УДК 512.64+512.547

Бондаренко В. М., Литвинчук И. В.
(Институт математики НАН Украины, Киевский национальный университет имени Тараса Шевченка)

О НЕКОТОРЫХ РУЧНЫХ И ДИКИХ МАТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ПОСТОЯННОГО РАНГА

This work is written under the influence of the article of J. F. Carlson, E. M. Friedlander and J. Pevtsova (2008), in which, for finite group schemes and a field of positive characteristic, it is introduced the concept of the modules of constant Jordan type, etc. We use matrix language and consider some examples (not only for groups and not only for fields of positive characteristics), focusing on the question of the representation type of matrix problems with such restrictions.

Ця робота написана під впливом статті Д.Ф. Карлсона, Е.М. Фрідлендера і Ю. Пєвцової (2008), в якій для скінченних групових схем і поля додатної характеристики введено поняття модулів постійного жорданового типу, тощо. Ми користуємося матричною мовою і розглядаємо деякі приклади (не лише для груп і не лише для полів додатних характеристик), приділяючи основну увагу питанню про зображувальний тип матричних задач з подібними обмеженнями.

Эта работа написана под влиянием статьи [1], в которой для конечной групповой схемы G и поля характеристики $p > 0$ вводится понятие модулей постоянного жорданового типа и т. п. Мы пользуемся матричным языком и, рассматривая некоторые примеры (не только для групп и не только для полей положительных характеристик), уделяем основное внимание вопросу о представленческом типе матричных задач с подобными ограничениями. Для простоты поле k, над которым рассматриваются матрицы, предполагается алгебраически замкнутым (произвольной характеристики, кроме последнего параграфа).

1. Классическая задача о пучке матриц. Задача о пучке матриц — это задача о приведении двух матриц A и B над k одного и того же размера $n \times m$ ($n, m \in \mathbb{N} \cup 0$) одновременными элементарными преобразованиями строк и столбцов; другими словами, обе матрицы разрешается умножать слева на обратимую матрицу X (размера $n \times n$), а справа — на обратимую матрицу Y (размера $m \times m$). Требуется указать каноническую форму относительно указанного отношения эквивалентности. Как и для задачи о приведении одной матрицы преобразованиями подобия, это достаточно сделать для неразложимой пары матриц, указав набор неразложимых канонических пар (т. е. неразложимых пар матриц наиболее простого вида, таких что между собой они неэквивалентны, а любая другая неразложимая пара матриц эквивалентна одной из выделенных).

Заметим, что неразложимость в этом случае определяется стандартным образом. Именно, пара матриц (A, B) называется неразложимой, если она не эквивалентна прямой сумме некоторых пар матриц (A_1, B_1) и (A_2, B_2) соответственно размеров $n_1 \times m_1$ и $n_2 \times m_2$, т. е. паре вида $(A_1 \oplus A_2, B_1 \oplus B_2)$, где

$$A_1 \oplus A_2 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad B_1 \oplus B_2 = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix};$$

при этом естественно предполагается, что $(n_1, m_1), (n_2, m_2) \neq (0, 0)$.

На протяжении этого параграфа под парой матриц будем понимать только пары матриц одинакового размера, причем рассматриваются они с точностью до указанного выше отношения эквивалентности.

Будем говорить, что пара матриц A, B имеет постоянный ранг, если ранг матрицы $\alpha A + \beta B$, где $\alpha, \beta \in k$, $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$, не зависит от выбора α и β.

Мы воспользуемся хорошо известным списком неразложимых канонических пар матриц:

1) $\quad A_1 = (E_s \ \overline{0}), \quad B_1 = (\overline{0} \ E_s), \quad$ где $s \geq 0$;

2) $\quad A_2 = \begin{pmatrix} E_s \\ \widetilde{0} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} \widetilde{0} \\ E_s \end{pmatrix}, \quad$ где $s \geq 0$;

3) $\quad A_3 = E_t, \quad B_3 = J_t(a), \quad$ где $t > 0$;

4) $\quad A_4 = J_t(0), \quad B_4 = E_t, \quad$ где $t > 0$;

здесь E_r обозначает единичную матрицу размера $r \times r$, $J_t(b)$, где $b \in k$, — клетку Жордана размера $t \times t$ с собственным числом b, а $\overline{0}$ и $\widetilde{0}$ — соответственно нулевой столбец и нулевую строку матрицы.

Отсюда имеем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пары матриц A, B вида* 1) *и* 2) *образуют полную систему неразложимых канонических пар постоянного ранга.*

Из вышеизложенного имеем, что число канонических пар как в общем случае, так и в случае пар постоянного ранга бесконечно, однако в первом случае имеется бесконечно много размеров, для которых число канонических пар матриц бесконечно (зависит от параметра), а во втором случае таких размеров нет. И, таким образом, для пар матриц постоянного ранга не выполняется вторая гипотеза Брауэра-Тролла (которая имеет место для представлений конечномерных алгебр, частично упорядоченных множеств и т. п.). Матричные задачи, подобные нашей задаче о паре матриц постоянного ранга, будем называть задачами *полубесконечного представленческого типа.* Понятно, что они, как и задачи конечного типа, являются ручными.

2. Обобщенные пучки матриц. Прежде, чем говорить об обобщении классической задачи о пучке матриц, введем некоторые обозначения, которые нам понадобятся. Через $K = k < 1, x, y >$ обозначается свободная k-алгебра с двумя образующими. Если M – матрица над алгеброй K, а P, Q — пара квадратных матриц одинакового размера $s \times s$ (которые естественно отождествлять с матричным представлением алгебры K), то $M \otimes (P, Q)$ будет обозначать матрицу над полем k, полученную из матрицы M подстановкой матриц P и Q вместо, соответственно, образующих x и y; при этом все встречающиеся в M элементы $a \in k$ нужно заменить на скалярные матрицы aE_s. Для набора матриц $M = (M_1, M_2, \ldots, M_s)$ над алгеброй K положим

$$M \otimes (P, Q) = (M_1 \otimes (P, Q), M_2 \otimes (P, Q), \ldots, M_s \otimes (P, Q)).$$

Наконец, множество всех пар квадратных матриц (над полем k) обозначим через $\mathcal{P}$. Неразложимость пар $(P, Q) \in \mathcal{P}$ всегда рассматривается относительно их подобия.

Классическую задачу о пучке матриц (см. предыдущий параграф) можно обобщить, рассматривая произвольное число матриц $A_1, A_2, \dots, A_s$, $s > 2$ (с аналогичной эквивалентностью). Мы называем такой набор матриц обобщенным пучком или s-пучком (если хотим подчеркнуть число матриц).

Тогда задача об описании таких наборов матриц с точностью до эквивалентности является дикой задачей уже при $n = 3$. Действительно, если рассмотреть тройку матриц $M = (M_1, M_2, M_3)$ над K с матрицами

$$M_1 = (1), \quad M_1 = (x), \quad M_3 = (y),$$

то легко видеть, что (для произвольных пар матриц из $\mathcal{P}$) выполняются следующие свойства:

I) тройки матриц $M \otimes (P, Q)$ и $M \otimes (P', Q')$ эквивалентны тогда и только тогда, когда подобны пары матриц (P, Q) и (P', Q');

II) тройка матриц $M \otimes (P, Q)$ неразложима тогда и только тогда, когда неразложима пара матриц (P, Q).

Очевидно, при этом можно считать, что пары матриц $(P, Q), (P', Q') \in \mathcal{P}$ имеют один и тот же размер.

Такую тройку матриц над K будем называть *совершенной*.

Выполнение условий I), II) и означает, что рассматриваемая задача является дикой [2] (см. замечание в конце этого параграфа).

Заметим, что для доказательства неразложимости набора матриц над полем (в этом и подобных случаях) удобно пользоваться хорошо известным фактом о равносильности неразложимости набора матриц и локальности его алгебры эндоморфизмов (которая для 3-пучка матриц (A_1, A_2, A_3) задается матричными уравнениями $A_1X = XA_1$, $A_2X = XA_2$, $A_3X = XA_3$).

Рассмотрим теперь задачу о 3-пучках постоянного ранга, т. е. о тройках матриц A_1, A_2, A_3 таких, что ранг матрицы $\alpha_1 A + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3$ не зависит от элементов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in k$ (при условии, что не все они нулевые). В предыдущем параграфе мы видели, что задача о пучке матриц постоянного ранга проще (в смысле представленческого типа) самой задачи о пучке матриц: во втором случае задача является ручной и при этом имеет бесконечный тип, а в первом — полубесконечного типа. Возникает вопрос, не будет ли задача о 3-пучках постоянного ранга (которая формально проще самой задачи о 3-пучках) ручной? Оказывается, что не будет.

Теорема 2. *Задача о классификации, с точностью до эквивалентности, 3-пучков матриц постоянного ранга является дикой.*

Для доказательства теоремы мы укажем тройку матриц $M = (M_1, M_2, M_3)$ над алгеброй K такую, что 3-пучок матриц $M \otimes (P, Q)$ имеем постоянный ранг для любой пары матриц $(P, Q) \in \mathcal{P}$ и при этом выполняются условия I) и II) (см. выше). Заметим, что условия I) II) достаточно проверять для обратимых матриц P и Q; другими словами, вместо алгебры $K =< 1, x, y >$ можно рассматривать алгебру $\overline{K} = k < 1, x, y, x^{-1}, y^{-1} >$. Это вытекает из следующей леммы.

Лема 1. *Задача об описании (с точностью до подобия) пар обратимых матриц (P, Q) над полем является дикой.*

Действительно, в качестве соответствующей (совершенной) пары матриц над алгеброй K можно взять следующую пару (S, T):

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Множество всех $(P, Q) \in \mathcal{P}$, состоящих из обратимых матриц, обозначим через $\mathcal{P}^*$.

Возвращаесь непосредственно к доказательству теоремы, определим тройку матриц $M = (M_1, M_2, M_3)$ над K следующим образом:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & x & 1 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix}.$$

Пусть $(P, Q) \in \mathcal{P}^*$. Тогда

$$M_1 \otimes (P, Q) = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_2 \otimes (P, Q) = \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \end{pmatrix},$$

$$M_3 \otimes (P, Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & P & E \\ 0 & 0 & 0 & Q \end{pmatrix},$$

где все клетки выписанных матриц квадратные и одного размера. Поскольку матрицы P и Q обратимые, то, как легко видеть, тройка матриц $M \otimes (P, Q)$ (над полем k) имеет постоянный ранг (равный числу их строк).

Докажем, что для M выполняются свойства I) и II) (для пар из $\mathcal{P}^*$). Начнем со свойства I).

Для пары матриц $(P', Q') \in \mathcal{P}^*$ того же размера, что и (P, Q), имеем

$$M_1 \otimes (P', Q') = M_1 \otimes (P, Q),$$

$$M_2 \otimes (P', Q') = M_2 \otimes (P, Q),$$

$$M_3 \otimes (P', Q') = \begin{pmatrix} 0 & 0 & P' & E \\ 0 & 0 & 0 & Q' \end{pmatrix}.$$

Положим $\overline{M}_i = M_i \otimes (P, Q)$, $\overline{M}'_i = M_i \otimes (P', Q')$, $\overline{M} = M \otimes (P, Q)$, $\overline{M}' = M \otimes (P', Q')$, где $i = 1, 2, 3$.

Очевидно, что если пары матриц (P, Q) и (P, Q) подобны с помощью матрицы C, т. е. $P' = C^{-1}PC$, $Q' = C^{-1}QC$, то тройки матриц $\overline{M}$ и $\overline{M}'$ эквивалентны: $X^{-1}\overline{M}_1 Y = \overline{M}'_1$, $X^{-1}\overline{M}_2 Y = \overline{M}'_2$, $X^{-1}\overline{M}_3 Y = \overline{M}'_3$ для $X = C \oplus C$ и $Y = C \oplus C \oplus C$.

Докажем теперь обратное. Пусть тройки матриц $\overline{M}$ и $\overline{M}'$ эквивалентны, т. е. существуют обратимые матрицы

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} \\ Y_{21} & Y_{22} & Y_{23} & Y_{24} \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{pmatrix}$$

(квадратные блоки обеих матриц имеют тот же размер, что и блоки троек), такие что

$$\begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \end{pmatrix} Y = X \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \end{pmatrix} Y = X \begin{pmatrix} 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & P & E \\ 0 & 0 & 0 & Q \end{pmatrix} Y = X \begin{pmatrix} 0 & 0 & P' & E \\ 0 & 0 & E & Q' \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Пусть L_t и R_t обозначают соответственно левую и правую части равенства (t), $t = 1, 2, 3$. Для $i = 1, 2$ и $1 \leq j \leq 4$ обозначим через $(t.i.j)$ матричное равенство $(L_t)_{ij} = (R_t)_{ij}$, где $(L_t)_{ij}$ (соотв. $(R_t)_{ij}$) — блок матрицы L_t (соотв. R_t), стоящий на пересечении горизонтальной полосы с номером i и вертикальной полосы с номером j. Очевидно, что множество всех таких равенств эквивалентно равенствам (1), (2), (3).

Равенство (1) эквивалентно следующим равенствам:

$$(1.1.1)\quad Y_{11} = X_{11},\quad (1.1.2)\quad Y_{12} = X_{12},\quad (1.1.3)\quad Y_{13} = 0,\quad (1.1.4)\quad Y_{14} = 0,$$

$$(1.2.1)\quad Y_{21} = X_{21},\quad (1.2.2)\quad Y_{22} = X_{22},\quad (1.2.3)\quad Y_{23} = 0,\quad (1.2.4)\quad Y_{24} = 0.$$

Следовательно матрицы X и Y имеют следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & 0 & 0 \\ Y_{21} & Y_{22} & 0 & 0 \\ Y_{31} & Y_{32} & Y_{33} & Y_{34} \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{pmatrix}.$$

Далее, равенство (2) эквивалентно (с учетом вида матриц X и Y, полученных при рассмотрении равенства (1)) следующим равенствам:

$$(2.1.1)\quad Y_{21} = 0,\quad (2.1.2)\quad Y_{22} = Y_{11},\quad (2.1.3)\quad 0 = Y_{12},\quad (2.1.4)\quad \varnothing,$$

$$(2.2.1)\quad Y_{31} = 0,\quad (2.2.2)\quad Y_{32} = Y_{21},\quad (2.2.3)\quad Y_{33} = Y_{22},\quad (2.2.4)\quad Y_{34} = 0,$$

где символ $\varnothing$ обозначает тождество $0 = 0$.

Из этих равенств имеем $Y_{12} = 0$, $Y_{31} = 0$, $Y_{34} = 0$, $Y_{32} = Y_{21} = 0$, $Y_{33} = Y_{22} = Y_{11}$, а значит матрицы X и Y имеют следующий вид:

$$X = \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 \\ 0 & Y_{11} \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Y_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Y_{11} & 0 \\ Y_{41} & Y_{42} & Y_{43} & Y_{44} \end{pmatrix}.$$

Наконец, равенство (3) эквивалентно (с учетом нового вида матриц X и Y) следующим равенствам:

(3.1.1) $Y_{41} = 0$, (3.1.2) $Y_{42} = 0$, (3.1.3) $PY_{11} + Y_{43} = Y_{11}P'$,

(3.1.4) $Y_{44} = Y_{11}$, (3.2.1) $QY_{41} = 0$, (3.2.2) $QY_{42} = 0$,

(3.2.3) $QY_{43} = 0$, (3.2.4) $QY_{44} = Y_{11}Q'$.

Из этих равенств имеем (учитывая обратимость матрицы Q), что

$$PY_{11} = Y_{11}P', \quad QY_{11} = Y_{11}Q', \tag{4}$$

$$X = Y_{11} \oplus Y_{11}, \quad Y = Y_{11} \oplus Y_{11} \oplus Y_{11} \oplus Y_{11}. \tag{5}$$

Поскольку матрица Y_{11} обратима (в силу обратимости X, Y), то равенства (4) означают, что пары (P, Q) и $(P'Q')$ подобны, что и требовалось доказать.

Переходим к свойству II). Если пара (P, Q) разложима, то, очевидно, разложимой является и тройка $M \otimes (P, Q)$. Обратно, если (P, Q) неразложима, то алгебра ее эндоморфизмов (которая состоит из матриц Z, уже не не обязательно обратимых, таких что $PZ = ZP$, $QZ = ZQ$) является локальной, а тогда в силу равенств (5) алгебра эндоморфизмов тройки матриц $M \otimes (P, Q)$, которая задается равенствами (1)–(3) при $P = P', Q = Q'$ (где X и Y уже не обязательно обратимые), также является локальной. Следовательно тройка $M \otimes (P, Q)$ неразложима.

Теорема 2 доказана.

Замечание. Как мы видели, доказательство импликации $\Leftarrow$ в условии I) и импликации $\Rightarrow$ в условии II) очевидны. Очевидны они и в общем случае, поэтому условия I)–II) можно формулировать только в одну сторону, причем условие I) лучше (для однообразия) формулировать для неэквивалентности. В нашем случае это будут следующие условия:

I') тройки матриц $M \otimes (P, Q)$ и $M \otimes (P', Q')$ не эквивалентны, если не подобны пары матриц (P, Q) и (P', Q');

II') тройка матриц $M \otimes (P, Q)$ неразложима, если неразложима пара матриц (P, Q).

3. Пары самоаннулирующих и взаимно аннулирующих матриц. Рассмотрим задачу об описании с точностью до подобия пар матриц $(A, B) \in \mathcal{P}$ над полем k таких, что

$$A^2 = B^2 = AB = BA = 0. \tag{$*$}$$

Выделив (с помощью допустимых преобразований строк и столбцов матриц A и B) максимальное число нулевых строк в обеих матрицах (т. е. в матрице $(A \mid B)$) и воспользовавшись равенствами $(*)$ (учитывая при этом, что из матричного равенства $CD = 0$ с невырожденной по строкам матрицей D следует равенство

$C = 0$), получаем, что пара матриц (A, B) подобна паре блочных матриц вида

$$\overline{A} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad \overline{B} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

с линейно независимыми строками матрицы $(A_0 \,|\, B_0)$.

Легко видеть, что пара матриц $(\overline{A}, \overline{B})$ подобна паре $(\overline{A'}, \overline{B'})$ тогда и только тогда, когда пары матриц (A_0, B_0) и (A'_0, B'_0) эквивалентны (определение эквивалентности см. в параграфе 1). Таким образом, наша задача сводится к задаче о пучке матриц.

Поскольку $(\alpha A + \beta B)^2 = 0$, то естественно рассматривать задачу о паре матриц A, B постоянного ранга (определяя это таким же образом, как и в предыдущих параграфах). Если учесть, что пара $(\overline{A}, \overline{B})$ является парой постоянного ранга тогда и только тогда, когда постоянный ранг имеет соответствующий пучок (A_0, B_0), а также очевидный факт, что для канонического пучка (A_0, B_0) вида 1), 2) матрица $(A_0 \,|\, B_0)$ вырожденна по строкам только в случае 2) при $s = 0$, то имеем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пары матриц вида*

$\overline{0}$) $\quad \overline{A}_0 = (0), \quad \overline{B}_0 = (0),$

$\overline{1}$) $$\overline{A}_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & E_s & \overline{0} \\ \hline & & \\ 0 & 0 & \\ & & \end{array}\right), \qquad \overline{B}_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & \overline{0} & E_s \\ \hline & & \\ 0 & 0 & \\ & & \end{array}\right),$$

$\overline{2}$) $$\overline{A}_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{array}{c} E_s \\ \widetilde{0} \end{array} \\ \hline & \\ 0 & 0 \\ & \end{array}\right), \qquad \overline{B}_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & \begin{array}{c} \widetilde{0} \\ E_s \end{array} \\ \hline & \\ 0 & 0 \\ & \end{array}\right),$$

где $s \geq 1$, образуют полную систему неразложимых канонических пар матриц, удовлетворяющих равенствам $(*)$, которые имеют постоянный ранг.

Заметим, что пара $\overline{0}$) выделена нами из пары вида $\overline{1}$) при $s = 0$ (но не из пары $\overline{2}$), для которой $s = 0$ запрещено из-за условия невырожденности для соответствующего пучка матриц), чтобы для обеих пар $\overline{1}$), $\overline{2}$) число s принимало только положительные значения.

В этом случае (при наличии условия о постоянности ранга) также имеем задачу полубесконечного представленческого типа.

4. Тройки самоаннулирующих и взаимно аннулирующих матриц. В этом параграфе мы рассмотрим задачу об описании с точностью до подобия троек (A_1, A_2, A_3) квадратных матриц (одинакового размера) над полем k таких, что

$$A_1^2 = A_2^2 = A_3^2 = A_1A_2 = A_2A_1 = A_1A_3 = A_3A_1 = A_2A_3 = A_3A_2 = 0. \qquad (**)$$

Выделяя (с помощью допустимых преобразований строк и столбцов матриц A_1, A_2, A_3) максимальное число строк, являющихся нулевыми во всех матрицах, так же, как и в предыдущем параграфе (для пар матриц) имеем, что тройка матриц (A_1, A_2, A_3) подобна тройке блочных матриц вида

$$\overline{A}_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_{01} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \overline{A}_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_{02} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \quad \overline{A}_3 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & A_{03} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

с линейно независимыми строками матрицы $(A_{01} \mid A_{02} \mid A_{03})$.

Легко видеть, что тройки матриц $(\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3)$ и $(\overline{A}'_1, \overline{A}'_2, \overline{A}'_3)$ подобны тогда и только тогда, когда эквивалентны тройки матриц (A_{01}, A_{02}, A_{03}) и $(A'_{01}, A'_{02}, A'_{03})$. Таким образом, наша задача сводится к задаче о 3-пучке матриц и следовательно (согласно изложенному в параграфе 3) является дикой.

Поскольку тройка матриц $(\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3)$ является тройкой постоянного ранга тогда и только тогда, когда постоянный ранг имеет соответствующий 3-пучок (A_{01}, A_{02}, A_{03}), то, учитывая теорему 2, имеем следующее утверждение.

Теорема 4. *Задача о классификации, с точностью до подобия, троек матриц, удовлетворяющих равенствам* $(**)$ *и имеющих постоянный ранг, является дикой.*

5. Представления групп постоянного жорданового типа. В работе [1] для конечной групповой схемы G и поля характеристики $p > 0$ вводится понятие модулей постоянного жорданового типа. В частном случае, для абелевой группы $G = G_s = (2, 2, \ldots, 2)$ (s прямых множителей), со стандартными образующими $g_1, g_2, \ldots, g_s$, и поля k характеристики 2, это означает (на языке матричных представлений), что самоаннулирующие попарно коммутирующие матрицы A_1, $A_2, \ldots, A_s$, соответствующие элементам $a_1 = 1 + g_1, a_2 = 1 + g_2, \ldots, a_s = 1 + g_s$ групповой алгебры kG, имеют постоянный ранг.

Рассмотрим сначала случай $s = 2$, положив $a = a_1, b = a_2$. Групповая алгебра kG_2 локальна и фробениусова [3], значит она имеет единственный минимальный идеал I (цоколь, который порожден элементом $ab+ba$) и всякое неразложимое представление, кроме регулярного, является представлением фактор-алгебры kG_2/I. Отсюда, используя теорему 1 и тот легко проверяемый факт, что пара матриц

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

которая задает ругулярное представление группы G_2 (при естественном упорядочении ее элементов: $1, a, b, ab$) имеет постоянный ранг, получаем следующее утверждение (заменив пару A_r, B_r подобной ей парой треугольного вида).

Теорема 5. *Представления группы* G_2 *(над полем* k *характеристики* 2) *вида*

a) $\quad a \to (1), \quad b \to (1),$

b) $$a \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad b \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$c)\qquad a \to \left(\begin{array}{c|cc} E_s & E_s & \overline{0} \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|cc} E_s & \overline{0} & E_s \\ \hline 0 & \multicolumn{2}{c}{E_{s+1}} \end{array}\right),$$

$$d)\qquad a \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} E_s \\ \widetilde{0} \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right), \qquad b \to \left(\begin{array}{c|c} E_{s+1} & \begin{matrix} \widetilde{0} \\ E_s \end{matrix} \\ \hline 0 & E_s \end{array}\right),$$

где $s \geq 1$, *образуют полную систему неразложимых попарно неэквивалентных представлений постоянного ранга.*

Мы видим, что задача об описании представлений в этом случае имеет полубесконечный представленческий тип (см. выше), т. е. число неразложимых представлений (с точностью до эквивалентности) бесконечно, а в каждой размерности число таких представлений конечно (в частности, может быть нулевым).

Мы предполагаем следующее.

Гипотеза. *Пусть* G *— конечная группа ручного бесконечного представленческого типа над полем* k *характеристики* $p > 0$ (*такие группы описаны в* [4]). *Задача об описании ее матричных представлений* (*модулей*) *постоянного жорданового типа имеет полубесконечный представленческий тип.*

В силу теоремы 2 задача об описании представлений постоянного ранга группы G_3 является дикой. Общий случай элементарных абелевых p-групп анонсирован в [5], а полный вариант будет опубликован в журнале Algebra and Discrete mathematics (том 14, 2012 г.).

1. *Carlson, J. F., Friedlander E. M., Pevtsova J.* Modules of constant Jordan type // J. Reine Angew. Math. – 2008. – **614**. – P. 191—234.
2. *Дрозд Ю. А.* О ручных и диких матричных задачах // Матричные задачи. – Киев: Ин-т математики АН УССР. – 1977. – С. 104–114.
3. *Кэртис Ч., Райнер И.* Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. – М.: Наука, 1969. – 668с.
4. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Модули и представления : Записки науч. семинаров ЛОМИ. – 1977. – **71**. – С. 24–41.
5. *Bondarenko V. M, Litvinchuk I. V.* On the representation type of elementary abelian p-groups with respect to the modules of constant Jordan type // Intern. Conf. on Algebra dedicated to 100th anniversary of S.M. Chernikov (August 20-26, 2012), Dragomanov National Pedagogical University, Kiev.

Одержано 12.04.2012