УДК 519.21

Є. В. Турчин
(Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара)

ПОСИЛЕНИЙ ЗАКОН ВЕЛИКИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО СУБГАУССІВСЬКИХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

There has been obtained a strong law of large numbers for negatively dependent locally sub-Gaussian random variables.

У роботі отримано посилений закон великих чисел для від'ємно залежних локально субгауссівських випадкових величин.

1. Вступ. Властивості субгауссівських і споріднених випадкових величин вивчаються з 60-х років XX сторіччя. Але граничні теореми для цього класу випадкових величин досліджені недостатньо. Деякі теореми типа закону великих чисел для субгауссівських і φ-субгауссівських випадкових величин отримані у роботах Антоніні, Козаченко й Володіна [1], Булдигіна й Солнцева [2], Факура й Азарнуша [3, 4]. П. Чарека зі співавторами в статті [5] було введено поняття локально субгауссівської випадкової величини, яке узагальнює поняття передгауссівської випадкової величини (див. [6]). В [5] було також доведено закон великих чисел для незалежних локально субгауссівських випадкових величин.

У даній роботі доводиться посилений закон великих чисел для від'ємно залежних локально субгауссівських випадкових величин.

2. Допоміжні відомості.

Випадкову величину ξ називатимемо локально субгауссівською (див. [5]), якщо існують такі константи $\nu \in \mathbb{R}^1$, $\alpha \in [0; \infty)$ і $\delta \in (0; \infty]$, що

$$\mathbf{E}\exp\{t\xi\} \le \exp\{\nu t + t^2\alpha^2/2\} \quad \forall t \in (-\delta, \delta).$$

Приклад 1. [5] *Випадкова величина ξ, яка розподілена біноміально з параметрами (n, p), є локально субгауссівською, причому для неї $\nu = np$, $\alpha = \sqrt{2np}$, $\delta = 1$.*

Приклад 2. [5] *Випадкова величина ξ, що має експоненціальний розподіл з параметром $\lambda = 1$, є локально субгауссівською, причому для неї $\nu = 1$, $\alpha = 2$, $\delta = 1/2$.*

Випадкові величини $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ називаються від'ємно залежними, якщо мають місце нерівності

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{\xi_j \le x_j\}\right) \le \prod_{j=1}^{n}\mathbf{P}\left\{\xi_j \le x_j\right\},$$

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{\xi_j > x_j\}\right) \le \prod_{j=1}^{n}\mathbf{P}\left\{\xi_j > x_j\right\}$$

для всіх $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^1$ (див. [7, 8]). Нескінчена послідовність випадкових величин $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ називається від'ємно залежною, якщо будь-яка її скінчена підмножина є від'ємно залежною. Приклади сімей від'ємно залежних випадкових величин наведені в [8, 9].

3. Основні результати.

Лема. 1) *Якщо ξ — локально субгауссівська випадкова величина, c — константа, то випадкова величина $c\xi$ також локально субгауссівська.*

2) *Якщо $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — локально субгауссівські випадкові величини, причому ξ_i має параметри $(\nu_i, \alpha_i, \delta_i)$, то випадкова величина $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ також локально субгауссівська з параметрами* $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i, \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)^{1/2}, \min\limits_{1 \le i \le n} \delta_i\right)$.

Доведення. Твердження пункта 1 очевидне.

Пересвідчимося, що твердження пункта 2 має місце. Для цього оцінимо $\mathbf{E} \exp\left\{t \sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\right\}$. Скористаємось нерівністю

$$\mathbf{E} \exp\left\{\sum_{i=1}^{n} t_i \xi_i\right\} \le \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E} \exp\{t_i \xi_i\} \tag{1}$$

(див. [7]), що справджується для від'ємно залежних випадкових величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ і довільних дійсних чисел одного знаку $t_1, t_2, \ldots, t_n$. З (1) випливає, що для всіх $t \in (-\delta, \delta)$

$$\mathbf{E} \exp\left\{t \sum_{i=1}^{n} \xi_i\right\} \le \prod_{i=1}^{n} \mathbf{E} \exp\{t\xi_i\} \le \prod_{i=1}^{n} \exp\left\{\nu_i t + t^2 \alpha_i^2/2\right\},$$

де $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}$, а тому $\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i$ — локально субгауссівська випадкова величина з параметрами $\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \nu_i, \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)^{1/2}, \delta\right)$.

Наступна теорема є узагальненням результату з роботи [5] на випадок від'ємно залежних випадкових величин.

Теорема. *Нехай $\{\xi_n\}$ — послідовність локально субгауссівських від'ємно залежних випадкових величин, $\alpha(\xi_i) = \alpha_i$, причому існують числа $C > 0$ і $p \in (0; 2)$ такі, що*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \le C n^p \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i - \mathbf{E}\xi_i) = 0$$

з імовірністю 1.

Доведення. Нехай $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} (\xi_i - \mathbf{E}\xi_i)$. Достатньо довести, що для довільного $\varepsilon > 0$

$$\mathbf{P}\{|S_n/n| > \varepsilon \text{ для нескінчено багатьох } n\} = 0. \tag{2}$$

Рівність (2) буде виконуватись, якщо справджується нерівність

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}\left(|S_n/n| > \varepsilon\right) < \infty. \tag{3}$$

Оцінимо $\mathbf{P}\left(|S_n/n| > \varepsilon\right)$. Зазначимо, що

$$\alpha(S_n) = \alpha(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}.$$

Для достатньо малих ε маємо

$$\mathbf{P}\left(|S_n/n| > \varepsilon\right) \le 2\exp\left\{-\frac{n^2\varepsilon^2}{2\alpha^2(S_n)}\right\} \le 2\exp\left\{-\frac{n^{2-p}\varepsilon^2}{2C}\right\}.$$

І оскільки ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \exp\left\{-\frac{n^{2-p}\varepsilon^2}{2C}\right\}$$

зібжний, то виконується нерівність (3).

Теорему доведено.

4. Висновки. Доведено посилений закон великих чисел для від'ємно залежних локально субгауссівських випадкових величин. Цей результат узагальнює закон великих чисел з роботи [5].

Автор висловлює вдячність професору Ю.В. Козаченко за увагу до роботи.

1. *Antonini R. G., Kozachenko Yu., Volodin A.* Convergence of series of dependent φ-subgaussian random variables // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 2008. – Vol. 338. – p. 1188—1203.
2. *Buldygin V., Solntsev S.* Asymptotic behaviour of linearly transformed sums of random variables. — Dordrecht: Kluwer, 1997.
3. *Fakoor V., Azarnoosh H. A.* On the complete convergence of weighted sums for dependent random variables // Journal of the Iranian Statistical Society. – 2005. – Vol. 4. – No. 1. – p. 57–64.
4. *Fakoor V., Azarnoosh H. A.* Strong convergence of weighted sums for negatively orthant dependent random variables // Journal of Sciences, Islamic Republic of Iran. – 2006. – Vol. 17. – No. 2. – p. 161–164.
5. *Chareka P., Chareka O., Kennendy S.* Locally sub-Gaussian random variables and the strong law of large numbers // Atlantic Electr. J. of Math. — 2006. — Vol. 1. — No. 1. — p. 75–81.
6. *Buldygin V. V., Kozachenko Yu. V.* Metric Characterization of Random Variables and Random Processes. – Providence: American Mathematical Soc., 2000. – 258 p.
7. *Amini M., Bozorgnia A.* Negatively dependent bounded random variable probability inequalities and the strong law of large numbers // Journal of Applied Mathematics and Stochastic Analysis. – 2000. – Vol. 13. – No. 3. – p. 261–267.
8. *Block H. W., Savits T. H., Shaked M.* Some concepts of negative dependence // The Annals of Probability. – 1982. – Vol. 10. – No. 3. – p. 765—772.
9. *Ebrahimi N., Ghosh M.* Multivariate negative dependence // Communications in Statistics — Theory and Methods. – 1981. — Vol. 10. — No. 4. — p. 307–337.

Одержано 20.04.2011