УДК 515.122

В. М. Бабич, О. М. Філоненко (Київський нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ТОПОЛОГІЯ РОЗШИРЕННЯ

The paper contains the results which describe the properties of such general topological construction as extension topology. In particular, we prove that this topology has the property of transitivity. We find the base of the least cardinality for the topology and local one for the neighborhood system of every point. We calculate the interior, the closure, and the sets of isolated and limit points of any set. Also we prove that this space is disconnected, find components, and investigate its cardinality characteristics, separation axioms and metrizability.

У роботі отримано результати, які описують властивості загальної топологічної конструкції — топології розширення. Зокрема, доведено, що ця топологія має властивість транзитивності, знайдено бази найменшої потужності для топології та системи околів точки, обчислено внутрішність, замикання, множи́ни граничних та ізольованих точок довільної множини. Також доведено незв'язність цього топологічного простору, знайдено його компоненти зв'язності, досліджено потужністні характеристики, аксіоми відокремлюваності та метризовність.

Нехай (X,τ) — топологічний простір, X^* — надмножина множини X. Тоді родина $\tau^* = \{U \subset X^* \mid U \cap X \in \tau\}$ є топологією на X^*, яка називається *топологією розширення X до X^** (див. [1]). Справді, для довільних множин $U_\alpha \in \tau^*$, $\alpha \in T$, перетини U_α з X належать топології τ, звідки τ містить об'єднання $\bigcup\limits_{\alpha\in T}(U_\alpha \cap X) = (\bigcup\limits_{\alpha\in T} U_\alpha) \cap X$ і, коли множина індексів T скінченна, перетин $\bigcap\limits_{\alpha\in T}(U_\alpha \cap X) = (\bigcap\limits_{\alpha\in T} U_\alpha) \cap X$.

Таким чином, відкритими в X^* є ті й лише ті множини, перетин яких з X відкритий в X. Далі, множина A замкнена в X^* тоді й лише тоді, коли доповнення $X^*\backslash A$ відкрите в X^*, тобто перетин $(X^*\backslash A) \cap X = X\backslash A = X\backslash(A \cap X)$ відкритий в X, що еквівалентно замкненості в X перетину $A \cap X$. Отже, замкненими в X^* множинами є ті й лише ті множини, перетин яких з X є замкненим в X.

Твердження 1. *Відкритими (замкненими) в X^* є множини вигляду $V \cup A$, де V — відкрита (замкнена) в X множина, а $A \subset X^*\backslash X$, і лише вони.*

Доведення. Нехай B — відкрита (замкнена) в X^* множина. Очевидно, її можна подати у вигляді $B = (B \cap X) \cup (B\backslash X)$, де перетин $B \cap X$ відкритий (замкнений) в X, а різниця $B\backslash X$ міститься в $X^*\backslash X$. Навпаки, якщо $B = V \cup A$, де V — відкрита (замкнена) в X множина, а $A \subset X^*\backslash X$, то перетин $B \cap X = V$ відкритий (замкнений) в X, звідки множина B відкрита (замкнена) в X^*.

Звідси, зокрема, випливає, що довільна відкрита (замкнена) в X множина та кожна множина $A \subset X^*\backslash X$ є відкритою (замкненою) в X^*.

Твердження 2. *Топологія τ^* розширення простору (X,τ) до $X^* \supset X$ є супремумом:*

1) топології $\tau \cup \{X^*\}$ та X-вилученої топології на X^*;

2) топології $\{\varnothing\} \cup \{(X^*\backslash X) \cup V, V \in \tau\}$ та X-вмісної топології на X^*.

Доведення. 1) Топологія τ^* містить топологію $\tau \cup \{X^*\}$ та X-вилучену топологію на X^*, а тому містить їх об'єднання і супремум. Навпаки, кожна множина з τ^* за твердженням 1 має вигляд $V \cup A$, де $V \in \tau$, а $A \subset X^*\backslash X$, тобто

$V \in \tau \cup \{X^*\}$, а A належить X-вилученій топології на X^*, і отже, лежить в кожній топології на X^*, яка містить об'єднання топології $\tau \cup \{X^*\}$ й X-вилученої топології на X^*, зокрема і в їх супремумі.

2) Нехай $\tau_1 = \{\varnothing\} \cup \{(X^* \backslash X) \cup V, V \in \tau\}$, а τ_2 — X-вмісна топологія на X^*. Кожна з цих топологій, а отже, і їх супремум міститься, очевидно, в τ^*. Навпаки, за твердженням 1 кожна множина топології розширення τ^* має вигляд $V \cup A = ((X^* \backslash X) \cup V) \cap (X \cup A)$, де $V \in \tau$, $A \subset X^* \backslash X$, причому $(X^* \backslash X) \cup V \in \tau_1$, $X \cup A \in \tau_2$. Тому τ^* міститься в кожній топології на X^*, яка містить τ_1 і τ_2, а отже, і в їх супремумі.

Відображення $f : X \to Y$ топологічних просторів (X, τ) та (Y, σ) називається *факторним*, якщо топологія σ є фактортопологією відносно τ та відображенням f, та *індукувальним*, якщо τ індукована топологією σ та відображенням f. Відображення f факторне тоді й лише тоді, коли відкритими (замкненими) в Y є множини вигляду $f(A) \cup B$, де A — відкрита (замкнена) в X насичена відносно f множина (тобто $A = f^{-1}(f(A))$), а $B \subset Y \backslash f(X)$, і лише вони.

Теорема 1. *Нехай (X, τ) — топологічний простір, X^* — надмножина множини X і τ^* — топологія розширення X до X^*. Тоді природне вкладення $X \ni x \overset{i}{\mapsto} x \in X^*$ є факторним відкритим замкненим індукувальним відображенням. Зокрема, (X, τ) є відкритим замкненим підпростором простору X^*.*

Доведення. За твердженням 1 відкритими (замкненими) в X^* є множини вигляду $V \cup A$, де V — відкрита (замкнена) в X множина, а $A \subset X^* \backslash X$, і лише вони. Але $V = i(V) = i^{-1}(i(V))$ для довільної множини $V \subset X$, тобто кожна множина $V \subset X$ насичена відносно i. Отже, відкритими (замкненими) в X^* є множини вигляду $i(V) \cup A$, де V — відкрита (замкнена) в X насичена відносно відображення i множина, а $A \subset X^* \backslash i(X)$, і лише вони, що еквівалентно факторності відображення i.

Нехай тепер τ^*_X — топологія на X, індукована топологією τ^* на X^*. Покажемо, що $\tau^*_X = \tau$. Якщо $U \in \tau^*_X$, то $U = X \cap V$, де $V \in \tau^*$, звідки $U \in \tau$ за означенням топології розширення. Навпаки, якщо $U \in \tau \subset \tau^*$, то $U = X \cap U \in \tau^*_X$. Отже, X — підпростір в X^*, тобто природне вкладення i індукувальне.

За твердженням 1 підпростір $X = X \cup \varnothing = i(X)$ відкритий і замкнений в X^*, що еквівалентно відкритості та замкненості природного вкладення i.

З теореми 1 і транзитивності фактортопології випливає, що топологія розширення транзитивна, тобто якщо X^{**} — надмножина множини X^*, на якій задана топологія розширення X до X^*, то топології розширення X до X^{**} та X^* до X^{**} збігаються. Крім того, згідно з теоремою 1 родина $\{X, X^* \backslash X\}$ є відкритим розбиттям простору X^*, звідки X^* гомеоморфний топологічній сумі своїх підпросторів X та $X^* \backslash X$ ([2]).

Твердження 3. *База найменшої потужності топології τ^* розширення X до X^* має вигляд $\beta^* = \{\{x\}, x \in X^* \backslash X\} \cup \beta$, де β — база найменшої потужності топології τ простору X.*

Доведення. Точка $x \in X^* \backslash X$ має найменший окіл $\{x\}$, який мусить міститися в кожній базі простору X^* за критерієм бази. Тому $\{x\} \in \beta^*$, $x \in X^* \backslash X$. А оскільки відкриті в X^* множини мають вигляд $V \cup A$, де множина V відкрита в X, а $A \subset X^* \backslash X$, і V та A є об'єднаннями деяких сукупностей множин з β та

$\{\{x\}, x \in X^*\backslash X\}$ відповідно, то родина β^* відкритих в X^* множин є базою простору X^*. Залишилось зауважити, що потужність бази β простору X зменшити не можна, а з родини $\{\{x\}, x \in X^*\backslash X\}$ не можна прибрати жодної множини.

Твердження 4. *Нехай τ^* — топологія розширення простору X до $X^* \supset X$. Тоді база найменшої потужності системи околів довільної точки $x \in X^*$ має вигляд $\{\{x\}\}$, коли $x \in X^*\backslash X$, та β_x, де β_x — база найменшої потужності системи околів точки x у просторі X, коли $x \in X$.*

Доведення. Нехай β^*_x — база найменшої потужності системи околів точки $x \in X^*$. Якщо $x \in X^*\backslash X$, то одноточкова множина $\{x\}$ є найменшим околом точки x, звідки $\beta^*_x = \{\{x\}\}$. Якщо ж $x \in X$, то $\beta^*_x = \beta_x$, бо кожен окіл $V \cup A$, де V — відкрита в X множина, а $A \subset X^*\backslash X$, точки x містить її окіл V, який, у свою чергу, містить деякий окіл з бази β_x, потужність якої найменша.

Твердження 5. *Нехай τ^* — топологія розширення простору X до $X^* \supset X$ і $A \subset X^*$ — довільна множина. Тоді:*

1) внутрішність множини A в X^* обчислюється за формулою

$$\operatorname{Int}_{X^*} A = \operatorname{Int}_X(A \cap X) \cup (A\backslash X),$$

де $\operatorname{Int}_X(A \cap X)$ — внутрішність перетину $A \cap X$ у просторі X;

2) замикання множини A в X^* має вигляд

$$\overline{A}_{X^*} = \overline{A \cap X}_X \cup (A\backslash X),$$

де $\overline{A \cap X}_X$ — замикання перетину $A \cap X$ у просторі X;

3) множина ізольованих точок множини A в X^* знаходиться за формулою

$$\mathrm{I}_{X^*}(A) = \mathrm{I}_X(A \cap X) \cup (A\backslash X),$$

де $\mathrm{I}_X(A \cap X)$ — множина ізольованих точок перетину $A \cap X$ у просторі X;

4) множина граничних точок множини A в X^* визначається рівністю

$$A'_{X^*} = (A \cap X)'_X,$$

де $(A \cap X)'_X$ — множина граничних точок перетину $A \cap X$ у просторі X;

5) A скрізь щільна в X^* тоді і тільки тоді, коли перетин $A \cap X$ скрізь щільний в X і $A \supset X^*\backslash X$;

6) A ніде не щільна в X^* тоді й лише тоді, коли $A \subset X$ і A ніде не щільна в X.

Доведення. 1) Оскільки внутрішність множини A є найбільшою відкритою в X^* множиною, яка міститься в A, і $A = (A \cap X) \cup (A\backslash X)$, де $A \cap X \subset X$, $A\backslash X \subset X^*\backslash X$, а кожна відкрита в X^* множина за твердженням 1 має вигляд $V \cup B$, де множина V відкрита в X, а $B \subset X^*\backslash X$ — в X^*, то $\operatorname{Int}_{X^*} A$ є об'єднанням найбільших відкритих в X та в X^* множин, які містяться в $A \cap X$ і $A\backslash X$ відповідно. Перша з них, очевидно, дорівнює $\operatorname{Int}_X(A \cap X)$, а друга — $A\backslash X$.

2) Замикання множини A в просторі X^* є найменшою замкненою в X^* множиною, яка містить A. За твердженням 1 кожна замкнена в X^* множина має вигляд $V \cup B$, де множина V замкнена в X, а $B \subset X^*\backslash X$ — в X^*. Отже, $\overline{A}_{X^*}$ є об'єднанням найменших замкнених в X та в X^* множин, які містять $A \cap X$ і $A\backslash X$ відповідно, тобто об'єднанням $\overline{A \cap X}_X \cup (A\backslash X)$.

3) Точка множини A ізольована в A, якщо деякий окіл цієї точки не містить відмінних від неї точок множини A. Очевидно, кожна точка різниці $A\backslash X$ ізольована в A, а точка перетину $A \cap X$ ізольована в A в просторі X^* в тому й лише в тому разі, коли ця точка ізольована в A в просторі X.

4) $A'_{X^*} = \overline{A}_{X^*} \backslash \mathrm{I}_{X^*}(A) = (\overline{A \cap X}_X \cup (A\backslash X))\backslash(\mathrm{I}_X(A \cap X) \cup (A\backslash X)) = \overline{A \cap X}_X \backslash \mathrm{I}_X(A \cap X) = (A \cap X)'_X$.

5) Множина A скрізь щільна в X^* тоді й лише тоді, коли $X^* = \overline{A}_{X^*} = \overline{A \cap X}_X \cup (A\backslash X)$. А це буде тоді й лише тоді, коли $\overline{A \cap X}_X = X$, $A\backslash X = X^*\backslash X$, що еквівалентно включенню $A \supset X^*\backslash X$ і скрізь щільності в X перетину $A \cap X$.

6) Множина A ніде не щільна в X^* в тому й лише в тому разі, коли $\varnothing = \mathrm{Int}_{X^*} \overline{A}_{X^*} = (\mathrm{Int}_X \overline{A \cap X}_X) \cup (A\backslash X)$, що рівносильно включенню $A \subset X$ і ніде не щільності в X множини A.

Теорема 2. *Нехай τ^* — топологія розширення X до X^* і $X^* \neq X$. Тоді топологічний простір X^* незв'язний, а отже, й не лінійно зв'язний. Компонентами зв'язності цього простору є одноточкові множини $\{x\}$, $x \in X^*\backslash X$, і компоненти зв'язності простору X.*

Доведення. Якщо $X^* \neq X$, то X є нетривіальною відкритою замкненою в X^* множиною. Далі, для будь-якої точки $x \in X^*\backslash X$ одноточкова множина $\{x\}$ зв'язна. Візьмемо ще одну точку $y \in X^*\backslash X$, $y \neq x$. Тоді множина $\{x, y\}$ незв'язна, бо подається у вигляді $\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\} = (\{x, y\} \cap \{x\}) \cup (\{x, y\} \cap \{y\})$ об'єднання двох непорожніх відкритих в $\{x, y\}$ множин з порожнім перетином. Отже, компонентами зв'язності в $X^*\backslash X$ є одноточкові множини $\{x\}$, $x \in X^*\backslash X$. Компонентою зв'язності точки $x \in X$ у просторі X^* є, очевидно, компонента зв'язності точки x у просторі X.

Наступний факт випливає безпосередньо з твердження 4.

Теорема 3. *Нехай τ^* — топологія розширення X до X^*. Простір X^* задовольняє першу аксіому зліченності тоді й лише тоді, коли X її задовольняє.*

Теорема 4. *Нехай τ^* — топологія розширення X до X^*. Простір X^* задовольняє другу аксіому зліченності (є сепарабельним) тоді й лише тоді, коли X її задовольняє (є сепарабельним) та доповнення $X^*\backslash X$ не більш ніж зліченне. Не більш ніж зліченною скрізь щільною в X^* множиною найменшої потужності є $(X^*\backslash X) \cup D$, де D — скрізь щільна в X множина найменшої потужності.*

Доведення. Твердження теореми для другої аксіоми зліченності випливає з твердження 3. Нехай D^* — не більш ніж зліченна скрізь щільна в X^* множина. За твердженням 5 різниця $X^*\backslash X$ міститься в D^* й, отже, не більш ніж зліченна, а перетин $D^* \cap X$ скрізь щільний в X, звідки простір X сепарабельний. Навпаки, нехай D — не більш ніж зліченна скрізь щільна в X множина та доповнення $X^*\backslash X$ не більш ніж зліченне. Тоді об'єднання $D \cup (X^*\backslash X)$ є не більш ніж зліченною скрізь щільною в X^* множиною, і, отже, простір X^* сепарабельний. Скрізь щільною в X^* множиною найменшої потужності є, очевидно, об'єднання $D \cup (X^*\backslash X)$, де D — скрізь щільна в X множина найменшої потужності.

Теорема 5. *Нехай τ^* — топологія розширення X до X^*. Простір X^* є ліндельофовим (компактним) в тому й лише тому разі, коли X ліндельофів (компактний) і доповнення $X^*\backslash X$ не більш ніж зліченне (скінченне).*

Доведення. Для кожного відкритого покриття π простору X родина $\pi \cup$

$\{\{x\}, x \in X^*\backslash X\}$ є відкритим покриттям простору X^* і, отже, містить не більш ніж зліченне (скінченне) підпокриття, звідки X ліндельофів (компактний) і доповнення $X^*\backslash X$ не більш ніж зліченне (скінченне). Навпаки, нехай $\{V_\alpha \cup A_\alpha, \alpha \in T\}$, де V_α — відкрита в X множина, а $A_\alpha \subset X^*\backslash X$, $\alpha \in T$, — довільне відкрите покриття простору X^*. Тоді родина $\{V_\alpha, \alpha \in T\}$ є відкритим покриттям простору X, яке містить не більш ніж зліченне (скінченне) підпокриття $\{V_\alpha, \alpha \in T'\}$. Залишилось для кожної точки не більш ніж зліченної (скінченної) множини $X^*\backslash X$ взяти одну з множин вихідного покриття, яка містить цю точку.

Теорема 6. *Нехай τ^* — топологія розширення X до X^*. Простір X^* є T_i-простором, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, тоді й лише тоді, коли X — T_i-простір. Зокрема, X^* регулярний (нормальний) тоді й лише тоді, коли X регулярний (нормальний).*

Доведення. Замкнений підпростір X T_i-простору X^* задовольняє i-ту аксіому відокремлюваності. Навпаки, якщо X — T_i-простір, то X^* є T_i-простором як топологічна сума простору X та нормального дискретного простору $X^*\backslash X$.

Теорема 7. *Нехай τ^* — топологія розширення X до X^*. Простір X^* метризовний тоді й лише тоді, коли простір X метризовний. Якщо ρ — метрика простору X, d — дискретна метрика на доповненні $X^*\backslash X$, а x_0 та y_0 — фіксовані точки множин X та $X^*\backslash X$ відповідно, то метрика ρ^* на X^* визначається рівностями $\rho^*(x, y) = \rho(x, y)$, коли $x, y \in X$, $\rho^*(x, y) = d(x, y)$, коли $x, y \in X^*\backslash X$, та $\rho^*(x, y) = \rho^*(y, x) = \rho(x, x_0)+1+d(y_0, y)$, коли $x \in X$, $y \in X^*\backslash X$.*

Доведення. Оскільки X — підпростір простору X^*, то необхідність очевидна ([3]). Доведемо достатність.

Спочатку покажемо, що ρ^* — метрика на X^*. Симетричність і невід'ємність функції ρ^* очевидні. Крім того, $\rho^*(x, y) = 0$ в тому й лише в тому разі, коли $x = y$. Перевіримо нерівність трикутника. Якщо $x, y, z \in X$ або $x, y, z \in X^*\backslash X$, то все виконується. Якщо $x, y \in X$, $z \in X^*\backslash X$, то $\rho^*(x, z) + \rho^*(z, y) = \rho(x, x_0) + 1 + d(y_0, z) + \rho(y, x_0) + 1 + d(y_0, z) \geqslant \rho(x, y) + 2 + 2d(y_0, z) > \rho(x, y) = \rho^*(x, y)$. Коли $x, z \in X$, $y \in X^*\backslash X$, то $\rho^*(x, z) + \rho^*(z, y) = \rho(x, z) + \rho(z, x_0) + 1 + d(y_0, y) \geqslant \rho^*(x, x_0)+1+d(y_0, y) = \rho^*(x, y)$. Якщо $x \in X, y$, $z \in X^*\backslash X$, то $\rho^*(x, z)+\rho^*(z, y) = \rho^*(x, x_0) + 1 + d(y_0, z) + d(z, y) \geqslant \rho^*(x, x_0) + 1 + d(y_0, y) = \rho^*(x, y)$. Нарешті, коли $x, y \in X^*\backslash X$, $z \in X$, то $\rho^*(x, z) + \rho^*(z, y) = \rho(z, x_0) + 1 + d(y_0, x) + \rho(z, x_0) + 1 + d(y_0, y) \geqslant 2\rho(z, x_0) + 2 + d(x, y) > d(x, y) = \rho^*(x, y)$. Отже, ρ^* — метрика на X^*.

Доведемо, що топологія τ^* породжена метрикою ρ^*. Нехай множина $U \subset X^*$ є деяким об'єднанням відкритих куль відносно метрики ρ^*, причому, не обмежуючи загальності, можна вважати, що радіуси цих куль менші 1. Тоді це можливо в тому й лише в тому разі, коли $U = V \cup A$, де V — об'єднання відкритих куль відносно ρ, а A — відносно d, менших за 1 радіусів. А це еквівалентно тому, що V — відкрита в X множина, а $A \subset X^*\backslash X$, тобто включенню $U \in \tau^*$.

Список використаної літератури

1. *Lynn Arthur Steen and J. Arthur Seebach, Jr.* Counterexamples in topology. – New York: Dover publications, 1978. – 256 p.
2. *Бабич В. М., Пехтерев В. О.* Деякі властивості топологічної суми // Наук. вісник Ужгород. ун-ту. – 2010. – 21. – С. 31-34.
3. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 750 с.

Одержано 20.01.2015