambda\right)=col\left(x_{m,1}\left(t,z,\lambda\right),x_{m,2}\left(t,z,\lambda\right),\ldots,x_{m,n}\left(t,z,\lambda\right)\right)$, а z та λ розглядаються як параметри.

Легко переконатися, що для всіх $m\geq1$, $\lambda\in D$ і $z\in\mathbb{R}^n$, функції x_m задовольняють лінійні граничні умови (8).

Визначимо рівномірну збіжність послідовності (13) та співвідношення її граничної функції до розв'язку вихідної крайової задачі (1), (2).

Теорема 1. *Нехай функція $f:[0,T]\times D\to\mathbb{R}^n$ у правій частині системи диференціальних рівнянь (1), а також параметризовані крайові умови (8) задовольняють умови A) — C).*

Тоді при всіх фіксованих $\lambda\in D$ та $z\in D_\beta$:

1. *Всі функції послідовності (13) неперервно–диференційовні та задовольняють параметризовані крайові умови (8):*

$$Ax_m(0)+x_m(T)=d\left(z,\lambda\right), \tag{14}$$

m=1,2,3,. . . .

2. *Послідовність функцій (13) рівномірно збігається відносно $t\in[0,T]$ при $m\to\infty$ до граничної функції*

$$x^*(t,z,\lambda)=\lim_{m\to\infty}x_m(t,z,\lambda). \tag{15}$$

***3.** Гранична функція x^* задовольняє початкову умову*

$$x^*(0, z, \lambda) = z,$$

а також параметризовані лінійні крайові умови:

$$Ax^*(0) + x^*(T) = d\,(z, \lambda)\,.$$

***4.** Гранична функція (15) для всіх $t \in [0, T]$ являється єдиним неперервно–диференційовним розв'язком інтегрального рівняння*

$$x(t) = z + \int_0^t f(s, x(s))ds - \frac{t}{T}\int_0^T f(s, x(s))ds + \frac{t}{T}\left[d\,(z, \lambda) - (A + I_n)\,z\right], \quad (16)$$

чи еквівалентної йому задачі Коші для модифікованої системи диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \Delta(z, \lambda), \quad (17)$$

$$x(0) = z, \quad (18)$$

де $\Delta : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^n$ — відображення, що визначається співвідношенням:

$$\Delta\,(z, \lambda) := \frac{1}{T}\left[d\,(z, \lambda) - (A + I_n)\,z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x(s))ds. \quad (19)$$

***5.** Справедлива оцінка відхилення функції x^* від її m–го наближення x_m для всіх $t \in [0, T]$:*

$$|x^*(t, z, \lambda) - x_m(t, z, \lambda)| \le \frac{20}{9}t\left(1 - \frac{t}{T}\right)Q^m(I_n - Q^{-1})h(z, \lambda), \quad (20)$$

де

$$h(z, \lambda) := Q\delta_D(f) + K\left|d\,(z, \lambda) - (A + I_n)\,z\right|, \quad (21)$$

$$Q := \frac{3T}{10}K. \quad (22)$$

Доведення. Доведемо, що послідовність функцій (13) є послідовністю Коші в банаховому просторі $C([0, T], \mathbb{R}^n)$. Спочатку покажемо, що $x_m(t, z, \lambda) \in D$, для всіх $(t, z, \lambda) \in [0, T] \times D_\beta \times D$, $m \in \mathbb{N}$.

Дійсно, використовуючи оцінку Леми 2.3 з [1] (див. також Лему 3 [2] та Лему 2 [3]):

$$\left|\int_0^t \left[f(\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(s)ds\right]d\tau\right| \le \frac{1}{2}\alpha_1(t)\left[\max_{t \in [0.T]} f(t) - \min_{t \in [0,T]} f(t)\right], \quad (23)$$

де

$$\alpha_1(t) = 2t\left(1 - \frac{t}{T}\right),\ |\alpha_1(t)| \le \frac{T}{2},\ t \in [0, T]\,, \quad (24)$$

із співвідношення (13) при $m = 0$ отримуємо:

$$|x_1\,(t, z, \lambda) - z| \le \left|\int_0^t \left[f(t, z) - \frac{1}{T}\int_0^T f(t, s)ds\right]dt\right| +$$

$$+\left|d\left(z,\lambda\right)-\left(A+I_n\right)z\right|\leq\alpha_1(t)\delta_D(f)+\left|d\left(z,\lambda\right)-\left(A+I_n\right)z\right|\leq\beta(z,\lambda). \tag{25}$$

Виходячи з нерівності (25), приходимо до висновку, що $x_1(t,z,\lambda)\in D$ при $(t,z,\lambda)\in[0,T]\times D_\beta\times D$.

За індукцією неважко показати, що всі функції (13) також належать множині D, $\forall m=1,2,3,\ldots$, $t\in[0,T]$, $z\in D_\beta$, $\lambda\in D$.

Розглянемо наступну різницю:

$$x_{m+1}(t,z,\lambda)-x_m(t,z,\lambda)=\int_0^t\left[f(s,x_m(s,z,\lambda))-f(s,x_{m-1}(s,z,\lambda))\right]ds-$$

$$-\frac{t}{T}\int_0^T\left[f\left(s,x_m(s,z,\lambda)\right)-f\left(s,x_{m-1}(s,z,\lambda)\right)\right]ds, \tag{26}$$

m=*1,2,3, ...* .

Позначимо $r_m(t,z,\lambda):=|x_m(t,z,\lambda)-x_{m-1}(t,z,\lambda)|$, m=*1,2,3, ...* .

Використовуючи оцінку (23) та враховуючи умову Ліпшиця (11), одержимо:

$$r_{m+1}(t,z,\lambda)\leq K\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t r_m(s,z,\lambda)ds+\frac{t}{T}\int_t^T r_m(s,z,\lambda)ds\right], \tag{27}$$

$\forall\, m$=*0,1,2, ...* .

На основі нерівності (25) маємо:

$$r_1(t,z,\lambda)=|x_1(t,z,\lambda)-z|\leq\alpha_1(t)\delta_D(f)+\left|d(z,\lambda)-\left(A+I_n\right)z\right|. \tag{28}$$

Використаємо оцінку Леми 3 з [3]:

$$\alpha_{m+1}(t)\leq\frac{10}{9}\left(\frac{3}{10}T\right)^m\alpha_1(t),\, m=0,1,2,\ldots \tag{29}$$

для послідовності функцій

$$\alpha_{m+1}(t)=\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t\alpha_m(s)ds+\frac{t}{T}\int_t^T\alpha_m(s)ds,\ m=0,1,2,\ldots \tag{30}$$

$$\alpha_0(t)=1,\ \alpha_1(t)=2t\left(1-\frac{t}{T}\right).$$

З врахуванням рівності (30), з (27) при $m=1$ випливає:

$$r_2(t,z,\lambda)\leq K\delta_D(f)\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t\alpha_1(s)ds+\frac{t}{T}\int_t^T\alpha_1(s)ds\right]+$$

$$+K\left|d\left(z,\lambda\right)-\left(A+I_n\right)z\right|\left[\left(1-\frac{t}{T}\right)\int_0^t ds+\frac{t}{T}\int_t^T ds\right]\leq$$

$$\leq K\left[\alpha_2\left(t\right)\delta_D(f)+\alpha_1(t)\left|d\left(z,\lambda\right)-\left(A+I_n\right)z\right|\right].$$

За індукцією можна показати, що

$$r_{m+1}(t,z,\lambda)\leq K^m\Big[\alpha_{m+1}(t)\delta_D(f)+\alpha_m(t)\Big|d\left(z,\lambda\right)-\left(A+I_n\right)z\Big|\Big], \tag{31}$$

m=*0,1,2,...,*
де $\alpha_{m+1}(t)$, $\alpha_m(t)$ визначаються згідно з (30), а $\delta_D(f)$ має вигляд (9).

З використанням нерівності (29), із співвідношення (31) одержуємо:

$$r_{m+1}(t,z,\lambda) \leq \frac{10}{9}\alpha_1(t)\Big[Q^m\delta_D(f) + KQ^{m-1}\big|d\,(z,\lambda) - (A+I_n)\,z\big|\Big], \qquad (32)$$

$\forall m$=*1,2,3,...,*
де матриця Q має вигляд (22).

Тоді, з врахуванням оцінки (32), розглянемо наступну різницю:

$$|x_{m+j}(t,z,\lambda) - x_m(t,z,\lambda)| \leq |x_{m+j}(t,z,\lambda) - x_{m+j-1}(t,z,\lambda)| +$$

$$+ |x_{m+j-1}(t,z,\lambda) - x_{m+j-2}(t,z,\lambda)| + \ldots + |x_{m+1}(t,z,\lambda) - x_m(t,z,\lambda)| =$$

$$= \sum_{i=1}^{j} r_{m+i}(t,z,\lambda) \leq \frac{10}{9}\alpha_1(t)\sum_{i=1}^{j}\left(Q^{m+i}\delta_D(f) + KQ^{m+i-1}\left|d\,(z,\lambda) - (A+I_n)\,z\right|\right) =$$

$$= \frac{10}{9}\alpha_1(t)\left[Q^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\delta_D(f) + KQ^m\sum_{i=0}^{j-1}Q^i\left|d\,(z,\lambda) - (A+I_n)\,z\right|\right]. \qquad (33)$$

На основі умови *C)*, спектральний радіус матриці Q вигляду (22) не перевищує *1*. Тоді маємо:

$$\sum_{i=0}^{j-1}Q^i \leq (I_n - Q)^{-1}, \ \lim_{m\to\infty}Q^m = O_n,$$

де O_n — нульова матриця розмірності $n \times n$.

Тому з нерівності (33) можемо зробити висновок, що, згідно з критерієм Коші, послідовність функцій $\{x_m\}$, яка визначається формулою (13), рівномірно збігається на множині $[0,T] \times D_\beta \times D$ до деякої граничної функції x^*.

Оскільки функції x_m послідовності (13) задовольняють крайові умови (8) при будь–яких значеннях параметрів, x^* також задовольняє ці умови.

При переході в (13) до границі при $m \to \infty$, одержуємо, що гранична функція задовольняє інтегральне рівняння (16), а отже, є розв'язком задачі Коші (17), (18), де $\Delta\,(z,\lambda)$ визначається згідно з (19). Оцінка (20) є безпосереднім наслідком нерівності (33).

Теорему доведено.

4. Існування розв'язків. Поряд з (1) будемо розглядати рівняння з постійним збуренням у правій частині:

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x) + \mu, t \in [0,T] \qquad (34)$$

з початковими умовами

$$x(0) = z, \qquad (35)$$

де $\mu = col(\mu_1,\ldots,\mu_n)$ — керуючий параметр. Покажемо, що для всякого фіксованого $z \in D_\beta, \lambda \in D$ параметр μ можна вибрати таким чином, що розв'язок $x = x(t,z,\lambda,\mu)$ задачі Коші (34), (35) в той же час є розв'язком лінійної параметризованої крайової задачі (34), (8).

Теорема 2. *Нехай $z \in D_\beta$ і $\lambda \in D$ — довільним чином задані вектори. Припустимо, що виконуються всі умови Теореми 1.*

Тоді розв'язок $x = x(t, z, \lambda, \mu)$ початкової задачі (34), (35) задовольняє крайові умови (8) тоді і тільки тоді, коли $x = x(t, z, \lambda, \mu)$ співпадає з граничною функцією x^* послідовності (13). Крім того,

$$\mu = \mu_{z,\lambda} = \frac{1}{T}\left[d(z, \lambda) - (A + I_n) z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x^*(s, z, \lambda))ds. \tag{36}$$

Доведення. *Достатність.* Нехай в правій частині системи диференціальних рівнянь (34) $\mu_{z,\lambda}$ має вигляд (36). Із Теореми 1 випливає, що при заданих z та λ границя (15) послідовності (13) є єдиним розв'язком крайової задачі (34), (8), коли $\mu = \mu_{z,\lambda}$. Крім того, гранична функція $x^* = x^*(t, z, \lambda, \mu)$ задовольняє й початкові умови (35), тобто є розв'язком задачі Коші (34), (35) при значенні параметру $\mu = \mu_{z,\lambda}$.
Необхідність. Зафіксуємо довільне значення $\bar{\mu} \in \mathbb{R}^n$ та припустимо, що початкова задача (37), (35):

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) + \bar{\mu}, t \in [0, T] \tag{37}$$

має розв'язок $\bar{x} = \bar{x}(t)$, який задовольняє крайові умови (8). Тоді $\bar{x}$ є розв'язком інтегрального рівняння:

$$\bar{x}(t) = z + \int_0^t f(s, \bar{x}(s))ds + \bar{\mu}t \tag{38}$$

для всіх $t \in [0, T]$.

При $t = T$ із (38) маємо:

$$T\bar{\mu} = \bar{x}(T) - z - \int_0^T f(s, \bar{x}(s))ds. \tag{39}$$

За припущенням функція $\bar{x}$ задовольняє крайові умови (8):

$$A\bar{x}(0) + \bar{x}(T) = d(z, \lambda), \tag{40}$$

а також початкові умови

$$\bar{x}(0) = z,$$

звідки випливає рівність:

$$\bar{x}(T) = d(z, \lambda) - Az. \tag{41}$$

Підставляючи (41) у (39), отримаємо:

$$\bar{\mu} = \frac{1}{T}d(z, \lambda) - \frac{1}{T}(A + I_n) z - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, \bar{x}(s))ds. \tag{42}$$

З іншого боку вже доведено, що гранична функція x^* є розв'язком початкової задачі (34), (35) при $\mu = \mu_{z,\lambda}$ вигляду (36) та задовольняє крайові умови (8).

Аналогічно отримаємо:

$$x^*(t,z,\lambda,\mu) = z + \int_0^t f(s,x^*(s,z,\lambda,\mu))ds + \mu_{z,\lambda} t, \tag{43}$$

$$T\mu_{z,\lambda} = x^*(T,z,\lambda,\mu) - z - \int_0^T f(s,x^*(s,z,\lambda,\mu))ds, \tag{44}$$

$$Ax^*(0,z,\lambda,\mu) + x^*(T,z,\lambda,\mu) = d(z,\lambda), \tag{45}$$

$$x^*(0,z,\lambda,\mu) = z.$$

На основі формул (43)–(45) легко одержати, що

$$\mu_{z,\lambda} = \frac{1}{T} d(z,\lambda) - \frac{1}{T}\left(A + I_n\right) z - \frac{1}{T}\int_0^T f(s,x^*(s,z,\lambda,\mu))ds. \tag{46}$$

Підставляючи (42) у (38), а (46) у (43), маємо, що для кожного $t \in [0,T]$

$$\bar{x}(t) = z + \int_0^t f(s,\bar{x}(s))ds + \frac{1}{T}[d(z,\lambda) - \left(A + I_n\right) z] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s,\bar{x}(s))ds, \tag{47}$$

$$x^*(t,z,\lambda,\mu) = z + \int_0^t f(s,x^*(s,z,\lambda,\mu))ds + \frac{1}{T}[d(z,\lambda) - \left(A + I_n\right) z] -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T f(s,x^*(s,z,\lambda,\mu))ds. \tag{48}$$

Нагадаємо, що з Теореми 1 $\bar{x} \in D$ і $x^* \in D$. Очевидно, що з (47), (48) випливає рівність:

$$x^*(t,z,\lambda,\mu) - \bar{x}(t) = \int_0^t [f(s,x^*(s,z,\lambda,\mu)) - f(s,\bar{x}(s))]ds -$$

$$-\frac{1}{T}\int_0^T [f(s,x^*(s,z,\lambda,\mu)) - f(s,\bar{x}(s))]ds. \tag{49}$$

Із співвідношення (49), на основі умови Ліпшиця (11), маємо, що функція

$$\omega(t) = |x^*(t,z,\lambda,\mu) - \bar{x}(t)|, t \in [0,T] \tag{50}$$

задовольняє інтегральні нерівності:

$$\omega(t) \le K\left[\int_0^t \omega(s)ds + \frac{t}{T}\int_0^T \omega(s)ds\right] \le K\alpha_1(t)\max_{s\in[0,T]}\omega(s), t \in [0,T], \tag{51}$$

де $\alpha_1(t)$ має вигляд (24).

Використовуючи (51) рекурентно, приходимо до оцінки:

$$\omega(t) \le K^m \alpha_m(t)\max_{s\in[0,T]}\omega(s), t \in [0,T], \tag{52}$$

де m — довільне натуральне число, а функції α_m визначаються співвідношенням (30). З врахуванням оцінок (29), з нерівності (52) для кожного $m \in \mathbb{N}$ отримаємо:

$$\omega(t) \leq \frac{10}{9} K \alpha_1(t) \left(\frac{3T}{10} K\right)^{m-1} \cdot \max_{s \in [0,T]} \omega(s), t \in [0,T]. \tag{53}$$

Спрямовуючи в останній нерівності $m \to \infty$ та враховуючи властивість (12), приходимо до висновку, що

$$\max_{s \in [0,T]} \omega(s) \leq Q^m \max_{s \in [0,T]} \omega(s) \to 0.$$

Це означає, згідно з (50), що функція $\bar{x}$ співпадає з x^*. Виходячи з (42) та (46), одержуємо, що $\bar{\mu} = \mu_{z,\lambda}$.

Теорему доведено.

Вияснимо відношення граничної функції x^* послідовності (13) до розв'язку параметризованої крайової задачі (1), (8) чи еквівалентної їй задачі (1), (2).

Теорема 3. *Нехай для крайової задачі (1), (2) виконуються умови A)—C).*

Тоді пара $(x^*(\cdot, z^*, \lambda^*), \lambda^*)$ є розв'язком параметризованої крайової задачі (1), (8) тоді і тільки тоді, коли $z^* = (z_1^*, z_2^*, \ldots, z_n^*)$, $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, \ldots, \lambda_n^*)$ будуть задовольняти систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь:

$$\Delta(z, \lambda) = \frac{1}{T} \left[d(z, \lambda) - (A + I_n) z\right] - \frac{1}{T} \int_0^T f(s, x^*(s, z, \lambda)) ds = 0, \tag{54}$$

$$x^*(T, z, \lambda) = \lambda. \tag{55}$$

Доведення. Достатньо використати Теорему 2 та відмітити, що диференціальне рівняння (17) співпадає з (1) тоді і тільки тоді, коли (z^*, λ^*) задовольняє рівняння:

$$\Delta(z^*, \lambda^*) = 0.$$

З врахуванням заміни змінних (3) та еквівалентності (1), (2) і (1), (8), очевидно, що $(x^*(\cdot, z^*, \lambda^*), \lambda^*)$ співпадає з розв'язком параметризованої крайової задачі (1), (3), (8) тоді і тільки тоді, коли $(x^*(\cdot, z^*, \lambda^*), \lambda^*)$ буде задовольняти рівняння:

$$x^*(T, z, \lambda^*) = \lambda^*.$$

Тобто пара $(x^*(\cdot, z^*, \lambda^*), \lambda^*)$ є розв'язком параметризованої крайової задачі (1), (8) тоді і тільки тоді, коли виконується (54), (55).

Теорему доведено.

Наступне твердження доводить, що визначальна система рівнянь (54), (55) визначає всеможливі розв'язки вихідної крайової задачі (1), (2).

Лема 1. *Нехай виконуються всі умови Теореми 1. Крім того, існують деякі вектори $z \in D_\beta$ і $\lambda \in D$, що задовольняють систему визначальних рівнянь (54), (55).*

Тоді нелінійна крайова задача (1), (2) має розв'язок $x(\cdot)$ такий, що:

$$\begin{aligned} x(0) &= z, \\ x(T) &= \lambda. \end{aligned} \tag{56}$$

Більше того, він має вигляд:

$$x(t) = x^*(t, z, \lambda), t = [0, T], \tag{57}$$

де x^* — гранична функція послідовності (13). І навпаки: якщо крайова задача (1), (2) має розв'язок $x(\cdot)$, тоді він обов'язково має вигляд (57), а система визначальних рівнянь (54), (55) задовольняється при

$$\begin{gathered} z = x(0), \\ \lambda = x(T). \end{gathered}$$

Доведення. Будемо використовувати Теореми 2 та 3. Якщо існують такі $z \in D_\beta$ і $\lambda \in D$, що задовольняють систему визначальних рівнянь (54), (55), тоді, на основі Теореми 3, функція (57) є розв'язком крайової задачі (1), (2). З іншого боку, якщо $x(\cdot)$ є розв'язком крайової задачі (1), (2), тоді ця функція — розв'язок задачі Коші (34), (35) при

$$\begin{gathered} \mu = 0, \\ z = x(0). \end{gathered}$$

Так як $x(\cdot)$ задовольняє крайові умови (2), а з врахуванням (3), і параметризовані крайові умови (8), то з Теореми 2 випливає, що має місце рівність (57). Крім того,

$$\begin{gathered} \mu = \mu_{z,\lambda} = 0, \\ z = x(0), \end{gathered} \tag{58}$$

де вектор λ визначається згідно з (7). Однак, $\mu_{z,\lambda}$ має вигляд (36), тому перше рівняння (54) визначальної системи задовольняється, якщо

$$z = x(0), \lambda = col(x_1(T), \ldots, x_n(T)) :$$

$$\Delta(x(0), \lambda) = 0. \tag{59}$$

Зрештою із (8) безпосередньо випливає, що й друге рівняння (55) визначальної системи також виконується.

Таким чином, ми вказали пари $(z, \lambda) = (x(0), x(T))$, що задовольняють систему визначальних рівнянь (54), (55), що і доводить дану лему.

Лему доведено.

Зауваження 2. Головна складність реалізації даного методу пов'язана з відшуканням граничної функції x^*. Однак в більшості випадків цю проблему можна вирішити, використовуючи властивості наближеного розв'язку x_m, побудованого в аналітичній формі.

При деякому $m \geq 1$ визначимо функцію $\Delta_m : D_\beta \times D \to \mathbb{R}^n$ згідно формули:

$$\Delta_m(z, \lambda) := \frac{1}{T}\left[d(z, \lambda) - (A + I_n) z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s, z, \lambda))ds, \tag{60}$$

де z та λ визначаються співвідношенням (7). Для дослідження розв'язності параметризованої крайової задачі (1), (8) будемо розглядати наближену визначальну систему алгебраїчних чи трансцендентних рівнянь, яка виглядає наступним чином:

$$\Delta_m(z, \lambda) = \frac{1}{T}\left[d(z, \lambda) - (A + I_n) z\right] - \frac{1}{T}\int_0^T f(s, x_m(s, z, \lambda))ds = 0, \tag{61}$$

$$x_m(T, z, \lambda) = \lambda, \tag{62}$$

де x_m — вектор–функція, визначена рекурентним співвідношенням (13).

Природньо, що за відповідних умов зі збільшенням m системи (54), (55) та (61), (62) будуть достатньо близькими і цим самим забезпечуватиметься потрібна точність відшукання наближеного розв'язку вихідної крайової задачі (1), (2).

5. Ілюстративний приклад. Розглянемо систему нелінійних диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 0.05x_2 - 0.005t^2 + 0.1 = f_1(t, x_1, x_2), \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_2^2 + 0.5x_1 + 0.01t^4 + 0.15t = f_2(t, x_1, x_2), \end{cases} \tag{63}$$

де $t \in [0, 1]$,
з нелінійними двоточковими граничними умовами вигляду:

$$\begin{cases} g_1(x(0), x(1)) := x_1(1) - x_2(1)^2 + x_2(0) - 0.09 = 0, \\ g_2(x(0), x(1)) := x_1(0) + x_2(1) - x_1(1) = 0. \end{cases} \tag{64}$$

Зауважимо, що точним розв'язком задачі (63), (64) є функції:

$$\begin{cases} x_1^* = 0.1t, \\ x_2^* = 0.1t^2. \end{cases} \tag{65}$$

Крайову задачу (63), (64) будемо розглядати на множині:

$$D = \{(x_1, x_2) : |x_1| \le 0.42, |x_2| \le 0.4\}. \tag{66}$$

Перетворимо граничні умови (64) наступним чином:

$$Ax(0) + Cx(1) + g(x(0), x(1)) = Ax(0) + Cx(1), \tag{67}$$

де $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C \equiv I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$g(x(0), x(1)) = col\,(g_1(x(0), x(1)), g_2(x(0), x(1)))$.

Замінимо значення компонент розв'язку задачі (63), (64) у точках $t = 0$ і $t = 1$ параметрами z_1, z_2 та λ_1, λ_2 відповідно:

$$\begin{aligned} x(0) = col\,(x_1(0), x_2(0)) = col\,(z_1, z_2), \\ x(1) = col\,(x_1(1), x_2(1)) = col\,(\lambda_1, \lambda_2). \end{aligned} \tag{68}$$

З використанням параметризації (68), перетворені крайові умови (67) запишуться так:

$$Az + \lambda + g(z, \lambda) = Ax(0) + x(1), \tag{69}$$

де

$$\begin{aligned} z = col\,(z_1, z_2), \\ \lambda = col\,(\lambda_1, \lambda_2). \end{aligned} \tag{70}$$

Введемо позначення:

$$d(z, \lambda) := Az + \lambda + g(z, \lambda), \tag{71}$$

де z та λ мають вигляд (70).

З врахуванням позначення (71), параметризовані крайові умови (69) перепишуться у вигляді:

$$Ax(0) + x(1) = d(z, \lambda). \tag{72}$$

Легко переконатися, що матриця, яка фігурує в умові Ліпшиця (11), є такою:

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 0.05 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix},$$

причому

$$r(K) < 1.03 < \frac{10}{3T},$$

при $T = 1$.

Вектори $\delta_D(f)$ та $\beta(z, \lambda)$ можна вибрати наступним чином:

$$\delta_D(f) \le \begin{pmatrix} 0.03125 \\ 0.515 \end{pmatrix},$$

$$\beta(z, \lambda) := \frac{1}{2}\delta_D(f) + \Big| d(z, \lambda) - (A + I_n) z \Big| =$$

$$= \begin{pmatrix} 0.015625 \\ 0.2575 \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} -z_1 + 2\lambda_1 - \lambda_2^2 + z_2 - 0.09 \\ 2\lambda_2 + z_1 - \lambda_1 - z_2 \end{vmatrix}.$$

Отже, до заданої крайової задачі можна застосувати чисельно–аналітичну схему, про яку йдеться в даній роботі, та побудувати послідовність наближених розв'язків, яка має вигляд:

$$x_{m,1}(t, z, \lambda) := z_1 + \int_0^t f(s, x_{m-1,1}(s, z, \lambda))ds -$$
$$-t\int_0^1 f(s, x_{m-1,1}(s, z, \lambda))ds + t(-z_1 + z_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2^2 - 0.09),$$

$$x_{m,2}(t, z, \lambda) := z_2 + \int_0^t f(s, x_{m-1,2}(s, z, \lambda))ds -$$
$$-t\int_0^1 f(s, x_{m-1,2}(s, z, \lambda))ds + t(z_1 - z_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2),$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$.

Шукані значення введених параметрів являються розв'язками наближеної визначальної системи алгебраїчних рівнянь, що виглядає так:

$$\Delta_{m,1}(z, \lambda) = (-z_1 + z_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2^2 - 0.09) - \int_0^1 f(s, x_m, 1(s, z, \lambda))ds = 0,$$
$$\Delta_{m,2}(z, \lambda) = (z_1 - z_2 - \lambda_1 + 2\lambda_2) - \int_0^1 f(s, x_m, 1(s, z, \lambda))ds = 0,$$
$$x_{m,1}(1, z, \lambda) = \lambda_1,$$
$$x_{m,2}(1, z, \lambda) = \lambda_2,$$

$m = 1, 2, 3, \ldots$.

Обчислення показують, що на першій ітерації наближені значення введених параметрів є наступними:

$$z_1 := z_{11} = -0.0006496464515,$$
$$z_2 := z_{12} = 0.0004959209133,$$
$$\lambda_1 := \lambda_{11} = 0.09954255665,$$
$$\lambda_2 := \lambda_{12} = 0.1001922031.$$

Ці параметри визначають перше наближення до точного розв'язку задачі (63), (64), яке має вигляд:

$$x_{11} = -0.001666666667t^3 + 0.1018588697t - 0.0006496464515,$$
$$x_{12} = 0.002t^5 + 0.075t^2 + 0.02269628208t + 0.0004959209133.$$

На Рис. 1 зображено графіки компонент точного та наближеного розв'язків у першій ітерації.

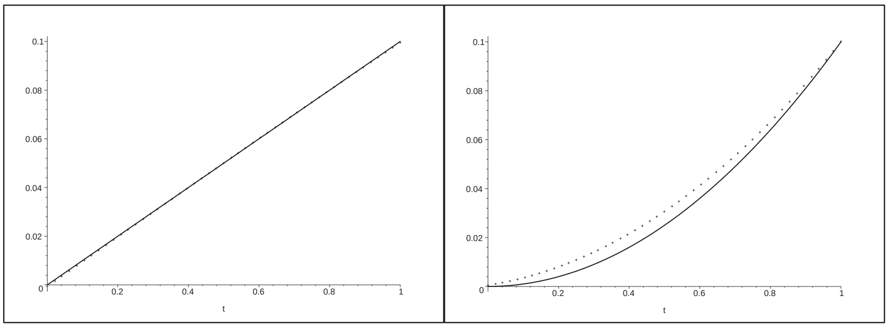

Рис. 1. Перша та друга компоненти точного розв'язку (лінія) та їх перше наближення (пунктир)

Максимальне відхилення точного розв'язку від його першого наближення при $t \in [0,1]$ дається нерівностями:

$$\max_{t\in[0,1]} |x_1^*(t) - x_{11}(t)| \le 7 \cdot 10^{-4},$$

$$\max_{t\in[0,1]} |x_2^*(t) - x_{12}(t)| \le 2 \cdot 10^{-4}.$$

Наближені значення шуканих параметрів у третій ітерації є такими:

$$z_1 := z_{31} = 0.3750027219 \cdot 10^{-6},$$
$$z_2 := z_{32} = -0.3154860291 \cdot 10^{-6},$$
$$\lambda_1 := \lambda_{31} = 0.1000003006,$$
$$\lambda_2 := \lambda_{32} = 0.09999992573.$$

При цьому значення наближеного розв'язку у третій апроксимації виглядає таким чином:

$$x_{31} = -0.1515151515 \cdot 10^{-8}t^{12} - 0.2083333333 \cdot 10^{-6}t^9 - 0.8214371899 \cdot 10^{-7}t^8 +$$
$$+0.1502314425 \cdot 10^{-11}t^7 + 0.7291666667 \cdot 10^{-5}t^6 - 0.1070842383 \cdot 10^{-4}t^5 -$$
$$-0.2204015754 \cdot 10^{-5}t^4 + 0.6944254503 \cdot 10^{-5}t^3 + 0.1689046936 \cdot 10^{-6}t^2 +$$
$$+0.09999872523t + 0.3750027219 \cdot 10^{-63},$$

$$x_{32} = -0.5749191519 \cdot 10^{-14}t^{23} - 0.1363636364 \cdot 10^{-11}t^{20} -$$
$$-0.5030811506 \cdot 10^{-12}t^{19} + 0.8497940176 \cdot 10^{-17}t^{18} - 0.4528743316 \cdot 10^{-10}t^{17} -$$
$$-0.1102824431 \cdot 10^{-9}t^{16} - 0.2006374587 \cdot 10^{-10}t^{15} + 0.9903950022 \cdot 10^{-8}t^{14} -$$
$$-0.4408309534 \cdot 10^{-8}t^{13} - 0.3447737025 \cdot 10^{-8}t^{12} + 0.6146354381 \cdot 10^{-6}t^{11} +$$
$$+0.4514032164 \cdot 10^{-6}t^{10} - 0.9311439082 \cdot 10^{-7}t^9 - 0.2201334746 \cdot 10^{-4}t^8 +$$
$$+0.3190732031 \cdot 10^{-4}t^7 + 0.5904367313 \cdot 10^{-5}t^6 - 0.16700592 \cdot 10^{-4}t^5 -$$
$$-0.5242257108 \cdot 10^{-4}t^4 + 0.9585544352 \cdot 10^{-4}t^3 + 0.09995622990t^2 +$$
$$+0.5061 \cdot 10^{-6}t - 0.3154860291 \cdot 10^{-6}.$$

Графіки похибок третього наближення подано на Рис.2.

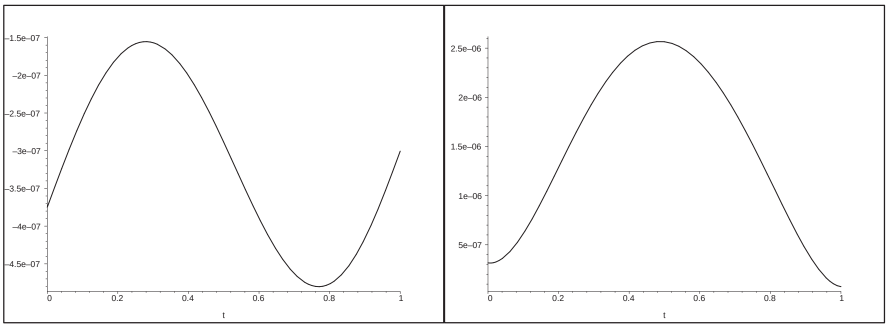

Рис. 2. Похибка першої та другої компонент розв'язку у третьому наближенні

Побудову послідовних наближень можна продовжувати й далі, отримуючи при цьому ще більш точне наближення до точного розв'язку вихідної крайової задачі (63), (64). Про це свідчий той факт, що вже на третій ітерації ми маємо похибку першої компоненти розв'язку рівну $1.5 \cdot 10^{-7}$, а другої компоненти — $2.5 \cdot 10^{-6}$.

1. *Ronto M., Samoilenko A. M.* Numerical–analytic methods in the theory of boundary–value problems. River Edge, NJ: World Scientific Publishing Co. Inc., 2000.
2. *M. Ronto and J. Meszaros.* Some remarks on the convergence of the numerical–analytical method of successive approximations // Ukrainian Math. J. —vol. 48 №1— 1996. — P. 101–107.
3. *Ronto A., Ronto M.* On a Cauchy–Nicoletti type three–point boundary value problem for linear differential equations with argument deviations // Miskolc: Math. Notes. — 2009. — Vol.10, No.2.— P. 173–205.

Одержано 07.04.2011