УДК 519.8

І. І. Король, Ю. Ю. Король (Ужгородський нац. ун-т)

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ВИРОДЖЕНИХ ІМПУЛЬСНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ

We obtain a criterion for existence of solutions of Noetherian boundary value problem for a degenerate system of ordinary differential equations with impulse effect of general form in case when degenerate system of differential equations can be reduced to central canonical form.

Одержано критерій існування розв'язків нетерової крайової задачі для вироджених диференціальних систем з імпульсною дією загального вигляду у припущенні, що вироджена диференціальна система зводиться до центральної канонічної форми.

1. Постановка задачі. Дослідимо питання існування розв'язків виродженої імпульсної диференціальної системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t) + f(t), \quad t \in [a,b] \setminus \tau_i, \tag{1}$$

$$M_i x(\tau_i + 0) + N_i x(\tau_i - 0) = \alpha_i, \tag{2}$$

які задовольняють загальні лінійні крайові умови

$$\ell x(\cdot) = \alpha_0, \tag{3}$$

де $\tau_0 = a < \tau_1 < \cdots < \tau_p < b = \tau_{p+1}$ – фіксовані моменти часу; $A(t)$, $B(t)$ – $(n \times n)$-вимірні матриці з дійсними неперервними на $[a,b]$ компонентами, $detB(t) \equiv 0$; $f(t)$ – n-вимірна неперервна на $[a,b]$ функція; ℓ – m_0-вимірний лінійний вектор-функціонал, $\ell : C^1[a,b] \to \mathbb{R}^{m_0}$; α_0 – m_0-вимірний дійсний сталий вектор; N_i, M_i – прямокутні $(m_i \times n)$-вимірні дійсні матриці, $1 \le m_i \le n$.

Часткові випадки даної задачі розглядалися в працях багатьох авторів. Так, при $B(t) = E$ отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь нормального вигляду з імпульсною дією, яка була детально розглянута в багатьох роботах. Зокрема, в [1–4] досліджено імпульсні системи коли $M_i^{-1}N_i$ – є невиродженими n-вимірними матрицями, в [5] – лінійна двоточкова крайова задача з одним імпульсом, який задається невиродженими матрицями, в [6] – коли виродженими є матриці N_i. Нарешті, отримані в даній роботі результати аналогічні до одержаних в [7] і узагальнюють результати, опубліковані в [8], де розглядалася вироджена диференціальна система за відсутності імпульсних збурень.

Під розв'язком задачі (1)-(3) будемо розуміти кусково неперервно диференційовну на $[a,b]\setminus\{\tau_i\}$, $i = \overline{1,p}$ функцію

$$x(t) = \begin{cases} x_0(t), & t \in [\tau_0, \tau_1], \\ x_i(t), & t \in (\tau_i, \tau_{i+1}], \end{cases}$$

з розривами першого роду в точках $t = \tau_i$, яка задовольняє систему (1), імпульсні умови (2) та крайові умови (3). Будемо вважати функції $x_j(t)$ визначеними і неперервними на відповідних замкнених інтервалах $x_j(t) \in C[\tau_j, \tau_{j+1}]$, $j = \overline{0,p}$, $x_j(\tau_j) = x_j(\tau_j + 0) = \lim\limits_{t \to \tau_j + 0} x_j(t)$, і що розв'язок є неперервним зліва, тобто

$$x(\tau_i) = x(\tau_i - 0) = x_{i-1}(\tau_i) = \lim_{t \to \tau_i - 0} x_{i-1}(t), \ i = \overline{1,p}.$$

У просторі $C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$ неперервно диференційовних n-вимірних вектор-функцій розглянемо оператор L та спряжений до нього оператор $L^\top$:

$$L(t) = A(t) - B(t)\frac{d}{dt}, \qquad L^\top(t) = A^\top(t) + \frac{d}{dt}\, B^\top(t).$$

Означення 1 ([9]). *Матриця $B(t)$ має жорданів ланцюжок векторів завдовжки s відносно оператора $L(t)$, якщо існують ненульові вектори $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_s(t) \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, які при всіх $t \in [a,b]$ задовольняють співвідношення*

$$B(t)\varphi_1(t) = 0, \quad B(t)\varphi_i(t) = L(t)\varphi_{i-1}(t), \quad i = \overline{2,s},$$

а рівняння

$$B(t)z = L(t)\varphi_s(t)$$

в жодній точці $t \in [a,b]$ не має розв'язків.

Нехай існують r жорданових ланцюжків завдовжки s_i, $i = \overline{1,r}$ матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$, які складаються з векторів $\varphi_i^{(j)}(t) \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$:

$$B(t)\varphi_i^{(1)}(t) = a, \quad i = \overline{1,r},$$
$$B(t)\varphi_i^{(j)}(t) = L(t)\varphi_i^{(j-1)}(t), \quad j = \overline{2,s_i}, \quad i = \overline{1,r}.$$

Означення 2 ([9]). *Жордановим набором матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ називають сукупність всіх векторів $\varphi_i^{(j)}(t) \in C^1([a,b], \mathbb{R}^n)$, $j = \overline{1,s_i}$, $i = \overline{1,r}$, які входять у всі r існуючих жорданових ланцюжків матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$.*

Через $\psi_i^{(1)}(t)$, $i = \overline{1,r}$ позначимо власні вектори матриці $B^\top(t)$, які відповідають її нульовому значенню:

$$B^\top(t)\psi_i^{(1)}(t) = 0, \quad i = \overline{1,r}.$$

Означення 3 ([9]). *Жорданів набір матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ називається повним, якщо*

$$det\|\langle L(t)\varphi_i^{(s_i)}(t), \psi_j^{(1)}(t)\rangle\|_{i,j=1}^r \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Мають місце наступні твердження.

Лема 1 ([9]). *Нехай виконуються умови:*

1) $rank B(t) = n - r = const \ \forall t \in [a,b]$;

2) матриця $B(t)$ має при всіх $t \in [a,b]$ повний жорданів набір векторів $\varphi_i^{(j)}(t)$, $i = \overline{1,r}$, $j = \overline{1,s_i}$ відносно оператора $L(t)$, який складається з r жорданових ланцюжків завдовжки $s_i, i = \overline{1,r}$;

3) $A(t),\ B(t) \in C^{q-1}([a,b], \mathbb{R}^n)$, де $q = \max s_i$.

Тоді матриця $B^\top(t)$ матиме на відрізку $t \in [a,b]$ повний жорданів набір векторів $\psi_i^{(j)}(t)$ відносно оператора $L^\top(t)$, який складається з жорданових ланцюжків такої самої довжини.

Теорема 1 ([9]). *Нехай виконуються умови леми 1. Тоді існують неособливі при всіх $t \in [a,b]$ $(n \times n)$-матриці $P(t), Q(t) \in C^{q-1}([a,b],\mathbb{R}^n)$ такі, що в результаті множення рівняння (1) зліва на $P(t)$ і заміни*

$$x = Q(t)u$$

вироджена система (1) зводиться до системи в центральній канонічній формі

$$\begin{bmatrix} \mathbb{E}_{n-s} & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \frac{du}{dt} = \begin{bmatrix} M(t) & 0 \\ 0 & \mathbb{E}_s \end{bmatrix} u + g(t),$$

де

$$g(t)=P(t)f(t), \quad g(t)=col(g^{(1)}(t), g^{(2)}(t)),\ g^{(1)}\in\mathbb{R}^{n-s},\ g^{(2)}\in\mathbb{R}^s,$$

$s = s_1+\ldots+s_r$, $I = diag\{I_1, \ldots, I_r\}$, I_j — нільпотентні блоки Жордана порядку s_j $(j = \overline{1,r})$, $M(t) \in C^{q-1}([a,b],\mathbb{R}^n)$.

2. Побудова розв'язків. Припустимо, що виконуються умови леми 1, тобто за допомогою невиродженого лінійного перетворення система (1) може бути приведена до центральної канонічної форми.

Позначимо через $X_{n-s}(t)$ та $Y_{n-s}(t)$ – фундаментальні $(n \times (n-s))$-вимірні матриці, стовпці яких є розв'язками відповідно однорідної виродженої системи

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x(t), \tag{4}$$

та спряженої до (4) системи

$$\frac{d}{dt}B^\top(t)y = -A^\top(t)y;$$

c_0 – $(n–s)$-вимірний вектор-стовпчик довільних сталих; $R(t)=\Big(\Psi^\top(t)L(t)\Phi(t)\Big)^{-1}$. Через $\Phi(t)$ і $\Psi(t)$ позначимо $n \times s$-вимірні матриці, які складаються з векторів, що утворюють жорданові набори відповідно матриці $B(t)$ відносно оператора $L(t)$ і транспонованої матриці $B^\top(t)$ відносно оператора $L^\top(t)$:

$$\Phi(t) = \Big[\varphi_1^{(1)}(t), \cdots, \varphi_1^{(s_1)}(t); \varphi_2^{(1)}(t), \cdots, \varphi_2^{(s_2)}(t); \cdots, \varphi_q^{(1)}(t), \cdots, \varphi_q^{(s_q)}(t)\Big],$$

$$\Psi(t) = \Big[\psi_1^{(1)}(t), \cdots, \psi_1^{(s_1)}(t); \psi_2^{(1)}(t), \cdots, \psi_2^{(s_2)}(t); \cdots, \psi_q^{(1)}(t), \cdots, \psi_q^{(s_q)}(t)\Big].$$

Тоді загальний розв'язок сингулярної системи (1) має вигляд [9]:

$$\begin{gathered} x(t,c_0) = x_0(t,c_0) = X_{n-s}(t)c_0 + \int\limits_a^t X_{n-s}(t)Y_{n-s}^\top(\sigma)f(\sigma)d\sigma - \\ -\Phi(t)\left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \tfrac{d^k}{dt^k}R(t)\right)\Psi^\top(t)f(t), \end{gathered} \tag{5}$$

Після дії імпульсного збурення в точці $t = \tau_1$ продовжимо розв'язок $x(t) = x_0(t,c_0)$ вигляду (5) з інтервалу $t \in [\tau_0, \tau_1]$ на $(n-s)$-параметричний розв'язок $x_1(t)$:

$$\begin{gathered} x_1(t) = x_1(t,c_1) = X_{n-s}(t)c_1 + \int\limits_{\tau_1}^t X_{n-s}(t)Y_{n-s}^\top(\sigma)f(\sigma)d\sigma - \\ -\Phi(t)\left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \tfrac{d^k}{dt^k}R(t)\right)\Psi^\top(t)f(t),\ c_1\in\mathbb{R}^{n-s}; \end{gathered} \tag{6}$$

який визначений на інтервалі $[\tau_1, \tau_2]$. Зв'язок між ними визначається умовою (2) при $i=1$. Беручи до уваги неперервність функції $x_1(t) = x_1(t, c_1)$ в точці $t = \tau_1$, можемо записати умову (2) в цій точці наступним чином:

$$M_1 x_1(\tau_i) + N_1 x_0(\tau_i) = \alpha_1. \tag{7}$$

Підставляючи (5), (6) в (7), одержимо лінійне неоднорідне матричне рівняння

$$\widetilde{M_1} c_1 + \widetilde{N_1} c_0 = \alpha_1 + M_1 \gamma_1 - N_1 F_1,$$

де через $\widetilde{M_i}$, $\widetilde{N_i}$ для кожного $i = \overline{1,p}$ будемо позначати $(m_i \times (n-s))$-вимірні матриці, а через F_i, γ_i – n-вимірні вектори:

$$\widetilde{M_i} = M_i X_{n-s}(\tau_i), \quad \widetilde{N_i} = N_i X_{n-s}(\tau_i),$$

$$\gamma_i = \Phi(\tau_i) \sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(\tau_i) \Psi^\top(\tau_i) f(\tau_i), \quad F_i = \int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} X_{n-s}(\tau_i) Y_{n-s}^\top(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \gamma_i.$$

Оскільки на кожному з інтервалів $t \in (\tau_i, \tau_{i+1}]$ розв'язок визначається за формулою

$$\begin{gathered} x(t) = x_i(t, c_i) = X_{n-s}(t) c_i + \int\limits_{\tau_i}^{t} X_{n-s}(t) Y_{n-s}^\top(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \\ -\Phi(t) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(t) \right) \Psi^\top(t) f(t), \;\; c_i \in \mathbb{R}^{n-s}; \end{gathered} \tag{8}$$

то аналогічним чином одержимо, що в кожній точці імпульсу $t = \tau_i$ відповідні $(n-s)$-вимірні вектори довільних сталих c_{i-1}, c_i повинні задовольняти рівняння

$$\widetilde{M_i} c_i + \widetilde{N_i} c_{i-1} = \alpha_i + M_i \gamma_i - N_i F_i. \tag{9}$$

З аддитивності лінійного функціонала випливає, що

$$\ell x(\cdot) = \sum_{j=0}^{p} \ell_j x_j(\cdot, c_j),$$

де

$$\ell_0 x(\cdot) : C^1[\tau_0, \tau_1] \to \mathbb{R}^{m_0}, \quad \ell_i x(\cdot) : C^1(\tau_i, \tau_{i+1}] \to \mathbb{R}^{m_0}, \; i = \overline{1,p}.$$

Таким чином, крайову умову (2) можемо записати у вигляді

$$\sum_{j=0}^{p} \ell_j x_j(\cdot, c_j) = \alpha_0. \tag{10}$$

Підставляючи розв'язки $x_j(t)$ вигляду (5), (8) у крайову умову (10), одержимо:

$$\begin{gathered} G_0 c_0 + \ldots + G_p c_p = \\ = \alpha_0 - \sum_{j=0}^{p} \ell_j \left(\int\limits_{\tau_j}^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y_{n-s}^\top(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \Phi(\cdot) \left(\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(\cdot) \right) \Psi^\top(\cdot) f(\cdot) \right), \end{gathered} \tag{11}$$

де $G_j = \ell_j X_{n-s}(\cdot)$, $j = \overline{0,p}$. Об'єднуючи (11) з (9) при всіх $i = \overline{1,p}$, одержимо систему матричних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} G_0c_0 + \ldots + G_pc_p = \alpha_0 - - \sum\limits_{j=0}^{p} \ell_j \left(\int\limits_{\tau_j}^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y_{n-s}^{\top}(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \right. \\ \left. - \Phi(\cdot) \left(\sum\limits_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(\cdot) \right) \Psi^{\top}(\cdot) f(\cdot) \right), \\ \widetilde{N_1} c_0 + \widetilde{M_1} c_1 = \alpha_1 + M_1\gamma_1 - N_1F_1, \\ \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\ \widetilde{N_p} c_{p-1} + \widetilde{M_p} c_p = \alpha_p + M_p\gamma_p - N_pF_p, \end{cases}$$

яку можемо записати у вигляді

$$Dc = \alpha + \beta, \tag{12}$$

де D – $\big(m \times (p+1)(n-s)\big)$-вимірна матриця, $m = \sum\limits_{j=0}^{p} m_j$, а c, α і β – m-вимірні стовпці:

$$D = \begin{pmatrix} G_0 & G_1 & G_2 & \cdots & G_{p-1} & G_p \\ \widetilde{N_1} & \widetilde{M_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & \widetilde{N_2} & \widetilde{M_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \widetilde{N_p} & \widetilde{M_p} \end{pmatrix},$$

$$c = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \cdots \\ c_p \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_p \end{pmatrix},$$

$$\beta = \begin{pmatrix} -\sum\limits_{j=0}^{p} \ell_j \left(\int\limits_{\tau_j}^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y_{n-s}^{\top}(\sigma) f(\sigma) d\sigma - \Phi(\cdot) \left(\sum\limits_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k} R(\cdot) \right) \Psi^{\top}(\cdot) f(\cdot) \right) \\ M_1\gamma_1 - N_1F_1 \\ \cdots \\ M_p\gamma_p - N_pF_p \end{pmatrix}.$$

Згідно [10], необхідною і достатньою умовою сумісності лінійної неоднорідної алгебраїчної системи (12) є умова ортогональності

$$P_{D_v^{\top}}(\alpha + \beta) = 0, \tag{13}$$

і у випадку її виконання розв'язки системи (12) мають вигляд

$$c^* = c^*(\xi) = P_{D_u}\xi + D^{+}(\alpha + \beta), \quad \xi \in \mathbb{R}^u,$$

де $c^*=col(c_0^*(\xi),\cdots,c_p^*(\xi))\in\mathbb{R}^{(p+1)(n-s)}$, а через P_{D_u} позначено $\big((p+1)(n-s)\times u\big)$-вимірну матрицю, $u=(p+1)(n-s)-r$, $r=rankD\le min\big((p+1)(n-s),m\big)$, яка складається з лінійно незалежних стовпців $\big((p+1)(n-s)\times(p+1)(n-s)\big)$-вимірної матриці P_D, яка є ортопроектором з простору $R^{(p+1)(n-s)}$ на нуль простір $Ker(D)$ матриці D:

$$P_D:R^{(p+1)(n-s)}\to Ker(D),\qquad Ker(D)=P_DR^{(p+1)(n-s)},$$

причому стовпці матриці P_{D_u} утворюють повний базис ядра $Ker(D)$. Через $P_{D_v^\top}$ будемо позначати $(v\times m)$-вимірну матрицю, $v=m-r$, рядками якої є лінійно незалежні рядки матриці $P_{D^\top}$, яка, в свою чергу, є ортопроектором з простору R^m на нуль простір $Ker(D^\top)$ матриці $D^\top$:

$$P_{D^\top}:R^m\to Ker(D^\top),\qquad Ker(D^\top)=P_{D^\top}R^m,$$

причому рядки матриці $P_{D_v^\top}$ утворюють повний базис ядра матриці $D^\top$.

Таким чином, можемо сформулювати основний результат.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови леми 1. Крайова задача* (1)-(3) *, має розв'язки тоді і тільки тоді, коли виконується умова* (13). *При цьому вони утворюють u-параметричну сім'ю:*

$$x(t)=x(t,\xi)=\begin{cases}x_0(t,c_0^*(\xi)), & t\in[\tau_0,\tau_1],\\ x_i(t,c_i^*(\xi)), & t\in(\tau_i,\tau_{i+1}],\end{cases}\tag{14}$$

де $i=\overline{1,p}$, $c_j^*(\xi)\in\mathbb{R}^{n-s}$, $\xi\in\mathbb{R}^u$, $j=\overline{0,p}$,

$$\begin{gathered}x_j(t,\xi)=X_{n-s}(t)c_j^*(\xi)+\int\limits_{\tau_j}^{t}X_{n-s}(t)Y_{n-s}^\top(\sigma)f(\sigma)d\sigma-\\ -\Phi(t)\left(\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}R(t)\right)\Psi^\top(t)f(t).\end{gathered}\tag{15}$$

Якщо вироджена імпульсна крайова задача (1)-(3) не має розв'язків, то за допомогою керування імпульсами та крайовими умовами її завжди можна зробити розв'язною. Наступне твердження вказує значення α, при яких вироджена крайова задача (1)-(3) при будь-яких $f(t)$ буде розв'язною.

Теорема 3. *Для довільної функції* $f(t)\in C[a,b]$ *вироджена крайова задача* (1)-(3), *буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли*

$$\alpha=Q^+Q\beta,$$

де $Q=P_{D_v^\top}$.

Доведення можна провести подібно до доведення теореми 2 [8].

Зауваження 1. *У некритичному випадку [10] – коли* $P_{D^\top}=0$, *тобто відповідна однорідна крайова задача (при* $f(t)\equiv0$, $\alpha=0$*)) має тільки тривіальний розв'язок, тоді при довільних значеннях* $f(t)$, α_j, $j=\overline{0,p}$ *крайова задача* (1)-(3) *має u-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків вигляду* (14), (15).

Приклад 1. *Знайти розв'язок виродженої системи диференціальних рівнянь*

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 7 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

з імпульсним збуренням вигляду

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(2+0) + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} x(2-0) = \begin{pmatrix} -\frac{203}{9} \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

який задовольняє крайові умови

$$x(0) + x(4) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{197}{15} \\ -\frac{137}{5} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Множенням на матрицю

$$P = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 2 & \frac{-1}{3} & \frac{-2}{3} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

і заміною

$$x(t) = Qy(t), \qquad Q = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ \frac{1}{3} & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

система (16) *зводиться до центральної канонічної форми:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dy}{dt} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} \frac{25}{2} \\ \frac{11}{3} \\ \frac{7}{6} \end{pmatrix}.$$

При цьому матриця D має вигляд

$$H = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 25 & 25e^{-4} \\ -15 & -15e^{-4} \\ 5 & 5e^{-4} \\ 25e^{-2} & 25e^{-2} \\ -15e^{-2} & -15e^{-2} \end{pmatrix},$$

а крайова задача (16)-(18) *має розв'язки тоді і тільки тоді, коли має розв'язки* *алгебраїчна система вигляду* (13)*:*

$$\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 25 & 25e^{-4} \\ -15 & -15e^{-4} \\ 5 & 5e^{-4} \\ 25e^{-2} & 25e^{-2} \\ -15e^{-2} & -15e^{-2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 1674 - 17630e^{-2} + 19475e^{-4} - 1845e^{2} \\ -\frac{5022}{5} + 10578e^{-2} - 11685e^{-4} + 1107e^{2} \\ \frac{1674}{5} - 3526e^{-2} + 3895e^{-4} - 369e^{2} \\ -595 + 1845e^{-2} \\ 357 - 1107e^{-2} \end{pmatrix}.$$

Перевірка показує, що остання рівність є сумісною. Розв'язуючи її і підставляючи одержане значення c_1, c_2 *в* (14), (15) *одержимо розв'язок крайової задачі* (16)-(18)*:*

$$x(t)=\begin{cases} \frac{1}{90(e^4-1)}\begin{pmatrix} 5(-171e^{-t+4}-17035e^{-t+2}+19475e^{-t}-1845e^{-t+6}+1017e^4-1017) \\ -3(-171e^{-t+4}-17035e^{-t+2}+19475e^{-t}-1845e^{-t+6}+1205e^4-1205) \\ -171e^{-t+4}-17035e^{-t+2}+19475e^{-t}-1845e^{-t+6}-225e^4+225 \end{pmatrix} \\ \qquad \textit{при} \quad 0 \le t \le 2, \\ \frac{1}{90(e^4-1)}\begin{pmatrix} -5(19304e^{-t+4} - 18880e^{-t+6} - 1017e^4 + 1017) \\ 3(19304e^{-t+4} - 18880e^{-t+6} - 1205e^4 + 1205) \\ -(19304e^{-t+4} - 18880e^{-t+6} + 225e^4 - 225) \end{pmatrix} \\ \qquad \textit{при} \quad 2 < t \le 4. \end{cases}$$

1. *Самойленко А.М., Перестюк Н.А.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием.– К.: Вища школа, 1987.–288 с.
2. *Перестюк Н.А., Плотников В.А., Самойленко А.М., Скрипник Н.С.* Импульсные дифференциальные уравнения с многозначной и разрывной правой частью.– К.:ІМ НАН України, 2007.–428 с.
3. *Boichuk A.A., Samoilenko A.M.* Generalized Inverse Operators and Fredholm Boundary Value Problems. VSP Utrecht Boston, 2004. – 320 p.
4. *Бойчук А.А., Хращевская Р.Ф.* Слабонелинейные краевые задачи для дифференциальных систем с импульсным воздействием// Укр. мат. журн.–1993.– **45**, № 2.– С. 221–225.
5. *Каранджулов Л.И.* Структура общего решения краевых задач обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием с помощью полуобратных матриц// Укр. мат. журн.–1993.– **45**, № 5.– С. 616–625.
6. *Бойчук А.А., Чуйко Е.В., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина краевой задачи с вырожденным импульсным воздействием //Укр. мат. журн.–1996.– **48**, № 5.– С. 588–594.
7. *Бойчук А.А., Чуйко С.М.* Обобщенный оператор Грина импульсной краевой задачи с переключениями// Нелінійні коливання. – 2007. – 10, №1. – С. 51–65.
8. *Бойчук О.А., Шегда Л.М.* Вироджені крайові задачі// Нелінійні коливання. – 2007.– 10, №3. – С. 303–312.
9. *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – К.: Вища школа., 2000. – 294 с.
10. *Бойчук А.А., Журавлев В.Ф., Самойленко А.М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи.– К.:ІМ НАН України, 1995.–318 с.

Одержано 24.10.2011