УДК 519.21

Перегуда О. В. (КНУ імені Тараса Шевченка)

ПРО ПОВЕДІНКУ РОЗВ'ЯЗКІВ СИСТЕМИ ДВОХ ЗГАСАЮЧИХ СТОХАСТИЧНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ

The behavior of the solutions of two conjugate harmonic oscillators under the random perturbations of the "white noise" type of the Ito form is investigated. The explicit form of the amplitude, phase of the system of damped oscillators is found. The behavior of the amplitude, phase of the system of damped oscillators is investigated.

У роботі проводиться дослідження поведінки розв'язків двох спряжених гармонічних осциляторів при випадкових збурень типу "білого шуму" у формі Іто. Отримано явний вигляд і досліджено поведінку амплітуди та фази системи згасаючих стохастичних гармонічних осциляторів.

Вступ. Розглядається система двох гармонічних осциляторів з тертям, що описується системою двох лінійним диференціальних рівняннь другого порядку

$$\begin{cases} \ddot{u}_1(t) + 2h_1\dot{u}_1(t) + k_1^2 u_1(t) = 0,\ u_1(0) = u_{10}, \dot{u}_1(0) = \dot{u}_{10}, \\ \ddot{u}_2(t) + 2h_2\dot{u}_2(t) + k_2^2 u_2(t) = 0,\ u_2(0) = u_{20}, \dot{u}_2(0) = \dot{u}_{20} \end{cases} \tag{1}$$

де $u_{0i}, \dot{u}_{0i}$ - початкові положення і швидкості осциляторів $(u_{i0}^2 + \dot{u}_{i0}^2 > 0)$; $k_i > 0, h_i$ - коефіцієнти тертя осциляторів; $u_i(t), \dot{u}_i(t)$ - положення і швидкість осциляторів в момент часу $t > 0; i = 1, 2$.

Система (1) еквівалентна системі диференціальних рівнянь першого порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -k_1^2 x_1 - 2h_1 x_2, \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = -k_2^2 x_3 - 2h_2 x_4 \end{cases} \tag{2}$$

де

$$x_1(t) = u_1(t); x_2(t) = \dot{u}_1(t); \qquad x_3(t) = u_2(t); x_4(t) = \dot{u}_2(t).$$

В декартовій системі координат стан системи (2) зображається точкою M з координатами $(x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_4(t))$, яка рухається по фазовій траєкторії. Фазова швідкість точки M направлена вздовж дотичного вектора

$$(x_2(t), -k_1^2 x_1(t) - 2h_1 x_2(t), x_4(t), -k_2^2 x_3(t) - 2h_2 x_4(t)).$$

Портрет можливих рухів точки M у фазовому просторі залежить від знаків $h_i^2 - k_i^2, i = 1, 2$.

Дослідження поведінки зображувальної точки M на фазовій площині X_1OX_2 при випадкових збуреннях вздовж вектора фазової швидкості, у випадку одного гармонічного осцилятора, проведено в [3]. Для випадку двох спряжених гармонічних осциляторів збурених двома незалежними вінеровськими процесами, дослідження поведінки зображувальної точки M при $0 < h < k$ (згасаючий осциляторний процес) було проведено в [4].

Постановка задачі.

В данній роботі досліджується поведінка зображувальної точки М у фазовому просторі при випадковому збуренні вектора фазової швидкості

$$(x_2(t), -k_1^2x_1(t) - 2h_1x_2(t), x_4(t), -k_2^2x_3(t) - 2h_2x_4(t))$$

"білим шумом" у формі Іто для випадку $|h_i| < k_i$ $i = 1, 2$ (згасаючий аперіодичний процес).

При заданих випадкових збуреннях система (2) перетворюється в систему стохастичних диференціальних рівнянь Іто. Для дослідження такої системи, розглядається загальна система рівнянь вигляду:

$$\dot{x}(t) = Bx(t)\dot{\xi}; \qquad \xi = (\xi_1(t), \xi_2(t)), \tag{3}$$

де

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1^2 & -2h_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -k_2^2 & -2h_2 \end{pmatrix},$$

$$\dot{\xi}_1(t) = g_{11}(t) + g_{21}(t)\dot{w}_1(t);$$
$$\dot{\xi}_2(t) = g_{12}(t) + g_{22}(t)\dot{w}_2(t);$$

$g_{ij}(t)$ – невипадкові функції; $\dot{w}_i(t)$ – "похідна" від вінерівського процесу ("білий шум" у формі Іто).

Рівняння (3) природньо розглянути як рівняння Іто

$$dx(t) = Bx(t)d\xi_i(t); i = 1, 4; \tag{4}$$

$$\xi_1(t) = \int_0^t g_{11}(s)ds + \int_0^t g_{21}(s)dw_1(s);\ \xi_2(t) = \int_0^t g_{12}(s)ds + \int_0^t g_{22}(s)dw_2(s).$$

Введемо наступні позначення: $\mu_i = \sqrt{k_i^2 - h_i^2}$; $\lambda_{1i} = -h_i + \mu_i$, $\lambda_{2i} = -h_i - \mu_i$, $\alpha_{1j} = \int\limits_0^t g_{1j}(s)ds$; $\alpha_{2j} = \int\limits_0^t g_{2j}^2(s)ds$; $j = 1, 2$, $i = 1, 2$.

Має місце наступна теорема:

Теорема 1. *Нехай $x(t)$ - розв'язок (3), тоді з ймовірністю 1 для всіх $t \geqslant 0$ мають місце рівності:*

$$x_1(t) = A_1(t)\sqrt{2}\cos(\phi_1(t) + \frac{\pi}{4}),\ x_2(t) = A_1(t)(\lambda_{11}^2 + \lambda_{12}^2)\sin(\phi_1(t) + \gamma_1),$$
$$x_3(t) = A_2(t)\sqrt{2}\cos(\phi_2(t) + \frac{\pi}{4}),\ x_4(t) = A_2(t)(\lambda_{21}^2 + \lambda_{22}^2)(\sin\phi_2(t) + \gamma_2).$$

де

$$A_1(t) = \frac{1}{\lambda_{11} - \lambda_{12}}\sqrt{(y_{11}^2(t) - y_{12}^2(t))}, A_2(t) = \frac{1}{\lambda_{21} - \lambda_{22}}\sqrt{(y_{21}^2(t) - y_{22}^2(t))},$$
$$y_{ij}(t) = y_{ij}(0)\exp\{-\frac{\lambda_{ij}^2}{2}\alpha_{2i}(t) + \lambda_{ij}\xi(t)\}, i = 1, 2, j = 1, 2,$$
$$y_{11}(0) = -\lambda_{12}u_{10} + \dot{u}_{10}, y_{21}(0) = -\lambda_{11}u_{10} + \dot{u}_{10},$$
$$y_{21}(0) = -\lambda_{22}u_{20} + \dot{u}_{20}, y_{22}(0) = -\lambda_{21}u_{20} + \dot{u}_{20},$$

$$tg\phi_1(t) = \frac{y_{12}(0)}{y_{11}(0)} \exp\{-2\mu_1[h_1\alpha_{2i}(t) + \xi(t)]\}, tg\gamma_1 = -\frac{\lambda_{11}}{\lambda_{12}},$$
$$tg\phi_2(t) = \frac{y_{21}(0)}{y_{21}(0)} \exp\{-2\mu_2[h_2\alpha_{2i}(t) + \xi(t)]\}, tg\gamma_2 = -\frac{\lambda_{21}}{\lambda_{22}}, i = 1,\ 2.$$

Доведення. Розглянемо лінійне перетворення процесу $x(t)$, при якому матриця B в рівнянні (4) прийме жорданову форму. Розглянемо процес $y(t) = Tx(t)$ з матрицею

$$T = \begin{pmatrix} -\lambda_{21} & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda_{21} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda_{22} & 1 \\ 0 & 0 & -\lambda_{22} & 1 \end{pmatrix}.$$

Тоді відповідно

$$TBT^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_{22} \end{pmatrix}$$

– жорданова форма матриці B. Завдяки рівнянню (4) для процесу $y(t)$ отримаємо стохастичне диференціальне рівняння Іто

$$dy(t) = TBT^{-1}y(t)d\xi(t),$$

з коефіцієнтом переносу

$$a_1(t,y) = g_{11}(t)\left(\lambda_{11}y_{11}, y_{11} + \lambda_{21}y_{12}\right); \qquad a_2(t,y) = g_{12}(t)\left(\lambda_{12}y_{11}, y_{11} + \lambda_{22}y_{12}\right);$$
$$a_3(t,y) = g_{11}(t)\left(\lambda_{11}y_{21}, y_{21} + \lambda_{21}y_{22}\right); \qquad a_4(t,y) = g_{12}(t)\left(\lambda_{12}y_{21}, y_{21} + \lambda_{22}y_{22}\right);$$

та коефіцієнтом дифузії

$$b_1(t,y) = g_{21}(t)\left(\lambda_{11}y_{11}, y_{11} + \lambda_{21}y_{12}\right); \qquad b_2(t,y) = g_{22}(t)\left(\lambda_{12}y_{11}, y_{11} + \lambda_{22}y_{12}\right);$$
$$b_3(t,y) = g_{21}(t)\left(\lambda_{11}y_{21}, y_{21} + \lambda_{21}y_{22}\right); \qquad b_4(t,y) = g_{22}(t)\left(\lambda_{12}y_{21}, y_{21} + \lambda_{22}y_{22}\right).$$

Згідно [2] знаходимо явний вигляд розв'язків:

$$y_{ij}(t) = y_{ij}(0)\exp\{-\frac{\lambda_{ij}^2}{2}\alpha_{2i}(t) + \lambda_{ij}\xi(t)\}, i = 1,2, j = 1,2,$$
$$y_{11}(0) = -\lambda_{12}u_{10} + \dot{u}_{10}, y_{12}(0) = -\lambda_{12}u_{10} + \dot{u}_{10},$$
$$y_{21}(0) = -\lambda_{22}u_{20} + \dot{u}_{20}, y_{22}(0) = -\lambda_{21}u_{20} + \dot{u}_{20}.$$

Оскільки $x(t) = T^{-1}y(t)$, то враховуючи явний вигляд процесу $y(t)$, отримаємо завершення доведення теореми.

Зауваження. Маючи явний вигляд розв'язку рівняння (4) залежно від поведінки функцій $g_{ij}(t)$ можна будувати моделі незатухаючих осциляторів з довільним порядком росту амплітуд.

Теорема 2. *Нехай $x(t)$ - розв'язок (3), (4) і виконується при $t \to \infty$ збіжність:*

1) $\alpha_{2i} \overset{P=1}{\to} \infty$; $i = \overline{1,2}$;
2) $\beta_{i1} \overset{P=1}{\to} \infty$; $i = \overline{1,2}$;

3) $\frac{\sqrt{\alpha_{2i}(t)\ln\ln\alpha_{2i}(t)}}{\beta_{i1}} \overset{P=1}{\to} 0, i = \overline{1,2}$; *де*

$$\beta_{11} = -\frac{\lambda_{11}^2}{2}\alpha_{12} - \lambda_{11}\alpha_{11}(t),\ \beta_{21} = -\frac{\lambda_{21}^2}{2}\alpha_{22} - \lambda_{21}\alpha_{21}(t) \text{ при } h > k,$$
$$\beta_{11} = -\frac{\lambda_{12}^2}{2}\alpha_{12} - \lambda_{12}\alpha_{11}(t),\ \beta_{21} = -\frac{\lambda_{22}^2}{2}\alpha_{22} - \lambda_{22}\alpha_{21}(t) \text{ при } h < -k.$$

Тоді

1)$A_{1i}(t) \overset{P=1}{\to} 0$ при $t \to \infty$,

2)$\phi_i(t) \overset{P=1}{\to} \infty$, *якщо* $h_i > k_i$; $\phi_i(t) \overset{P=1}{\to} \frac{\pi}{2}$, *якщо* $h_i < -k_i$, *при додатковій умові, що виконуються нерівності* $-\lambda_{1i}u_{10} + \dot{u}_{10} > 0$ *і* $-\lambda_{2i}u_{20} + \dot{u}_{20} > 0$, $i = \overline{1,2}$.
Доведення. Оскільки $\lambda_{i2} < \lambda_{i1}$ і $\lambda_{i1}\lambda_{i2} = {k_i}^2 > 0$, $i = \overline{1,2}$, то враховуючи умову 2) для $i = \overline{1,2}$, неважко показати, що при $t \to \infty$

$$-\frac{\lambda_{1i}^2}{2}\alpha_{12} - \lambda_{1i}\alpha_{11}(t) \overset{P=1}{\to} -\infty, \qquad -\frac{\lambda_{2i}^2}{2}\alpha_{22} - \lambda_{2i}\alpha_{21}(t) \overset{P=1}{\to} -\infty.$$

Далі, розглянемо загальний розв'язок рівняння амплітуд системи

$$A_i(t) = A_i(0)\exp\left\{\beta_{i1}(t) - (\lambda_{i1} + \lambda_{i2})\int_0^t g_{2i}(s)d\omega_i(s)\right\},$$

де $\int_0^t g_{2i}(s)d\omega_i(s) = \tilde{\omega}_i(\alpha_{2i}(t))$, $\tilde{\omega}_i(t)$ – вінерівський процес. Використовуючи "закон повторного логарифма"

$$P\left\{\lim_{t\to\infty}\frac{|\tilde{\omega}_i(\alpha_{2i}(t))|}{[2\alpha_{2i}(t)\ln\ln\alpha_{2i}(t)]^{1/2}} = 1\right\} = 1,$$

і умов теореми маємо, що $A_i(t) \overset{P=1}{\to} 0$ при $t \to \infty$, $i = \overline{1,2}$. Доведення тверджень теореми відносно поведінки фаз $\phi_i(t)$, $i = \overline{1,2}$, проводяться аналогічними міркуваннями доведенню теореми в [4].

Висновки. У роботі проведено якісний аналіз впливу на систему двох гармонічних осциляторів випадкових збурень типу "білого шуму" у формі Іто вздовж вектора фазової швидкості. Для отриманої системи двох стохастичних спряжених осциляторів з тертям знайдено явний вигляд і досліджено поведінку амплітуд та фаз. Маючи явний вигляд амплітуд та фаз системи двох стохастичних осциляторів залежно від поведінки невипадкових функцій $g_{ij}(t)$ можна будувати різні моделі осциляторів з довільним порядком росту амплітуд.

1. *Андронов А.А., Вит А.А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
2. *Гихман И.И., Скороход А.В.* Стохастические дифференциальные уравнения. – К.: Наукова думка, 1968. – 354 с.
3. *Kulinich G. L.* Qualitative analysis of the influence of random perturbations on the phase velocity of the harmonic oscillator. // Random Oper. And Stoch. Eq. – 1995. –3, № 2. – P. 141-152.
4. *Кулініч Г.Л., Перегуда О.В.* Інваріантні множини стохастичних диференціальних рівнянь Іто. – К.: ВПЦ "Київський університет 2002. – 91 с.

Одержано 28.04.2011