УДК 519.8

А. Ю. Брила, П. П. Антосяк, В. Когут (Ужгородський нац. ун-т)

ДОСЯЖНІСТЬ НЕЧІТКИХ ЦІЛЕЙ У ЗАДАЧІ ЛЕКСИКОГРАФІЧНО-ЛЕКСИКОГРАФІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

The decision-making problem with fuzzy goals are considered. Goals are divided into groups. Within the group goals are ranking by importance in strict subordination and groups are also ranking in strict subordination. The approach to reduce this lexicographic-lexicographical optimization problem to the one criterion optimization problem with objective function which is a positive linear convolution of partial criteria is proposed.

Розглядається задача прийняття рішень із нечітко визначеними цілями. За деякою ознакою цілі розбито на групи. В межах групи цілі упорядковано за важливістю у субординації строгого ранжування і групи також упорядковано у субординації строгого ранжування. Пропонується підхід до розв'язання даної задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації, що грунтується на зведенні її до задачі однокритеріальної оптимізації, цільова функція якої є додатною лінійною згорткою часткових критеріїв.

Вступ

Велика кількість прикладних задач оптимізації є багатокритеріальними. До того ж, як правило, параметри задачі не можуть бути визначені однозначно і є нечіткими. У роботі розглядається задача прийняття рішень, у якій нечітка ціль визначається як нечітка підмножина універсальної множини альтернатив (у загальному випадку також нечітка). Розв'язати цю задачу - означає досягти цілі з тим чи іншим ступенем належності та з урахуванням ступеня належності до множини альтернатив [1].

У [2] запропоновано підхід до розв'язання задачі прийняття рішень із нечіткими цілями (підхід Белмана-Заде) для випадку рівноважливих нечітких цілей та випадку, коли відомі коефіцієнти відносної важливості ступеню належності до множини альтернатив і відносної важливості цілей. У [3] запропоновано підхід до розв'язання задачі для випадку, коли нечіткі цілі упорядковано за важливістю, тобто на множині відповідних функцій належностей задано субординацію строгого ранжування.

У даній статті запропоновано підхід до розв'язання задачі із нечіткими цілями для випадку, коли нечіткі цілі розбито на групи, в межах кожної із груп критерії строго упорядковані і групи критеріїв також строго упорядковані згідно із заданими субординаціями строгого ранжування.

Постановка задачі

Нехай X $(X \subset Z)$ $-$ універсальна множина альтернатив (розв'язків). Нечіткими цілями можуть бути нечіткі підмножини X типу:

1) "величина x повинна бути приблизно в межах від b до c";
2) "величина x повинна бути близькою до b";
3) "величина x не повинна бути більшою за b";
4) "величина x не повинна бути меншою за b".

Множину цілей розбито на R груп. У межах кожної із груп нечіткі цілі упорядковано за важливістю і групи цілей також упорядковано за важливістю. Не зменшуючи загальності міркувань будемо вважати, що групи нечітких цілей упорядковано за важливістю згідно з субординацією строгого ранжування

$Rg(1,2,...,R)$, а в межах кожної r-ї ($1 \le r \le R$) групи нечіткі цілі, а отже і відповідні функції належності

$$\mu_{ri}(x)\,,\ i = 1,2,...,q_r,$$

упорядковано згідно з субординацією строго ранжування $Rg\,(1,2,...,q_r)$. Кожна нечітка ціль подається відповідною функцією належності ([2,4]).

Нехай κ_r^L – критерій, що є векторною згорткою критеріїв $\mu_{ri}, i = 1,2,...,q_r$ у субординації $Rg\,(1,2,...,q_r)$ з векторною цільовою функцією

$$F_r\,(x) = (\mu_{r1}\,(x)\,, \mu_{r2}\,(x)\,, ..., \mu_{rq_r}\,(x))\,.$$

κ^{LL}– складена згортка критеріїв κ_r^L, $r = 1,2,...,R$, у субординації $Rg\,(1,2,...,R)$ з векторною цільовою функцією

$$F\,(x) = (F_1\,(x)\,, F_2\,(x)\,, ..., F_R\,(x))\,.$$

Задача знаходження непокращуваного розв'язку за критерієм κ^{LL} є задачею лексикографічно-лексикографічної оптимізації [5]

$$max^{LL} F\,(x)\,,\ x \in X. \tag{1}$$

Нехай

$$\tilde{F} = (f_1, f_2, ..., f_q) = (\mu_{11}, \mu_{12}, ..., \mu_{1q_1}, \mu_{21}, \mu_{22}, ..., \mu_{2q_2}, ..., \mu_{R1}, c_{R2}, ..., c_{Rq_R})$$

є векторною функція, складеною з функцій $\mu_{ri}\,(x)\,, i = 1,2,...,q_r, r = 1,2,...R$, $q = \sum\limits_{r=1}^{R} q_r$. В [4] показано, що задача (1) еквівалентна задачі лексикографічної оптимізації

$$max^{L} \tilde{F}\,(x)\,,\ x \in X. \tag{2}$$

У [5] запропоновано підхід до розв'язання лінійної задачі лексикографічно-лексикографічної оптимізації, що ґрунтується на зведенні її до задачі однокритеріальної оптимізації, цільова функція якої є додатною лінійною згорткою часткових критеріїв. У даній статті розглянемо аналогічний підхід до розв'язання задачі (1) з урахуванням властивостей розглядуваної задачі.

Досяжність оптимальних розв'язків задачі (1)

Спочатку дослідимо випадок, коли для кожної із функцій належностей виконується умова

$$\mu_{ri}\,(x) \in \{0,1\}\,,\ x \in X,\, i \in \{1,2,...,q_r\}\,, r \in \{1,2,...,R\}\,. \tag{3}$$

Позначимо X^* множину оптимальних розв'язків цієї задачі.

Постає питання, чи існує такий набір додатних коефіцієнтів $\alpha_i, i = 1,2,...,q$, що функціонал $L\,(x) = \sum\limits_{i=1}^{q} \alpha_i f_i\,(x)$ представляв би порядок аналогічний до порядку віддачі переваги, що визначається у задачі (1) на множині X.

Нехай коефіцієнт $\alpha_q > 0$ вибрано довільним чином, а інші додатні коефіцієнти вибрано згідно умови

$$\alpha_i > \sum_{l=i+1}^{q} \alpha_l, \ i = q-1, q-2, ..., 1. \tag{4}$$

Розглянемо задачу однокритеріальної оптимізації зі скалярною цільовою функцією

$$\max L(x), \ x \in X \tag{5}$$

Позначимо $\bar{X}^*$ множину оптимальних розв'язків задачі (4).

Якщо розв'язок багатокритеріальної задачі оптимізації може бути отриманий як розв'язок відповідної однокритеріальної задачі, з цільовою функцією, яка є лінійною згорткою критеріїв цієї багатокритеріальної задачі оптимізації, то вважають ([5]), що даний розв'язок є досяжним за зваженою сумою різноважливих критеріїв

Теорема 1. *Розв'язок задачі (5) є розв'язком задачі (1).*

Доведення теореми легко отримати, ґрунтуючись на еквівалентності задач (1) і (2).

Отже, ґрунтуючись на даній теоремі та правилах вибору додатних коефіцієнтів (3) ми можемо знаходити досяжні оптимальні розв'язки задачі (1) з векторною цільовою функцією шляхом розв'язання задачі (5) зі скалярною цільовою функцією.

Розглянемо тепер задачу лексикографічної оптимізації з нечіткими цільовими функціями (1), відмовившись від умови (3). Графічне представлення цільових функцій набуде вигляду(див. рис. 1,2,3,4):

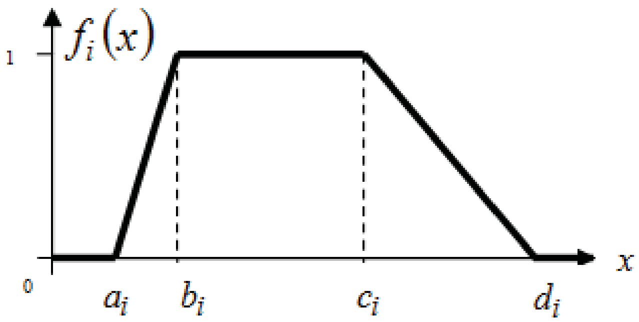

Рис. 1. *"Величина x повинна бути приблизно в межах від b до c"*

Будемо вважати, що параметри $a_i, b_i, c_i, d_i, \ i = 1, 2, ..., q$ є цілочисловими. Позначимо X^{**} множину оптимальних розв'язків такої лексикографічної задачі оптимізації з довільними функціями.

Дослідимо проблему відшукання досяжних оптимальних розв'язків. Нехай $\beta_q > 0$ довільне додатне число, а інші поступово визначено з

$$\beta_i > \frac{1}{\alpha_i} \sum_{l=i+1}^{q} \beta_l, \ i = q-1, q-2, ..., 1, \tag{6}$$

де

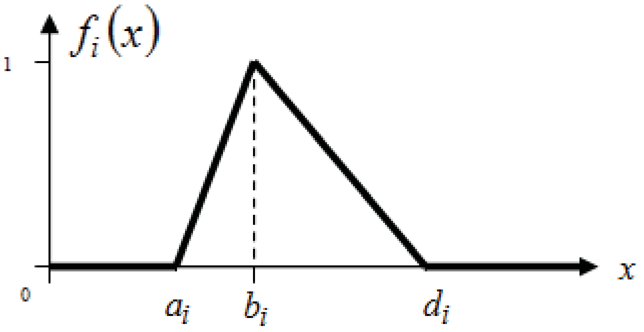

Рис. 2. *“Величина x повинна бути близькою до b”*

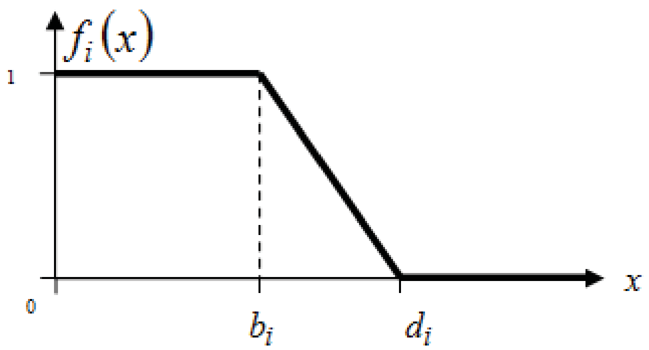

Рис. 3. *“Величина x не повинна бути більшою за b”*

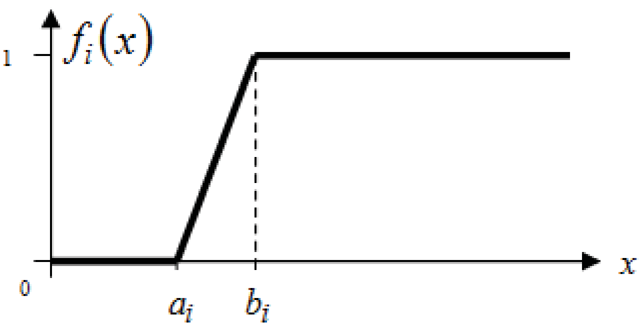

Рис. 4. *“Величина x не повинна бути меншою за b”*

$$\alpha_i = \min_{f_i(x) \neq f_i(y)} |f_i(x) - f_i(y)|, \quad i = 1, 2, ..., q. \tag{7}$$

З використанням коефіцієнтів β_i, знайдених згідно з (5), побудуємо функціонал

$$Z(x) = \sum_{i=1}^{q} \beta_i f_i(x)$$

і задачу однокритеріальної оптимізації зі скалярною цільовою функцією

$$\max Z(x), x \in X. \tag{8}$$

Позначимо $\bar{X}^{**}$ множину оптимальних розв'язків цієї задачі.

Теорема 2. *Якщо $x^* \in \bar{X}^{**}$, то $x^* \in X^{**}$.*

Доведення теореми легко отримати ґрунтуючись на еквівалентності задач (2) і (1)

Зауважимо, що коефіцієнти α_i для кожної із функцій $\mu_i(x)$ можна знайти наступним чином:

1) "величина x повинна бути приблизно в межах від b до c"

$$\alpha_i = \min\left\{\frac{1}{b_i - a_i}, \frac{1}{d_i - c_i}\right\};$$

2) "величина x повинна бути близькою до b"

$$\alpha_i = \min\left\{\frac{1}{b_i - a_i}, \frac{1}{d_i - b_i}\right\};$$

3) "величина x не повинна бути більшою за b"

$$\alpha_i = \frac{1}{d_i - b_i};$$

4) "величина x не повинна бути меншою за

$$\alpha_i = \frac{1}{b_i - a_i}.$$

Приклад 1. *Нехай потрібно прийняти рішення відносно значення деякої величини на основі суджень двох груп експертів (див. рис. 5).*

До складу першої групи експертів входять:

експерт 1: "значення величини не повинно перевищувати 1";

експерт 2: "значення величини повинно коливається десь у межах від 2 до 4".

Експертні оцінки формалізовано функціями належності $\mu_{11}(x)$ та $\mu_{12}(x)$.

До складу другої групи експертів входять:

експерт 3: "значення величини повинно бути біля 5";

експерт 4: "значення величини повинно бути біля 6".

Експертні оцінки формалізовано функціями належності $\mu_{21}(x)$ та $\mu_{22}(x)$.

У межах кожної із груп експертів проранжовано за важливістю у відповідності до субординації $Rg\,(1,2)$. Перша група експертів вважається важливішої за другу.

Нехай нечіткі експертні оцінки формалізовано функціями належності у відповідності до наступного рисунка:

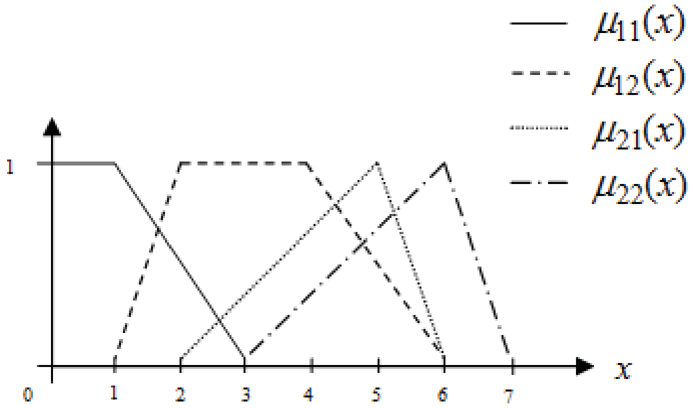

Рис. 5. *Формалізовані судження експертів*

Отже, маємо задачу лексикографічно-лексикографічної оптимізації

$$max^{LL} F\,(x)\,,\; x \in X,$$

де $F\,(x) = (F_1\,(x)\,, F_2\,(x))$,

$$F_1\,(x) = (\mu_{11}\,(x)\,, \mu_{12}\,(x))\,,$$

$$F_2\,(x) = (\mu_{21}\,(x)\,, \mu_{22}\,(x))\,,$$

Дана задача є еквівалентною задачі

$$\max \tilde{F}\,(x)\,, x \in X \quad ,$$

де

$$\tilde{F}\,(x) = (f_1\,(x)\,, f_2\,(x)\,, f_3\,(x)\,, f_4\,(x)) = (\mu_{11}\,(x)\,, \mu_{12}\,(x)\,, \mu_{21}\,(x)\,, \mu_{22}\,(x))\,.$$

Визначимо коефіцієнти $\alpha_i,\ i = 1,2,3,4$ *та* $\beta_i,\ i = 1,2,3,4$ *з урахуванням теорем 1, 2. Маємо:*

$$\alpha_3 = \min\left\{\frac{1}{6-5}, \frac{1}{5-2}\right\} = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_2 = \min\left\{\frac{1}{2-1}, \frac{1}{6-4}\right\} = \frac{1}{2},$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{3-1} = \frac{1}{2},$$

$$\beta_4 = 1,$$

$$\beta_3 = 4 > \frac{1}{\alpha_3}\beta_4 = 3,$$

$$\beta_2 = 11 > \frac{1}{\alpha_2}(\beta_4 + \beta_3) = 10,$$

$$\beta_1 = 33 > \frac{1}{\alpha_1}(\beta_4 + \beta_3 + \beta_1) = 32.$$

Згідно з (8), розв'язавши задачу

$$\max\{33\mu_1(x) + 11\mu_2(x) + 4\mu_3(x) + \mu_4(x)\}, \quad x \in X = [1, 7],$$

отримаємо $\bar{X}^{**} = \{2\}$.

Висновки

Запропонований підхід до розв'язання задач лексикографічно-лексикографічної оптимізації із нечітко визначеними цілями дозволяє звести дану задачу векторної оптимізації до задачі однокритеріальної оптимізації із скалярною цільовою функцією. Перевагою такого підходу є те, що він дозволяє зменшувати обчислювальну складність алгоритму розв'язання задачі і дає можливість застосувати для її розв'язання відомі методи.

Список використаної літератури

1. Волошин О.Ф. Моделі та методи прийняття рішень / О.Ф. Волошин, С.О. Мащенко. – К.: Видавничо-поліграфічний центр “Київський університет”, 2010. – 336 с.
2. Bellman R.E. Decision-Making in Fuzzy Environment / R.E. Bellman, L.A. Zadeh // Management Science, 1970. – vol.17 – №4. – P.141-160.
3. Брила А.Ю., Антосяк П.П. Досяжність нечітких цілей у заданій субординації строгого ранжування // Вісник Київського університету. Серія: фіз.-мат. науки. —2014. —№ 2. —С. 81-86.
4. Рыжов А. П. Элементы теории нечетких множеств и измерения нечеткости / А. П. Рыжов. –М.: Диалог-МГУ, 1998. –116 с.
5. Червак Ю. Ю. Оптимізація. Непокращуваний вибір/ Ю.Ю. Червак. — Ужгород: Ужгородський нац. ун–т, 2002. — 312 с.
6. Подиновский В. В., Гаврилов В. М. Опимизация по последовательно применяемым критериям/ В. В. Подиновский, В. М. Гаврилов. — М.:Наука, 1975. — 192 с.

Одержано 05.05.2015