УДК 512.563

В. В. Поліщук (Закарпатський держ. ун-т)

ГРУПОВА ТА ІНДИВІДУАЛЬНА ОЦІНКА ВАЖЛИВОСТІ БУЛЕВИХ АРГУМЕНТІВ

The article considers well-known concept of the possibility assessment of some signs (group of signs) concerning recognizing function on the set of Boolean functions that are numerically important in the theory of pattern recognition. Basis idea this paper is to evaluate the importance of arguments and group of arguments of Boolean functions that is an important task in pattern recognition.

Розглянуто відоме поняття оцінки важливості окремих ознак (груп ознак) відносно розпізнаючої функції на множині булевих функцій, які чисельно займають важливе місце в теорії розпізнавання образів. Основна ідея даної статті — оцінити важливість аргументів і груп аргументів булевих функцій, що є важливою задачею у розпізнаванні образів.

Вступ. Задача вибору найбільш важливих аргументів і груп аргументів у двозначній логіці відіграє важливу роль для швидкого отримання тієї, чи іншої інформації про функцію. Вірний вибір аргументів, в яких зосереджена найбільш суттєва інформація про значення функції, є найважливішою умовою успішного розв'язку задачі розпізнавання. Відсутність порівняно простих і ефективних критеріїв, методів визначення і пошуку найбільш важливих аргументів і груп аргументів визначає актуальність розв'язку даної задачі.

1. Аналіз впливу фіктивних і суттєвих змінних на значення булевої функції. Метою введення, вилучення фіктивних змінних є необхідність виконання логічних операцій над функціями. Оскільки операції над функціями двозначної логіки виконуються покомпонентно, то вони повинні мати однакову місткість. Якщо функції мають різну місткість, то спочатку перевіряють, чи функція більшої місткості має фіктивні змінні, якщо так, то їх вилучають. В протилежному випадку, функції меншої місткості доводять до функцій більшої місткості шляхом введення потрібного числа фіктивних змінних [1].

Аналізуючи вплив аргументу булевої функції на її значення, можемо зробити такі висновки: змінна x_i є фіктивною, якщо значення функції не змінюються при зміні значення x_i, в протилежному випадку вона є суттєвою. Можемо сформулювати наступне запитання: Як ефективно і швидко визначити, які аргументи впливають на значення функції? Тобто, за значенням функції визначити які змінні є фіктивні. Ми виведемо швидкі формули знаходження фіктивних змінних для функцій 2-х, 3-х і 4-х аргументів ($N = 4$, $N = 8$, $N = 16$), які найчастіше використовуються на практиці. Перевіряючи їх послідовно, ми швидко встановимо фіктивні і суттєві змінні для булевої функції.

Отже, для $n = 2$ змінна x_1 буде фіктивною, якщо $f_i = f_{i+2}$ для $i = 1, 2$, а змінна x_2 буде фіктивною, якщо $f_i = f_{i+1}$ для $i = 1, 3$.

Для функції трьох змінних фіктивність змінних x_1, x_2, x_3 встановимо відповідно згідно рівностей:

$f_i = f_{i+4}$ для $i = 1, 2, 3, 4$;
$f_i = f_{i+2}$ для $i = 1, 2, 5, 6$;
$f_i = f_{i+1}$ для $i = 1, 3, 5, 7$.

Аналогічно, для функції із чотирьох аргументів фіктивні змінні x_1, x_2, x_3, x_4 встановимо відповідно згідно рівностей:

$f_i = f_{i+8}$ для $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7;$
$f_i = f_{i+4}$ для $i = 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12;$
$f_i = f_{i+2}$ для $i = 1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14;$
$f_i = f_{i+1}$ для $i = 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.$
У протилежному випадку змінні суттєві і впливають на значення функції.

2. Оцінка важливості булевих аргументів відносно значення функції. Будемо розглядати функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, аргументи яких визначено на множині $E_2 = \{0, 1\}$, такі, що $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in E_2$, коли $x_i \in E_2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Оцінка важливості окремих аргументів буде характеризувати інформацію, яку можна отримати про функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, знаючи значення її аргументів. Таку оцінку назвемо оцінкою важливості W аргументу x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ булевої функції і визначимо її згідно формули із [2]:

$$W(x_n) = \frac{1}{N} \sum_{j \in E_2} \max\nolimits_m b_j^m \ \ (n = 1, 2, ...), \tag{1}$$

де b_j^m $(j, m = 0, 1)$ — кількість всіх наборів із m, у яких на двійкових наборах змінна x_i дорівнює j: $x_i = j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; $N = 2^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$; n — кількість аргументів булевої функції.

Формула (1) випливає із наступних міркувань. Величину b_j^m можна інтерпретувати як ймовірність того, що функція $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ приймає значення f_k $(1 \leq k \leq N)$ за умови, якщо значення на двійковому наборі аргументу x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ дорівнює j $(j = 0, 1)$. Позначимо через $\rho_j = \max\limits_m b_j^m$ $(j, m = 0, 1)$. Величина ρ_j представляє собою максимальну ймовірність. Можна сказати, що величина ρ_j виражає інформацію, яку можна отримати про значення функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, знаючи, що на наборі $(f_1, f_2, ..., f_N)$ значення аргументу x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ на двійкових наборах дорівнює j. Величина $W(x_n)$ визначена функцією (1), характеризує собою ту інформацію, яку можна отримати про функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, знаючи значення аргументу x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ на наборі $(f_1, f_2, ..., f_N)$. Звідси випливає, що аргумент x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, для якого ця величина є найбільшою, і буде мати найбільш важливий вплив на значення булевої функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Розглянемо оцінку важливості груп аргументів [2]:

$$W(x_1, x_2, ..., x_\gamma) = \frac{1}{N} \sum_{\Delta \in \Gamma} \max\nolimits_m b_\Delta^m, \tag{2}$$

де $\Delta = t_1 t_2 \cdots t_\gamma$ $(t_\gamma \in E_2,\ j = 1, 2, ..., \gamma)$ — довільний набір значень аргументів; b_Δ^m — кількість всіх наборів, для яких виконується співвідношення $x_j = t_j$ $(j = 1, 2, ..., \gamma)$; t_j — значення аргументу x_j в наборі Δ, і $f(x_1, x_2, ..., x_n) = m$, $m = \{0, 1\}$; Γ — множина всіх двійкових наборів.

Формулу (2) можна обґрунтувати так само, як і попередню. Величина b_Δ^m — ймовірність того, що функція двозначної логіки набуде значення f_k $(1 \leq k \leq N)$ за умови, якщо значення аргументів з Δ будуть рівні t_j $(j = 1, 2, ..., \gamma)$. Аналогічно позначимо величину $\rho_\Delta = \max\limits_m b_\Delta^m$, яка представляє ту інформацію, яку можна отримати про значення функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо відомо, що на деяких наборах значення групи аргументів $x_1, x_2, ..., x_\gamma$ дорівнює t_j $(j = 1, 2, ..., \gamma)$. Отже, величина $W(x_1, x_2, ..., x_\gamma)$, яка визначається функцією (2), характеризує ту інформацію, яку можна отримати про функцію $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо відоме значення групи аргументів $x_1, x_2, ..., x_\gamma$ на наборі Δ.

Формули (1) і (2) представляють собою деякі функціонали: вони встановлюють відповідність між множиною функцій (аргументів) з однієї сторони, і деякою числовою множиною з іншої. Оцінки важливості окремих аргументів і груп аргументів, визначені формулами (1) і (2), будемо називати відповідно функціоналом важливості аргументу (ФВА) і функціоналом важливості груп аргументів (ФВГА).

Відмітимо деякі властивості вказаних функціоналів:

1) $\frac{1}{N} \leq W(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 1$.

2) Для ФВГА W виконується властивість монотонності: при збільшенні числа аргументів у групі числове ФВГА не зменшиться.

Чим більше значення оцінки важливості даного аргументу (груп аргументів), тим важливіший його вплив на значення булевої функції.

Формули (1) і (2) застосуємо на простому прикладі.

Нехай функція $f(x_1, x_2, x_3)$ задана за допомогою таблиці:

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Обчислимо оцінки $W(x_1), W(x_2), W(x_3)$ за формулою (1). Знайдемо для кожного із аргументів величини b_j^m $(j, m = 0, 1)$:

$$\begin{aligned} &\text{для } x_1: \quad b_0^0 = 3, \quad b_0^1 = 1, \quad b_1^0 = 1, \quad b_1^1 = 3; \\ &\text{для } x_2: \quad b_0^0 = 2, \quad b_0^1 = 2, \quad b_1^0 = 2, \quad b_1^1 = 2; \\ &\text{для } x_3: \quad b_0^0 = 2, \quad b_0^1 = 2, \quad b_1^0 = 2, \quad b_1^1 = 2. \end{aligned}$$

Підставимо знайдені значення у формулу (1) і обчислимо відповідні оцінки:

$$W(x_1) = \tfrac{1}{8}(\max(b_0^0, b_0^1) + \max(b_1^0, b_1^1)) = \tfrac{1}{8}(3+3) = \tfrac{3}{4};$$

$$W(x_2) = \tfrac{1}{8}(\max(b_0^0, b_0^1) + \max(b_1^0, b_1^1)) = \tfrac{1}{8}(2+2) = \tfrac{1}{2};$$

$$W(x_3) = \tfrac{1}{8}(\max(b_0^0, b_0^1) + \max(b_1^0, b_1^1)) = \tfrac{1}{8}(2+2) = \tfrac{1}{2}.$$

Звідси можемо зробити висновок, що x_1 є найбільш важливим аргументом відносно функції $f(x_1, x_2, x_3)$.

Обчислимо оцінку важливості для групи аргументів x_1, x_2 за формулою (2). Знайдемо величини:

$$\begin{aligned} &b_{00}^0 = 2, \quad b_{00}^1 = 0, \quad b_{01}^0 = 1, \quad b_{01}^1 = 1; \\ &b_{10}^0 = 0, \quad b_{11}^1 = 2, \quad b_{11}^0 = 1, \quad b_{11}^1 = 1. \end{aligned}$$

Підставимо знайдені значення у формулу (2):

$$W(x_1, x_2) = \tfrac{1}{8}(\max(b_{00}^0, b_{00}^1) + \max(b_{01}^0, b_{01}^1)) + \max(b_{10}^0, b_{10}^1) + \max(b_{11}^0, b_{11}^1)) =$$

$$= \tfrac{1}{8}(2+1+2+1) = \tfrac{3}{4}.$$

Далі знайдемо оцінку важливості для групи аргументів x_2, x_3:

$$b_{00}^0 = 1,\quad b_{00}^1 = 1,\quad b_{01}^0 = 1,\quad b_{01}^1 = 1;$$
$$b_{10}^0 = 1,\quad b_{10}^1 = 1,\quad b_{11}^0 = 1,\quad b_{11}^1 = 1.$$

$$W(x_2,x_3) = \tfrac{1}{8}(\max(b_{00}^0, b_{00}^1) + \max(b_{01}^0, b_{01}^1)) + \max(b_{10}^0, b_{10}^1) + \max(b_{11}^0, b_{11}^1)) = \\ = \tfrac{1}{8}(1+1+1+1) = \tfrac{1}{2}.$$

Для групи аргументів x_1, x_3:

$$b_{00}^0 = 1,\quad b_{00}^1 = 1,\quad b_{01}^0 = 2,\quad b_{01}^1 = 0;$$
$$b_{10}^0 = 1,\quad b_{10}^1 = 1,\quad b_{11}^0 = 0,\quad b_{11}^1 = 2.$$

$$W(x_1,x_3) = \tfrac{1}{8}(\max(b_{00}^0, b_{00}^1) + \max(b_{01}^0, b_{01}^1)) + \max(b_{10}^0, b_{10}^1) + \max(b_{11}^0, b_{11}^1)) = \\ = \tfrac{1}{8}(1+2+1+2) = \tfrac{3}{4}.$$

Отже, $W(x_1,x_3)$ і $W(x_1,x_2)$ — найбільш важливі групи аргументів відносно функції $f(x_1,x_2,x_3)$.

Формули (1) і (2) можна також застосовувати для k-значної логіки, тоді функція $f(x_1,x_2,...,x_n)$ і її аргументи будуть визначені на множині $Z_k = \{0,1,2,...,k-1\}$, $k > 2$, причому $N = k^n$ $(n = 1,2,...)$, n — кількість аргументів функції k-значної логіки.

Для оцінки важливості окремих аргументів і груп аргументів у двозначній логіці автором написана програма на мові Pascal. Програма апробована для $n = 9$ $(N = 512)$.

Отримані результати показують, що класифікувати функцію по одному аргументу не вдається, так як всі аргументи отримали однакову оцінку, яка наближено дорівнює 0,79. Далі знаходимо оцінки всіх можливих груп аргументів, починаючи із 2 і до 7. Максимальна оцінка наближено дорівнює 0,94, і найбільш важливі групи аргументів відносно функції f є (x_4,x_6,x_7), (x_4,x_6,x_7,x_8), $(x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7)$. Тобто ці групи аргументів найбільш впливають на значення функції. Крім того, із додаванням до групи (x_4,x_6,x_7) аргументу x_8, значення оцінки не змінюється. Це означає, що для оптимізації часу при розпізнаванні достатньо вибрати групу аргументів (x_4,x_6,x_7), яка показала досить високу оцінку значення функції і складається із найменшої кількості аргументів. Отримані значення можемо класифікувати, розбивши на три класи з відповідними діапазонами [0, 99], [100, 199], [200, 299], та групами оцінок.

При аналізі значень оцінок видно, що різні групи оцінок приймають однакові значення. Тоді, ми можемо провести класифікацію і розбити групи оцінок на класи за приналежністю до значень оцінок. При такій класифікації на попередньому прикладі помітимо, що серед 153 груп оцінок, ми отримаємо 60 класів. Це дасть нам можливість при розпізнаванні значення функції f вибирати клас груп оцінок, який оптимально підходить і за групами оцінок, і за значенням. Це суттєва для розпізнавання інформація, що є найважливішою умовою успішного розв'язку задачі розпізнавання.

1. *Бардачов Ю. М., Соколова Н. А., Ходаков В. Є.* Дискретна математика. – К.: Вища школа, 2002. – 287 с.
2. *Василенко Ю. А.* Математическое конструирование многоуровневых распознающих систем на основе метода разветвленного выбора признаков: теория, алгоритмы, реализация, применение: Дис. ... д-ра техн. наук. – Харьков, 1990. – С. 242.

Одержано 30.03.2011