УДК 517.9

М. В. Прохоренко (Національний ун-т "Львівська політехніка")

МОМЕНТИ ІМПУЛЬСІВ ДЛЯ СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ У ПРОСТОРІ $\mathbb{R}^n$

We study the system of ordinary differential equations with real constant coefficients in n-dimensional space, $n > 2$, with impulses in the non fixed moments. The conditions of existence of infinite sequence of angular momentum and the absence of beating.

У роботі розглянуто систему диференціальних рівнянь зі сталими дійсними коефіцієнтами в n-вимірному просторі, $n>2$, з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу. Встановлено умови існування нескінченної послідовності моментів імпульсів та умови відсутності биття.

Вступ. У моделюванні механічних, радіотехнічних, фізичних, біологічних та інших процесів виникає необхідність у вивченні диференціальних рівнянь з імпульсною дією [1]– [2]. Вивчаючи диференціальних рівнянь з імпульсною дією у фіксовані моменти часу припускають, що моменти імпульсної дії здійснюються нескінченну кількість разів [3]– [5]. При дослідженні диференціальних рівнянь з імпульсною дією у моменти часу, що визначаються самою задачею, потрібно встановлювати додаткові умови для настання імпульсної дії більше одного разу [6]– [7]. У роботі [7] розглядалася система з імпульсною дією в нефіксовані моменти часу для двох диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами та асимптотично стійким станом рівноваги. Зокрема, одержано оцінки знизу відстані між сусідніми моментами імпульсної дії.

Ця робота є продовженням досліджень [7] та розглядає систему диференціальних рівнянь зі сталими дійсними коефіцієнтами в n-вимірному просторі, $n>2$, з імпульсною дією в моменти часу, що визначаються самим розв'язком системи. Встановлено умови існування нескінченної послідовності моментів імпульсів та отримано умови відсутності биття.

1.Формулювання задачі. В просторі $\mathbb{R}^n$ зафіксуємо вектор b та гіперплощину $D_0 = \{y \in \mathbb{R}^n : \ (b, y) = c_1\}$, де (b, y) - скалярниий добуток, c_1 - стала, причому $c_1 > 0$.

Розглянемо динамічну систему з імпульсною дією, визначену в просторі $\mathbb{R}^n$ системою звичайних диференціальних рівнянь

$$\frac{dy}{dt} = Ay\left(t\right), \ t \in [t_0, +\infty)\,, \tag{1}$$

з початковою умовою

$$y\left(t_0\right) = y_0 \tag{2}$$

та умовою імпульсної дії

$$y\left(t+0\right) - y\left(t-0\right) = g\,, \quad \text{коли } y\left(t-0\right) \in D_0, \tag{3}$$

де $A-$ квадратна матриця зі сталими дійсними коефіцієнтами порядку n, $y_0 \in \mathbb{R}^n$, g - заданий вектор в $\mathbb{R}^n$.

Процес, що описується такою системою, протікає так: точка $(t, y\left(t\right))$, вийшовши із початкового положення (t_0, y_0), з перебігом часу здійснює рух вздовж кривої $\{(t; y(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} : y(t) = \eta(t, y_0, t_0), t \geqslant t_0\}$, де $y(t) = \eta(t, y_0, t_0)$ - розв'язок системи рівнянь (1), для якого $\eta(t_0, y_0, t_0) = y_0$. Рух вздовж кривої здійснюється до моменту часу t_1, коли точка $(t, y(t))$ потрапляє на гіперплощину D_0. В цей момент відбувається "миттєва" зміна положення точки $(t, y(t))$ за законом (3), тобто відбувається перекидання із точки $(t_1, y(t_1))$ в точку (t_1, y_1), де $y_1 = y(t_1) + g$. Внаслідок цього, точка $(t, y(t))$ продовжує рухатися вздовж кривої $\{(t, y(t)) \in \mathbb{R}^{n+1} : y(t) = \eta(t, y_1, t_1),\ t \geqslant t_1\}$, що є розв'язком диференціального рівняння (1) з умовою $y(t_1) = y_1$, до наступного моменту часу t_2 $(t_2 > t_1)$, коли $(t, y(t))$ знову потрапить на D_0 і т.д.

Моменти часу $t_k, (k \in \mathbb{N})$, для яких $y(t_k - 0) \in D_0$, назвемо моментами імпульсної дії. Розв'язком задачі (1) – (3) назвемо функцію $y(t)$, яка задовольняє рівняння (1) на кожному інтервалі (t_k, t_{k+1}), де $k = 0, 1, \ldots$. У точках t_k функція $y(t)$ неперервна зліва і має розриви першого роду.

Розв'язок задачі (1) – (3) існує, єдиний та визначений для всіх $t \in [t_0, +\infty)$, що випливає з властивостей лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь.

Введемо позначення

$$D_+ = \{y \in \mathbb{R}^n : (b, y) > c_1\}, D_- = \{y \in \mathbb{R}^n : (b, y) < c_1\},$$

де вектор b вибраний так, що півплощина D_+ не містить початку координат.

Інтегральна крива системи (1) – (3) перетинає гіперплощину D_0, якщо:

$(\mathbf{A}_1)$: стан рівноваги системи (1) (початок координат) є асимптотично стійким та $y_0 \in D_+ \cup D_0$;

$(\mathbf{B}_1)$: стан рівноваги системи (1) є нестійким та $y_0 \in D_- \cup D_0$.

Для здійснення імпульсної дії більше одного разу для випадку $(\mathbf{A}_1)$ необхідно, щоб кут між векторами b та g був гострий, тобто

$(\mathbf{A}_{1,1})$: $\quad (b, g) > 0$,

для випадку $(\mathbf{B}_1)$ необхідно, щоб кут між векторами b та g був тупий, тобто

$(\mathbf{B}_{1,1})$: $\quad (b, g) < 0$.

Зупинимося на випадку $(\mathbf{A}_1)$ з умовою $(\mathbf{A}_{1,1})$. Випадок $(\mathbf{B}_1)$ з умовою $(\mathbf{B}_{1,1})$ розглядається аналогічно.

2. Асимптотична поведінка моментів імпульсної дії.

Теорема 1. *Нехай виконуються $(\mathbf{A}_1)$, $(\mathbf{A}_{1,1})$. Тоді, існує нескінченна послідовність моментів імпульсної дії задачі (1) – (3).*

Доведення. За виконання умови $(\mathbf{A}_1)$, точка $(t, y(t))$, вийшовши із початкового положення (t_0, y_0), з перебігом часу t рухається до початку координат. В момент t_1 вона потрапляє на гіперплощину D_0 (у випадку, коли $y_0 \in D_0$ момент $t_1 = t_0$) і "миттєво" перескакує з положення $(t_1, y(t_1))$ в (t_1, y_1), де $y_1 = y(t_1) + g$. Оскільки, з геометричної точки зору умова $(\mathbf{A}_{1,1})$ означає, що кут між веторами b та g гострий, то $y_1 \in D_+$. Після цього точка $(t, y(t))$ $(t > t_1, y(t) \in D_+)$ продовжує рухатися до початку координат. А отже, існує момент t_2 - момент зустрічі точки $(t, y(t))$ з гіперплощиною D_0. В момент t_2 "миттєво" змінюється положення точки з $(t_2, y(t_2))$ на (t_2, y_2), де $y_2 = y(t_2) + g$, причому $y_2 \in D_+$ і т.д. Отже, точка $(t, y(t))$ з плином часу t нескінченну кількіть разів потрапляє на гіперплощину D_0, тобто існує нескінченна послідовність моментів імпульсної дії задачі (1) – (3). $\square$

2. Явище биття.

Означення. *Під биттям розв'язку задачі (1) – (3) розуміємо явище, під час якого точка $(t, y(t))$ нескінченну кількість разів потрапляє на D_0 за як завгодно малий проміжок часу.*

Нехай виконуються умови $(\mathbf{A}_1)$, $(\mathbf{A}_{1,1})$. Зафіксуємо гіперплощину D_0, вектор g і точку $y_0 \in D_+ \cup D_0$ та з'ясуємо умови відсутності биття для розв'язку задачі (1) – (3).

Позначимо $T_k = t_{k+1} - t_k \, (k = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$. Тоді із збіжності чи розбіжності ряду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k$ випливає, відповідно, існування чи відсутність биття розв'язку задачі (1) – (3).

Теорема 2. *Нехай виконуються $(\boldsymbol{A}_1)$, $(\boldsymbol{A}_{1,1})$. Тоді для розв'язку задачі (1) – (3) відсутнє биття.*

Доведення. Зведемо матрицю A до жорданової форми $J = B^{-1}AB$, де B – матриця переходу від базису $x_1, x_2, \ldots, x_n$ до базису $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Тоді, задача (1) – (3) в базисі $x_1, x_2, \ldots, x_n$ матиме вигляд:

$$\frac{dx}{dt} = J\,x(t)\,, t \in [t_0, +\infty)\,, \tag{4}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{5}$$

$$x(t+0) - x(t-0) = h\,, \quad \text{коли } x(t-0) \in S_0, \tag{6}$$

де $x_0 = B^{-1}y_0$, $h = B^{-1}g$, $x_0 \in S_+ \cup S_0$, $S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : (a,x) = c_1\}\,, S_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : (a,x) > c_1\}\,, S_- = \{x \in \mathbb{R}^n : (a,x) < c_1\}\,, a = B^{-1}b$, умова $(\mathrm{A}_{1,1})$ набуває вигляду $(a,h) > 0$.

З'ясуємо умови відсутності биття для розв'язків задачі (4) – (6). Розглянемо випадки.

1) Нехай власні значення матриці J дійсні, від'ємні та рівні між собою, тобто $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = \lambda < 0$ з геометричною кратністю n. Тоді розв'язок задачі (4) – (6) для $t \in [t_k, t_{k+1})$ $(k = 0,\ 1, ...)$ має вигляд

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01}e^{\lambda(t-t_0)} + h_1 \sum\limits_{j=1}^{k} e^{\lambda(t-t_j)}, \\ x_2(t) = x_{02}e^{\lambda(t-t_0)} + h_2 \sum\limits_{j=1}^{k} e^{\lambda(t-t_j)}, \\ \ldots \\ x_n(t) = x_{0,n}e^{\lambda(t-t_0)} + h_n \sum\limits_{j=1}^{k} e^{\lambda(t-t_j)}, \end{cases} \tag{7}$$

а рух точок $(x_1(t)\,, x_2(t)\,, \ldots, x_n(t))$ здійснюється вздовж прямих

$$\frac{x_1}{C_1} = \frac{x_2}{C_2} = \ldots = \frac{x_n}{C_n},$$

де $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - сталі.

Момент t_{k+1} попадання точки $x(t)$ на S_0 знаходимо з рівняння

$$(a, x_0)\, e^{\lambda(t_{k+1}-t_0)} + (a, h) \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda(t_{k+1}-t_j)} = c_1. \tag{8}$$

Підставляючи покроково $k = 1, 2, \ldots$ в рівняння (8), одержуємо

$$t_1 = t_0 + \frac{1}{|\lambda|} \ln \frac{(a, x_0)}{c_1}, \quad t_{k+1} = t_k + \frac{1}{|\lambda|} \ln \left| 1 + \frac{(a, h)}{c_1} \right|, \, k = 1, 2, \ldots,$$

$(a, x_0) \geqslant c_1$ оскільки $x_0 \in S_+ \cup S_0$.

Отже, для даного виду матриці J відстань $T_k \, (k = 1, 2, \ldots)$ між сусідніми моментами реалізації імпульсів є сталою величиною і рівною

$$T_k = \frac{1}{|\lambda|} \ln \left| 1 + \frac{(a, h)}{c_1} \right| > 0, k = 1, 2, \ldots, \tag{9}$$

тобто, відсутнє биття розв'язку задачі (4) – (6).

2) Нехай матриця J – діагональна, з дійсними від'ємними власними значеннями $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. У цьому випадку розв'язок $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ системи диференціальних рівнянь з імпульсною дією (4) – (6) для $t \in [t_k, t_{k+1})$ $(k = 0, 1, ...)$ має вигляд

$$\begin{cases} x_1(t) = x_{01} e^{\lambda_1(t-t_0)} + h_1 \sum\limits_{j=1}^{k} e^{\lambda_1(t-t_j)}, \\ x_2(t) = x_{02} e^{\lambda_2(t-t_0)} + h_2 \sum\limits_{j=1}^{k} e^{\lambda_2(t-t_j)}, \\ \ldots \\ x_n(t) = x_{0,n} e^{\lambda_n(t-t_0)} + h_n \sum\limits_{j=1}^{k} e^{\lambda_n(t-t_j)}, \end{cases} \tag{10}$$

а момент t_{k+1} визначаємо з рівняння

$$\sum_{m=1}^{n} b_m \left(x_{0,m} e^{\lambda_m(t_{k+1}-t_0)} + h_m \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_m(t_{k+1}-t_j)} \right) = c_1. \tag{11}$$

Існування розв'язку рівняння (11) слідує з виконання умов $(\mathbf{A}_1)$, $(\mathbf{A}_{1,1})$, оскільки неможливо потрапити з D_+ до нуля не перетнувши D_0. З (11) не можна явно знайти T_k. Покажемо, що $T_k > \dfrac{1}{|\lambda|} \ln \left| 1 + \dfrac{(a, h)}{c_1} \right|$ для $k = 1, 2, \ldots$. Оскільки умова $(\mathbf{A}_1)$ забезпечує попадання точки $x(t)$ з положення $x_0 \in S_0 \cup S_+$ на гіперплощину S_0 в момент t_1, дослідимо поведінку цієї точки при $t > t_1$. Згідно (6) в момент t_1 точка $x(t_1)$ "миттєво" перескакує в положення $x_1 = x(t_1) + h$ та починає рухатися до початку координат вздовж кривої

$$x_2 = \frac{x_{21} + h_2}{x_{11} + h_1} x_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}, x_3 = \frac{x_{31} + h_3}{x_{11} + h_1} x_1^{\frac{\lambda_3}{\lambda_1}}, \ldots, x_n = \frac{x_{n1} + h_n}{x_{11} + h_1} x_1^{\frac{\lambda_n}{\lambda_1}},$$

де $x_1 = (x_{11}, x_{21}, \ldots, x_{n1})$. Рух по кривій здійснюється до моменту попадання на S_0, але до гіперплощини S_0 точка $x\,(t)$ дійшла швидше, якби вона рухалася по прямій, що проходить через x_1 та початок координат, тобто випадок розглянутий в 1). Отже, $t_2 - t_1 > \frac{1}{|\lambda|} \ln \left| 1 + \frac{(a,h)}{c_1} \right|$. Продовживши аналогічні міркування для $t > t_2$, одержуємо справедливість оцінки $t_3 - t_2 > \frac{1}{|\lambda|} \ln \left| 1 + \frac{(a,h)}{c_1} \right|$ і т.д.

3) Для усіх інших випадків матриці J також справедлива оцінка відстані між сусідніми моментами імпульсної дії $T_k > \frac{1}{|\lambda|} \ln \left| 1 + \frac{(a,h)}{c_1} \right|$ для $k = 1, 2, \ldots$. Така оцінка випливає з міркувань, що найшвидше з S_+ потрапити на S_0 по прямій, а рух по прямій здійснюється у випадку диктричного вузла – випадку 1), в усіх інших виглядах матриці J рух точок $x\,(t)$ відбувається вздовж кривих.

Отже, для розв'язків задачі (4) – (6) биття відсутнє. Оскільки $J = B^{-1}AB$, де B – матриця переходу від базису $x_1, x_2, \ldots, x_n$ до базису $y_1, y_2, \ldots, y_n$, перетворимо систему (4) до (1):

$$\frac{dx}{dt} = Jx\,(t)\,,$$
$$\frac{dx}{dt} = B^{-1}ABx\,(t)\,,$$
$$B\frac{dx}{dt} = ABx\,(t)\,,$$
$$\frac{d\,(Bx)}{dt} = A\,(Bx\,(t))\,.$$

При заміні в останньому рівнянні Bx на y, одержуємо

$$\frac{dy}{dt} = Ay\,(t)$$

тобто, (1). Тоді (5) і (6) зводиться до (2) і (3) при введенні відповідно заміни $x_0 = B^{-1}y_0, h = B^{-1}g$. Отже, відсутність биття для розв'язків задачі (4) – (6) еквівалентне відсутність биття для розв'язків задачі (1) – (3). □

Наслідок 1. *Якщо власні значення матриці J дійсні, від'ємні та рівні між собою, то має місце оцінка*

$$\varlimsup_{t\to\infty} \|x\,(t)\| \leqslant \frac{c_1}{(a,h)} \|h\| \left(\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \right). \tag{12}$$

Доведення. Якщо в (7) підставити $T_k = \frac{1}{|\lambda|} \ln \left| 1 + \frac{(a,h)}{c_1} \right| \,(k = 1, 2, \ldots)$, то (7) набуде вигляду

$$\begin{cases} x_1\,(t) = x_{01}e^{\lambda(t-t_0)} + h_1 e^{\lambda(t-t_k)} \sum\limits_{j=1}^{k} \left(\dfrac{c_1}{c_1 + (a,h)} \right)^j, \\ x_2\,(t) = x_{02}e^{\lambda(t-t_0)} + h_2 e^{\lambda(t-t_k)} \sum\limits_{j=1}^{k} \left(\dfrac{c_1}{c_1 + (a,h)} \right)^j, \\ \ldots \\ x_n\,(t) = x_{0,n}e^{\lambda(t-t_0)} + h_n e^{\lambda(t-t_k)} \sum\limits_{j=1}^{k} \left(\dfrac{c_1}{c_1 + (a,h)} \right)^j. \end{cases}$$

Права частина одержаних співвідношень мажорується геометричною прогресією зі знаменником $\dfrac{c_1}{c_1 + (a, h)} < 1$ і справедливими є нерівності

$$\begin{cases} |x_1(t)| \leqslant e^{\lambda(t-t_0)} |x_{01}| + \left|\dfrac{h_1 c_1}{(a,h)}\right|, \\ |x_2(t)| \leqslant e^{\lambda(t-t_0)} |x_{02}| + \left|\dfrac{h_2 c_1}{(a,h)}\right|, \\ \dots \\ |x_n(t)| \leqslant e^{\lambda(t-t_0)} |x_{0,n}| + \left|\dfrac{h_n c_1}{(a,h)}\right|, \end{cases}$$

з яких слідує оцінка (12). $\square$

Наслідок 2. *Якщо гіперплощина S_0 має вигляд $a_s x_s = c_1$ $\left(s = \overline{1,n}\right)$, тобто усі $a_j = 0$ при $j \neq s(j = \overline{1,n})$, то відстань між сусідніми моментами імпульсної дії є сталою величиною для всіх $k \in \mathbb{N}$ і рівна*

$$T_k = \frac{1}{|\lambda_s|} \ln \left| 1 + \frac{a_s h_s}{c_1} \right|.$$

Доведення. Справедливість такої оцінки випливає з рівняння (11), коли замість усіх $a_j(j \neq s, j = \overline{1,n})$ поставимо нулі. $\square$

1. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием – К. : Вища шк., 1987. – 287 с.
2. *Laksmikantam V., Bainov D.D., Simeonov P.S.* Theory of impulsive differential equations. – Singapore: World Scientific. – 1989. – 273 p.
3. *Самойленко В. Г., Елгондыев К. К.* Исследование линейных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в $\mathbb{R}^2$. – К., 1989. – 31 с. – (Препринт / АН УССР, Ин-т математики; 89.59).
4. *Bainov D., Covachev V.* Impulsive differential equations with a small parameter. – Singapore: World Scientific. – 1994. – 268 p.
5. *Stamova I.* Stability analysis of impulsive functional differential equations. – Germany: Walter de Gruyter. – 2009. – 230 p.
6. *Мышкис А. Д.* Процес теплопроводности с авторегулируемой импульсной поддержкой // Автоматика и телемеханика. – 1995. – № 2. – С. 35–43.
7. *Вус А. Я., Мороз М. В.* Обмеженість розв'язків системи двох диференціальних рівнянь з імпульсною дією // Математичний вісник НТШ : зб. наук. праць, Львів. – 2007. – Т. 4. – С. 32–41.
8. *Мильман В. Д., Мышкис А. Д.* Об устойчивости движения при наличии толчков // Сиб. матем. журн. – 1960. – Т. 1, № 2. – С. 233–237.

Одержано 23.03.2011